

Cálculo I - Examen Final - 22 de junio de 2011

1) Sea la sucesión definida recursivamente por $a_{n+1} = (a_n)^2/2 + 1/2$ para $n \in \mathbb{Z}^+$ con $a_1 = 1/2$.

- Comprobar que $a_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.
- Demostrar que la sucesión es monotona creciente.
- ¿Por qué se deduce de los apartados anteriores que la sucesión es convergente?
- Calcular su límite.

2) Calcular la integral

$$\int_0^2 \frac{1 + |x - 1|}{(4 - x)(3 - x)} dx.$$

3) Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^4} e^{t^2} dt}{\sin x - x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos(3x)) - 1}{\sin^2 x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \log(\sin^2 x).$$

4) Describir la función

$$f(x) = \frac{x}{\log x}$$

dando su dominio de definición e imagen, estudiando su continuidad y derivabilidad, sus extremos y puntos de inflexión, sus cortes con los ejes, asíntotas, etc y dibujar su gráfica.

5) Hallar el área comprendida por las curvas $y = x/(1 + x^2)$ e $y = \frac{1}{2}|x|$.
