1) Calcular los siguientes límites

a) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1}$,

b) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos(6x))}{\log(\cos(3x))}$,

c) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$,

d) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ con $a, b, c > 0$,

e) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} x \operatorname{sen}(a/x)$,

f) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos x - 2\log(1+x)}{x^2}$.

2) Encontrar el error al aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-x^2-8x+7}{x^3-3x^2+4} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2-2x-8}{3x^2-6x} = \lim_{x\to 2} \frac{6x-2}{6x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{6}{6} = 1\,.$$

Hallar el valor correcto de este límite.

3) El volumen $v = v(T)$ de 1 gramo de agua (en cm^3) se expresa como función de la temperatura T por la siguiente fórmula (aproximada) obtenida experimentalmente:

$$v(T) = 1 + 8.38 \cdot 10^{-6}(T-4)^2.$$

¿A qué temperatura este volumen será mínimo? ¿Cuál es ese volumen mínimo? Usando el método de Newton calcular aproximadamente la temperatura a la que el volumen es de 1.001 cm^3.

4) El movimiento de cierto punto por una recta está descrito por la siguiente dependencia entre su posición x y el tiempo $t \geq 0$:

$$x = at^2 + bt + c \quad \text{con} \quad a > 0\,.$$

¿Qué se puede decir de su aceleración? ¿Para qué tiempos t en un intervalo $[0, T]$ se alcanzan la velocidad mínima y máxima? ¿Cuál es la velocidad media en ese intervalo? ¿Para qué valor de t se alcanza la velocidad media?

5) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, de concavidad y convexidad de las siguientes funciones

a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$,

b) $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ con p, q, $r \in \mathbb{R}$,

c) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(100x) - x$.

6) Queremos construir un cercado rectangular de 20 metros cuadrados pegado a la pared de una granja (luego no es necesario construir uno de los lados). ¿Cuántos metros de cercado debemos construir como mínimo? En ese caso, ¿cuál es la relación entre los lados?

7) Dibujar la gráfica de las siguientes funciones

a) $f(x) = e^{1/x}$,
b) $f(x) = x\log(x)$,
c) $f(x) = x + 1 - 1/x - 1/x^2$,
d) $f(x) = 2\operatorname{sen} x + (\operatorname{sen} x)^2$.

Para ello buscar los intervalos de definición, continuidad y derivabilidad de las funciones. Calcular y utilizar f' y f'' para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad, extremos locales (también llamados relativos) y puntos de inflexión.

8) Desde nuestro puesto de controlador en un aeropuerto vemos en la pantalla del radar que un avión está siguiendo la trayectoria dada por la ecuación $y = 2 - x^{2/3}$, con $x \geq 0$. Si el aeropuerto está en el punto $(0, 0)$, ¿cuál es la distancia mínima a la que ha pasado el avión? Utilizar el método de Newton para aproximar la solución.

9) Dadas las funciones

a) $f(x) = 4x + x^{\frac{7}{5}}$,
b) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x > 0 \\ -x^2 + 2x + 1 & \text{si} \quad x < 0, \end{cases}$
c) $f(x) = \dfrac{|x|}{e^{|x-1|}}$,

se pide su dominio, los límites en los extremos de los intervalos de su dominio, puntos de intersección con los ejes, intervalos de crecimiento/decrecimiento, máximos y mínimos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión, recorrido. Con la infomación obtenida dibujar la gráfica.

10) El número de individuos de una población (en miles) viene dado por

$$N(t) = 1 + (3 - t)^2 e^{-t}, \text{ con } t \geq 0, \qquad t = \text{ tiempo que transcurre (en años).}$$

¿Cuándo la población alcanza su valor máximo? ¿Cuál será la población a largo plazo? ¿Cuál es la velocidad máxima de crecimiento de la población?

11) Calcular aproximadamente, usando el método de Newton, la mayor solución de cada ecuación en el intervalo indicado:
a) $x^3 - 6x^2 - 15x + 1 = 0$, con $x \in \mathbb{R}$
b) $\cos x + x \operatorname{sen} x = 0$, con $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

12) Vamos a diseñar un programa de ordenador y antes de hacerlo calculamos de manera teórica su tiempo de ejecución, obteniendo

$$t = a^2n^2 + (n-a)n^3 + 80$$

donde t es el tiempo en milisegundos, n es el número de bits del dato de entrada y a es un parámetro que depende de cómo distribuyamos la carga de trabajo entre los diferentes procedimientos del programa.

a) Calcular a para que el programa sea lo más eficiente posible.

b) ¿Podemos conseguir que para datos iniciales grandes el tiempo de ejecución sea menor que n^4?

13) Dibujar de manera esquemática las siguientes funciones, teniendo en cuenta su dominio y las regiones de crecimiento y convexidad. A veces no es posible calcular de manera explícita los puntos de máximo o de inflexión; en esos casos, utilizar el Teorema de Bolzano para aproximarlos.

a) $f(x) = \dfrac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4}$ en el intervalo $[-5,5]$,

b) $f(x) = 2^x - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}$ en $x \geq 0$,

c) $f(x) = \cos(x^2)$ en $x \geq 0$.

14) Sabemos que el número de individuos de cierta población de bacterias $N = N(t)$ viene regido aproximadamente por la ecuación

$$N' = (3-2t)N^2e^N$$

para todo $t \geq 0$, y además $N(0) = 20$.

a) Calcular las zonas de crecimiento de N. ¿Cuándo la población es máxima?

b) Se sabe que N' y N convergen a ciertos valores cuando t tiende a infinito. ¿A qué valores?

c) Usa los datos anteriores para dibujar la gráfica de N.

15) Un escalador sube por una pared de pendiente 4 y en cierto instante lanza un pico para que le sirva de ayuda en la ascensión. Lo arroja con un ángulo α y a una velocidad de 5 metros por segundo.

a) Si $x(t)$ e $y(t)$ representan la distancias horizontal y vertical del pico con respecto al escalador, entonces

$$x'(t) = 5\cos\alpha, \quad x(0) = 0$$

$$y''(t) = -g = -9.8, \quad y'(0) = 5\,\mathrm{sen}\,\alpha, \quad y(0) = 0.$$

Calcular $x(t)$ e $y(t)$ hallando sus series de Taylor en $a = 0$.

b) Escribir y en función de x. ¿Con qué ángulo debería lanzarlo para llegar lo más lejos posible?

16) Queremos resolver la ecuación $3t - 4t^3 = 0.2$, con $0 < t < 1$.

a) Aproximar la solución con 2 iteraciones del método de Newton, comenzando en $t = 0$.

b) Usar el Teorema de Bolzano para comprobar que la aproximación del apartado anterior da al menos 4 cifras decimales de precisión.

c) Probar la identidad $3\operatorname{sen} x - 4(\operatorname{sen} x)^3 = \operatorname{sen} 3x$ calculando la serie de Taylor de $f(x) = 3\operatorname{sen} x - 4(\operatorname{sen} x)^3 - \operatorname{sen} 3x$ en $a = 0$ y observando que $f''(x) = -9f(x)$. Usar esa identidad y la calculadora para comparar la aproximación del apartado a) con la solución real.

17) Vamos en una piragua de 5.5 metros por un arroyo de anchura de 3 metros. Vemos que viene una curva de 90 grados, y que justo tras ella el arroyo se estrecha a 1 metro. Despreciando la anchura de la piragua, ¿lograremos pasar? Nótese que la mejor estrategia es ir pegados a la esquina interior y con los bordes de la piragua rozando la orilla opuesta.

18) Creemos que dos cantidades físicas, x e y, están relacionadas de manera lineal, es decir $y = ax + b$ para ciertas constantes a y b. Experimentalmente hemos obtenido 3 medidas diferentes para (x, y): $(2.2, 3.6)$, $(4.2, 7.9)$, $(5.0, 9.1)$. Para elegir a, b de forma que se adapten a esos datos, vamos a buscarlos de manera que minimizen la cantidad D, que es igual a la suma de los cuadrados de las distancias verticales de la recta a los puntos obtenidos experimentalmente. Para ello:

a) Consideramos D como función de b y hallamos su mínimo.

b) El mínimo del apartado anterior va a depender de a, luego podemos escribirlo como $M = M(a)$. Hallamos el mínimo de $M(a)$.

c) Los valores de a y b que buscábamos son los que nos han salido en los apartados anteriores. ¿Cuál es la recta obtenida?

19) Estamos diseñando un videojuego y queremos que un personaje vaya de una ciudad a otra parando antes de llegar en algún punto de la costa para pescar. Suponiendo que una ciudad está en el pixel $(30, 50)$ y otra en $(60, 80)$ y que la costa es la línea de píxeles $(2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ ¿cuál sería la trayectoria más corta a seguir por el personaje?

20) Al elaborar programas que involucren derivadas segundas se suelen aproximar éstas por

$$D(x, h) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \qquad \text{con } h \text{ pequeño.}$$

Suponiendo que f tiene el número de derivadas que sean necesarias para aplicar la regla de L'Hôpital, calcular

$$\lim_{h \to 0} D(x, h) \qquad \text{y} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{D(x, h) - f''(x)}{h}.$$

Explicar por qué estos resultados implican que la aproximación es buena cuando h es muy pequeño. Con ayuda de una calculadora hallar el error al aproximar $f''(3)$ por $D(3, 0.01)$ cuando $f(x) = x/\log x$.