1) Si f es continua y derivable y satisface la ecuación

$$\int_0^x f(t)\,dt = -\frac{1}{2} + x^2 + x\,\mathrm{sen}(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x) \quad \text{para todo} \quad x \geq 0\,,$$

calcular $f(\pi/4)$ y $f'(\pi/4)$.

2) Comprobar que $\int_0^x |t|\,dt = \frac{1}{2}x\,|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3) Explicar geométricamente por qué se cumple $\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

4) Calcular una fórmula explícita para la función $g(a) = \int_0^7 (a+x^2)^{-1}\,dx$, $a > 0$. Hallar el valor de $g'(1)$ a partir de esa fórmula. Como la integral es una suma, la derivada de la integral es la integral de la derivada, es decir

$$\frac{dg}{da} = \int_0^7 \frac{d}{da}\Big(\frac{1}{a+x^2}\Big)\ dx.$$

Usar esta expresión para calcular $\int_0^7 dx/(1+x^2)^2$.

5) Hallar $f'(x)$ si

a) $f(x) = \displaystyle\int_0^x (1+t^2)^{-2}\,dt$,

b) $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3}\,dt$,

c) $f(x) = \displaystyle\int_{x^3}^{x^2} (1+t^2)^{-3}\,dt$,

d) $f(x) = \displaystyle\int_{e^x}^{1} \frac{t^6}{1+t^4}\,dt$.

6) Aproximar

$$\int_0^{1/2} \frac{e^{-\operatorname{arc\,sen} t}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

usando el polinomio de Taylor de grado 2 en cero de la función que está dentro de la integral. Hallar también la integral de forma exacta y comparar los resultados.

7) Determinar el polinomio de Taylor de grado 3 en $a = 0$ de la función

$$h(x) = \int_0^1 y^{3/2} e^{-xy^2}\,dy$$

usando la serie de Taylor de e^t en $a = 0$.

8) Calcular las primitivas de las siguientes funciones:

a) $(3+5x+x^2)(x-3)$ *b*) $e^x(e^x-e^{-x})+\dfrac{1}{5x-2}$ *c*) $3\,\mathrm{sen}(5x)-\dfrac{x}{2}-\dfrac{5}{1+4x^2}$

d) $\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{2}{(4x+1)^2}$ *e*) $\dfrac{4}{\sqrt{1-2x^2}}-\sqrt{x}+\dfrac{1}{3x^{2/3}}$ *f*) $(x^2+3x)(5x^3-\dfrac{8}{x^3})$

9) Calcular las primitivas de las siguientes funciones:

a) $(x+2)2^x$ *b*) $\log x + x\log x$ *c*) $-9x^2e^{-5x+3}$

d) $x(\cos(5x)+x)$ *e*) $(x+\mathrm{sen}\,x)e^{-x}$ *f*) $x\sqrt{x+1}$

10) Integrando por partes con $u=\mathrm{sen}^{n-1}x$, obtener la fórmula

$$\int \mathrm{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\mathrm{sen}^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \mathrm{sen}^{n-2}x\,dx \qquad \text{para } n\geq 2 \text{ entero}$$

y utilizarla para calcular $\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^7 x\,dx$.

11) Calcula las primitivas de las siguientes funciones:

a) $\dfrac{x}{(x+1)(x-3)}$ *b*) $\dfrac{x^3+1}{x^3+x}$ *c*) $\dfrac{2}{(x-1)(x+3)^2}$

d) $\dfrac{35x+21}{(2x-3)(x-5)^2}$ *e*) $\dfrac{5x^2+5}{(x^2-1)(x^2+2x+2)}$ *f*) $\dfrac{3x^2+2x-13}{x^3-3x^2+x-3}$

12) Calcular la integral indefinida

$$\int \frac{2x+5}{(x-a)(x-b)(x-c)}\,dx$$

con a,b,c números distintos. Utilizar el resultado para aproximar

$$I=\int \frac{2x+5}{x^3-3x+1}\,dx,$$

probando primero que $x^3-3x+1=0$ tiene tres soluciones distintas y aproximándolas por el método de Newton.

13) Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$, con $f(x)$ igual a:

a) $e^{-\sqrt{x}}$ *b*) $\dfrac{1}{e^x+4e^{-x}}$ *c*) $\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}$

d) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$ *e*) $\sqrt{3-x^2}$ *f*) $\dfrac{4^x+1}{2^x+1}$

g) $\sqrt{\dfrac{3+4x}{1+x}}$ *h*) $\dfrac{1}{\sqrt{16+x^2}}$ *i*) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^4}}$

Para las dos últimas, auxiliarse de $\int dx/\sqrt{x^2+1} = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + K$.

14) Si $V = V(t)$ indica la tensión en función del tiempo, se define la tensión eficaz (la que en cierto modo pueden aprovechar los motores) en un periodo $[0, T]$ como

$$V_{\text{ef}} = \left(\frac{1}{T}\int_0^T |V(t)|^2\, dt\right)^{1/2}.$$

Los enchufes caseros europeos tienen 220 voltios de tensión eficaz y $V(t) = V_0 \operatorname{sen}(2\pi t/T)$ con $T = 1/50$. Hallar el voltaje máximo V_0 que proporcionan.

15) Calcular $\int_0^{\pi/4} f(x)\, dx$, con $f(x)$ igual a:

a) $\operatorname{tg} x$	*b*) $\cos^4 x$	*c*) $\operatorname{tg}^2 x$
d) $\operatorname{arc\,sen} x$	*e*) $\operatorname{sen}^5 x \cos^3 x$	*f*) $\operatorname{sen}^2(2x)\cos^2(2x)$

16) Calcular las integrales impropias

a) $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$, *b*) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-5x}\, dx$, *c*) $\displaystyle\int_0^1 \log x\, dx$.

17) Hallar el valor de la integral $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ con un error menor que 0.01 usando un polinomio de Taylor de $\operatorname{sen} x$ en el punto cero.

18) Expresar la integral $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\, dx$ en términos de $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$.

19) Cualquier polinomio $f(x)$ de grado tres satisface la identidad

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

pero para una función general es sólo una aproximación llamada *Regla de Simpson con dos subintervalos*. La *Regla de Simpson con* $2n$ *subintervalos*, $n \in \mathbb{N}$, consiste en dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud y en cada uno aplicar la regla con 2 subintervalos. Comprobar que la fórmula anterior es exacta para $f(x) = x^2$ y usar la regla de Simpson con 4 subintervalos para aproximar la integral $\int_0^1 e^x/(1+x)\, dx$.

20) Utilizando rectángulos de base $1/n$ para aproximar el área se deduce que toda función continua f en $[0, 1]$ verifica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\, dx\,,$$

Utilizar este hecho para calcular los límites de las siguientes sucesiones:

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}\,, \qquad b_n = \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)k}{n^3}\,, \qquad c_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi k}{2n}\right)\,.$$