Cálculo I - Examen Final - 22 de junio de 2011

---

1) Sea la sucesion definida recursivamente por $a_{n+1} = (a_n)^2/2 + 1/2$ para $n \in \mathbb{Z}^+$ con $a_1 = 1/2$.

a) Comprobar que $a_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

b) Demostrar que la sucesión es monotona creciente.

c) ¿Por qué se deduce de los apartados anteriores que la sucesión es convergente?

d) Calcular su límite.

2) Calcular la integral

$$\int_0^2 \frac{1 + |x-1|}{(4-x)(3-x)}\, dx.$$

3) Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^4} e^{t^2}\, dt}{\operatorname{sen} x - x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log\big(\cos(3x)\big) - 1}{\operatorname{sen}^2 x}, \qquad \lim_{x\to 0} x \log(\operatorname{sen}^2 x).$$

4) Describir la función

$$f(x) = \frac{x}{\log x}$$

dando su dominio de definición e imagen, estudiando su continuidad y derivabilidad, sus extremos y puntos de inflexión, sus cortes con los ejes, asíntotas, etc y dibujar su gráfica.

5) Hallar el área comprendida por las curvas $y = x/(1+x^2)$ e $y = \frac{1}{2}|x|$.

Soluciones

---

1) Claramente $a_n \geq 0$ (es suma de números no negativos).

a) Probaremos $a_n < 1$ por inducción. Se cumple para $n = 1$ porque $a_1 = \frac{1}{2} < 1$. Si se cumple para cierto n entonces se cumple también para $n+1$ porque $0 \leq a_n < 1$ implica $a_n^2 < 1$ y por tanto

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

b) Notando las equivalencias

$$a_{n+1} \geq a_n \iff \frac{a_n^2}{2} + \frac{1}{2} \geq a_n \iff \frac{a_n^2 - 2a_n + 1}{2} \geq 0 \iff \frac{(a_n - 1)^2}{2} \geq 0,$$

vemos que la última desigualdad es siempre cierta y se deduce que $a_{n+1} \geq a_n$ para cualquier n.

c) El teorema de Bolzano-Weierstrass implica que toda sucesión acotada y monótona es convergente.

d) Digamos que $L = \lim a_n$, entonces tomando límites en la fórmula de recurrencia del enunciado, usando las propiedades de los límites, se tiene $L = L^2/2 + 1/2$. Al resolver esta ecuación se obtiene la solución única $L = 1$.

2) Si $x \leq 1$ se cumple $|x - 1| = 1 - x$ y si $x \geq 1$, se cumple $|x - 1| = x - 1$. Entonces el valor I de la integral se puede escribir como

$$I = \int_0^1 \frac{2 - x}{(x-4)(x-3)}\, dx + \int_1^2 \frac{x}{(x-4)(x-3)}\, dx.$$

Para el integrando de la primera integral la descomposición en fracciones simples es

$$\frac{2 - x}{(x-4)(x-3)} = \frac{-2}{x-4} + \frac{1}{x-3}$$

ya que $2 - x = A(x-3) + B(x-4)$ conduce a $A = -2$ y $B = 1$ (por ejemplo sustituyendo $x = 4$ y $x = 3$). De la misma forma, para la segunda integral empleamos

$$\frac{x}{(x-4)(x-3)} = \frac{4}{x-4} + \frac{-3}{x-3}$$

que procede de la solución $A = 4$ y $B = -3$ de $x = A(x-3) + B(x-4)$.

Todas estas integrales son inmediatas y conducen a

$$\begin{aligned} I &= -2\log|x-4| + \log|x-3|\Big|_0^1 + 4\log|x-4| - 3\log|x-3|\Big|_1^2 \\ &= (-3\log 3 + 5\log 2) + (7\log 2 - 4\log 3) = 12\log 2 - 7\log 3. \end{aligned}$$

3) Llamemos L_1, L_2 y L_3 a estos límites.

El primero es una indeterminación del tipo $0/0$ a la que se puede aplicar la regla de L'Hôpital o usar el polinomio de Taylor. Esta segunda opción es más breve pero posiblemente menos común en los exámenes, por ello elegimos la primera:

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^4} e^{t^2}\,dt}{\operatorname{sen} x - x} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^8}\cdot 4x^3}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3}{\cos x - 1}.$$

En la segunda igualdad se ha aplicado el teorema fundamental del cálculo mientras que la última viene de que $e^{x^8} \to e^0 = 1$ cuando $x \to 0$. El límite resultante es todavía del tipo $0/0$ y calculamos su valor con dos aplicaciones directas de la regla de L'Hôpital:

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3}{\cos x - 1} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{12x^2}{-\operatorname{sen} x} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{24x}{-\cos x} = 0.$$

En L_2 el numerador tiende a -1 (recuérdese que $\log 1 = 0$) y el denominador tiende a cero por la derecha, por tanto $L_2 = \infty$, o más concretamente, $L_2 = -\infty$.

El tercer límite es una indeterminación $0 \cdot \infty$ que se transforma en ∞/∞ escribiendo $x \log(\operatorname{sen}^2 x) = \log(\operatorname{sen}^2 x)/x^{-1}$. Aplicando la regla de L'Hôpital,

$$L_3 = \lim_{x\to 0} \frac{\log(\operatorname{sen}^2 x)}{x^{-1}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}}{-x^{-2}} = -\lim_{x\to 0} \Big(2x \cos x \frac{x}{\operatorname{sen} x}\Big).$$

Se tiene $x \to 0$, $\cos x \to 1$ y $x/\operatorname{sen} x \to 1$ (por la regla de L'Hôpital, por el polinomio de Taylor o porque uno lo conoce de antemano). Entonces $L_3 = 0$.

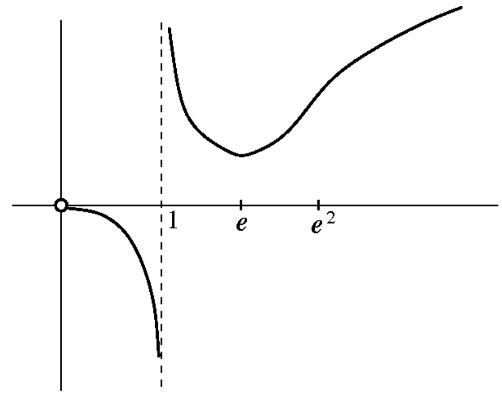
4) El logaritmo está definido para $x > 0$ y el cociente se puede hacer cuando el denominador no es nulo, es decir, cuando $x \neq 1$. Por tanto el dominio de definición es

$$\operatorname{Dom}(f) = \{x > 0\} \cap \{x \neq 1\} = (0,1) \cup (1, +\infty).$$

Las funciones $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = \log x$ son continuas y derivables en todo su dominio de definición, por tanto f continua y derivable en $(0,1) \cup (1,+\infty)$.

El valor $x = 0$ no está en $\operatorname{Dom}(f)$ por tanto no hay corte con el eje Y. Por otro lado $f(x) = 0$ implica $x = 0$ y, de nuevo, no hay corte con el eje X porque nos lleva a un valor fuera del dominio de definición. Nótese que sin embargo $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ (porque $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$) así que la gráfica se acerca indefinidamente al origen.

Claramente $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$ por tanto hay una asíntota vertical en $x = 0$. Por otro lado $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (por ejemplo empleando la regla de L'Hôpital) y entonces no hay asíntotas horizontales.



Un cálculo prueba $f'(x) = (\log x - 1)/(\log x)^2$ por tanto el único extremo relativo corresponde a $\log x = 1$, es decir, a $x = e$. Como $\log x - 1 < 0$ para $0 < x < e$ y $\log x - 1 > 0$ para $x > e$, la función es creciente en $(e, +\infty)$ y decreciente en el resto del dominio. En particular, $f(e) = e$ es un mínimo relativo.

Las consideraciones sobre el crecimiento y las asíntotas llevan a que la imagen de f es $(-\infty, 0) \cup (e, +\infty)$.

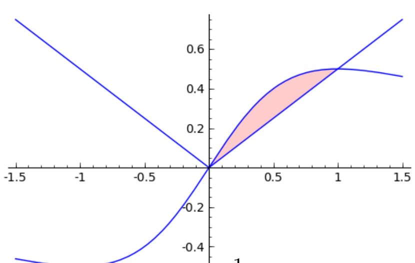
Un nuevo cálculo muestra que

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}(\log x)^2 - 2\frac{\log x}{x}(\log x - 1)}{(\log x)^4} = \frac{-\log x + 2}{x(\log x)^3}$$

De $f''(x) = 0$ se deduce que el único punto de inflexión es $(e^2, e^2/2)$, porque $f(e^2) = e^2/2$. Estudiando el signo de f'' se obtiene que la gráfica es cóncava ($\frown$) en $(0,1)$ y en $(e^2, +\infty)$, y es convexa ($\smile$) en $(1, e^2)$.

El dibujo incluido representando los resultados es, a propósito, cualitativo. No está a escala.

5) Como veremos, la parte $x < 0$, y por tanto el valor absoluto, es irrelevante.



Claramente hay una intersección para $x = 0$. Si $x > 0$, $x/(1 + x^2) = x/2$ implica $2 = 1 + x^2$ y de aquí $x = 1$. Si $x < 0$, $x/(1 + x^2) = -x/2$ implica $-2 = 1 + x^2$, que no tiene solución. Entonces $x \in [0, 1]$ en la región buscada. Además la gráfica de la primera función está por encima ya que $x/(1 + x^2) \geq x/2$ en $[0, 1]$. El área es por tanto,

$$A = \int_0^1 \Big(\frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{2}\Big)\, dx = \Big(\frac{1}{2}\log(1+x^2) - \frac{x^2}{4}\Big)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{4}.$$