1) Hallar una fórmula para la derivada segunda de la función inversa.

2) Se llama arco seno hiperbólico a la función inversa de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (e^x - e^{-x})/2$. Explicar por qué el arco seno hiperbólico es derivable en todo punto y comprobar que su derivada es $1/\sqrt{x^2+1}$.

3) Las funciones $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$ y $g(x) = \arccos x$ se definen en $(0,1)$ como las inversas de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, respectivamente, restringidas a $(0, \pi/2)$.
a) Comprobar que $f'(x) = -g'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.
b) Empleando que $f+g$ tiene derivada nula, hallar una relación entre $\operatorname{arc\,sen} x$ y $\arccos x$.

4) Hallar un $c \in (1, 22)$ tal que $\big(f(22) - f(1)\big)/(22-1) = f'(c)$ para $f(x) = x^3 + x$.

5) Sea f es una función dos veces derivable tal que la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos tres soluciones en un intervalo $[a, b]$.
a) Usando el teorema de Rolle, probar que existe un $c \in (a, b)$ tal que $f''(c) = 0$.
b) Generalizar este hecho a una función n veces derivable con $n+1$ soluciones de $f(x) = 0$.

6) Explicar con detalle cómo se deduce del teorema del valor medio que dos funciones cuyas derivadas coinciden en todo un intervalo, difieren en una constante en dicho intervalo.

7) En Cosmología el estado del Universo se representa por un factor de expansión $C = C(t)$ no negativo que en el instante inicial $t = 0$ (el *big-bang*) cumple $C(0) = 0$. En el tiempo actual $t = T_a$ (la edad del Universo) toma un valor indeterminado, sin embargo es posible aproximar experimentalmente el valor de $H_0 = C'(T_a)/C(T_a)$, llamado constante de Hubble, dividiendo velocidades y distancias de galaxias lejanas. Además, según el "modelo plano", C debe satisfacer $\big(C(C')^2\big)' = 0$.
a) Deducir que $\sqrt{C}C'$ es igual a una constante K y que $\frac{2}{3}\big(C(t)\big)^{3/2} = Kt$.
b) Dividiendo las ecuaciones del apartado anterior encontrar una relación entre H_0 y T_a, y deducir la edad del Universo T_a en años a partir del valor a veces aceptado $H_0 = 2.5 \cdot 10^{-18} s^{-1}$.

8) Calcula el número exacto de soluciones $x \in \mathbb{R}$ de las siguientes ecuaciones usando los Teoremas de Bolzano y de Rolle:

a) $2x - 1 = \operatorname{sen} x$ *b)* $2x^3 + ax = a$, con $a > 0$ *c)* $x = \arctan x$
d) $x^2 + 2.5 = 4^x$ *e)* $x^5 - 5x - 3 = 0$ *f)* $(x+2)^{1/4} - x^{1/4} = 1$.

Indicación: Por el teorema de Rolle si f' no se anula en un intervalo, entonces $f(x) = 0$ no puede tener dos soluciones en dicho intervalo.

9) Hallar los polinomios de Taylor de grados 1 y 2 para $f(x)=\sqrt{x}$ en $a=16$ y estimar sin calculadora el error cometido al utilizarlos como aproximación de $\sqrt{16.2}$. Comprobar después con ayuda de una calculadora la precisión de dicha estimación. Con una estrategia similar encontrar también aproximaciones sencillas de e y de $\log 0.8$.

10) Hallar los polinomios de Taylor de grado 3 en $a=0$ para las siguientes funciones

$$a)\ f(x)=\log(1+\operatorname{sen} x),\qquad b)\ f(x)=\frac{1}{3+e^x},\qquad c)\ f(x)=\operatorname{sen}\big(\frac{x}{1+x}\big).$$

11) ¿Para qué valores de x convergen las series de Taylor (en $a=0$) de las funciones $f(x)=1/(1-x)$ y $g(x)=1/(1-x^2)$?

12) Obtener la serie de Taylor de $f(x)=(x^2-3x)e^{x^4}$ en $a=0$ a partir de la de e^x y utilizarla para hallar $f^{(5)}(0)$ y $f^{(10)}(0)$.

13) Hallar las series de Taylor en $a=0$ para las siguientes funciones, indicando dónde convergen

$$a)\ f(x)=x\log(1+x^2),\qquad b)\ f(x)=x^2\operatorname{sen}(x^3),\qquad c)\ f(x)=\begin{cases}\frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}.$$

14) Queremos construir una lente maciza que dirija los rayos de luz que salgan del punto $(0,0)$ al punto $(0,1)$. Haciéndola de cierto cristal, una lente perfecta vendría dada por la curva

$$\sqrt{x^2+y^2}+3\sqrt{x^2+(1-y)^2}=2.$$

Esta curva define y como función de x, con $y(x)>0$. Es complicado construir una lente así, y por eso elegimos aproximar $y(x)$ por su polinomio de Taylor de grado 2 en el punto $a=0$. Calcular dicho polinomio y dibujar su gráfica. *Indicación*: Para el cálculo de $y'(0)$ y de $y''(0)$ derivar la ecuación de partida.

15) Muchas veces en informática (por ejemplo en representaciones gráficas) sólo se conoce una tabla de unos pocos valores de una función f y se quieren aproximar otros valores. Hay varios métodos con este propósito (como las curvas de Bézier o los splines cúbicos). La interpolación cuadrática sugiere que si conocemos $f(a)$, $f\big((a+b)/2\big)$ y $f(b)$ entonces $f(x)$ con $x\in[a,b]$ se debería aproximar por

$$L\big(\frac{2x-a-b}{b-a}\big)\qquad \text{donde}\qquad L(x)=\frac{f(a)}{2}(x^2-x)+\frac{f(b)}{2}(x^2+x)+f\big(\frac{a+b}{2}\big)(1-x^2).$$

a) Con ayuda de una calculadora aproximar de esta forma $\log 8.3$ suponiendo conocidos $\log 7$, $\log 8$ y $\log 9$.

b) Suponiendo que el valor absoluto del error E en la aproximación es máximo para cierto $c \in (a, b)$, consideremos la función

$$F(x) = E(x) - E(c)\frac{(x-a)(x-(a+b)/2)(x-b)}{(c-a)(c-(a+b)/2)(c-b)} \qquad \text{donde} \qquad E(x) = f(x) - L\Big(\frac{2x-a-b}{b-a}\Big).$$

Comprobar que F se anula en a, b, c y $(a+b)/2$. Deducir de un problema anterior que $F'''(d) = 0$ para cierto $d \in (a, b)$ y, usando $E'''(x) = f'''(x)$, concluir finalmente

$$E(c) = \frac{f'''(d)}{6}(c-a)(c-(a+b)/2)(c-b).$$

En definitiva, la aproximación es buena siempre que los puntos no estén alejados y la derivada tercera no sea muy grande.

16) Según la Mecánica Cuántica la probabilidad de de detectar un electrón a distancia x del núcleo en un átomo de hidrógeno es proporcional a $\psi^2(x)$, con $\psi(x) = e^{-\alpha x}g(x)/x$ donde $\alpha > 0$ es un parámetro relacionado con la energía y g es una función con $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ que satisface la ecuación

$$\frac{d^2g}{dx^2} - 2\alpha\frac{dg}{dx} + \frac{2}{x}g = 0.$$

a) Demostrar que los coeficientes a_n de la serie de Taylor de g en cero responden a la recurrencia

$$a_{n+1} = \frac{2(\alpha n - 1)}{n(n+1)}a_n, \qquad a_1 = 1$$

y comprobar que dicha serie converge para todo x. *Indicación*: Escribir $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ y sustituir en la ecuación suponiendo que se puede derivar término a término..

b) Demostrar que para $\alpha = 1, 1/2, 1/3\dots$ $g(x)$ es un polinomio, y que para otros valores de α esto no ocurre.

c) Calcular $g(x)$ para $\alpha = 1$, $\alpha = 1/2$ y $\alpha = 1/3$. En cada caso, decidir si es más probable encontrar el electrón a una distancia de 3 o de 4 unidades del núcleo.