1) Calcular el área limitada entre el eje X y la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 2k\pi]$ donde $k \in \mathbb{Z}^+$.

2) Calcular el área limitada entre el intervalo $[-\pi, \pi]$ del eje X y la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$.

3) Hallar el área limitada entre las gráficas de los pares de funciones que se indican:

a) $f(x) = x^2 + x + 1$ y $g(x) = 2x^2 - 2x + 3$,

b) $f(x) = \dfrac{2}{4x^2 + 1}$ y $g(x) = 2|x|$,

c) $f(x) = x\big(e^x + 1\big)$ y $g(x) = x + x^2 e^x$,

d) $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ y $g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

4) Dada $f(x) = x^2 - 2x + 7$ consideramos el triángulo curvilíneo T limitado entre las tangentes en $x = 0$ y $x = 2$ y la gráfica de f. Hallar el área de T.

5) Hallar el área limitada entre la curva definida por $y^2 = 3x$ y la recta $2y - x + 24 = 0$.

6) Deducir usando integrales que el área del círculo es πr^2.

7) Calcular el área de un sector circular de radio r y ángulo α. *Indicación*: Este problema se puede hacer con integrales o con una simple regla de tres a partir del problema anterior.

8) Deducir usando integrales que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y que el volumen de un cono recto de altura h y radio de la base r es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

9) Estudiar la convergencia de las siguientes series mediante el criterio de la integral

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, *b)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$, *c)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$, *e)* $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log\log n}$, *f)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$,

10) Comparar la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, s_n, con la integral de la función $f(x) = 1/x$ en intervalos adecuados y concluir que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene $|s_n - \log n| \le 1$. En particular $s_{1\,000\,000\,000} < 22$ a pesar de que $\lim s_n = \infty$ porque la serie no converge.

11) Explicar con detalle empleando sumas superiores e inferiores por qué si f es creciente en $[1, N]$, $N \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(N) \geq \int_1^N f \geq f(1) + f(2) + \cdots + f(N-1).$$

Tomar $f(x) = \log x$ para probar la desigualdad $1 \geq \dfrac{N^N e^{1-N}}{N!} \geq \dfrac{1}{N}$ y explicar cómo obtener a partir de ella el valor de $\lim \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

12) Consideremos la región tridimensional infinita $\mathcal{R}$ obtenida al hacer girar la gráfica de $f(x) = x^{-1}$ alrededor del eje X para $x \geq 1$. Comprobar que el volumen de $\mathcal{R}$ es finito y sin embargo su área (lateral) es infinita. Por tanto se da la paradoja de que pintar $\mathcal{R}$ requiere un área infinita de pintura pero, si es transparente, basta verter un volumen finito de pintura en su interior.

13) Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, calcular el área de la región limitada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

14) Calcular el área de la región plana limitada por la párabola de ecuación $(y-2)^2 = x-1$, la tangente a esta párabola en el punto $(2, 1)$ y el eje OX.

15) Calcular el área del recinto formado por los puntos (x, y) del plano que verifican

$$y^2 \geq 9x \qquad \text{y} \qquad x^2 + y^2 - 36 \leq 0.$$

Indicación: Nótese que la segunda ecuación define un círculo de área 36π y un sector circular suyo de ángulo $2\pi/3$ tendrá área $36\pi/3$.

16) Calcular el área de la figura limitada por la curva cerrada $y^2 = (1 - x^2)^3$.

17) Se considera la región $\mathcal{R}$ del plano definida por la parte positiva de los ejes de coordenadas y la curva $y = \cos x$ con $0 \leq x \leq \pi/2$. Hallar el valor del parámetro λ de modo que la curva $y = \lambda \operatorname{sen} x$ divida a la región $\mathcal{R}$ en dos regiones de igual área. *Indicación*: Escribir $\lambda = 1/\operatorname{tg} \gamma$ y emplear las relaciones trigonométricas.

18) Hallar el área de la región plana definida por las inecuaciones:

$$2y - x^2 \geq 0 \qquad \text{y} \qquad 2x + y^2 \leq 0\,,$$

y el volumen del cuerpo engendrado por dicha region al girar alrededor del eje X.

19) Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la curva

$$y^2 = \frac{1}{9}x(x-3)^2 \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq 3$$

al girarla alrededor del eje OX.

20) Una partícula se mueve a lo largo del eje X describiendo una trayectoria $x = x(t)$ con velocidad $v(t) = At^2 + 1$. Calcular A sabiendo que $x(1) = x(0)$.

21) La proporción x de moléculas de un gas en la atmósfera disminuye cuando la altura crece con una tasa de variación proporcional a x, es decir

$$\frac{dx}{dh} = -Cx$$

donde h es la altura en kilómetros sobre el nivel del mar.

a) Dividiendo entre x e integrando, hallar una fórmula para $x = x(h)$.

b) Para el oxígeno $C = 0.07$. ¿A qué altura la proporción de oxígeno es la mitad de la que hay a nivel del mar? Responder a la misma pregunta para el hidrógeno, para el que $C = 0.006$.

c) Teniendo en cuenta que a nivel del mar hay unas 400 000 moléculas de oxígeno por cada una de hidrógeno, ¿a qué altura habrá más hidrógeno que oxígeno?

22) La velocidad de un cuerpo en caída libre, teniendo en cuenta el rozamiento del aire, puede ser modelizada mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{dt} = g - Cv^2$$

con t el tiempo en segundos, v la velocidad en metros por segundo, $g = 9.8\ m/s^2$ y C una constante que depende de la forma del cuerpo.

a) Comprobar que la ecuación anterior se puede escribir como $\dfrac{v'}{\alpha - v} + \dfrac{v'}{v + \alpha} = 2\alpha C$ donde $\alpha = \sqrt{g/C}$. Integrar esta expresión para obtener la velocidad en función del tiempo suponiendo que se parte del reposo $v(0) = 0$.

b) Un hombre con el paracaídas cerrado tiene $C = 0.001$, y abierto $C = 0.5$. Calcular la velocidad a largo plazo en ambos casos.

c) En el caso del paracaídas cerrado, ¿cuánto tiempo pasa desde que se tira del avión hasta que alcanza la velocidad de 50 m/s? ¿Y el caso del paracaídas abierto?

23) Calcular la integral $\int_0^{1/\sqrt{3}} \arctan x\, dx$ integrando por partes. Sustituir $\arctan x$ por su serie de Taylor (en cero) e integrar término a término. Concluir de ambos resultados la fórmula

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{18} = \log\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{1\cdot 2}\Big(\frac{1}{3}\Big)^1 - \frac{1}{3\cdot 4}\Big(\frac{1}{3}\Big)^2 + \frac{1}{5\cdot 6}\Big(\frac{1}{3}\Big)^3 - \frac{1}{7\cdot 8}\Big(\frac{1}{3}\Big)^4 + \frac{1}{9\cdot 10}\Big(\frac{1}{3}\Big)^5 - \dots$$

24) Teniendo en cuenta que la densidad del agua es $\rho = 1$ gr/cm^3, el principio de Arquímedes asegura que al tirar una pelota al agua y quedar ésta en equilibrio semisumergida, el volumen en centímetros cúbicos de la parte sumergida coincide con el peso en gramos de la pelota. Supongamos que para una pelota de radio 5 cm la línea de flotación describe una circunferencia de 3 cm de radio. Calcular la masa que puede tener la pelota explicando por qué hay dos soluciones y cómo podríamos saber cuál es la correcta.