1) Usando la definición de derivada comprobar que las funciones $f(x) = 1/(x^2|x|+1)$ y $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ verifican $f'(0) = g'(0) = 0$. Comprobar que $h(x) = x\operatorname{sen}(1/x)$ no es derivable en cero.

2) ¿En qué punto corta al eje X la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en $x = x_0$?

3) Supongamos que $|f(x)| \le x^2$ en cierto intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$. Utilizar la definición de derivada para calcular $f'(0)$.

4) Si $f'(x^2)$ y la derivada de $f(x^2)$ coinciden en $x = a \neq 0$, ¿qué puede decirse de $f'(a^2)$?

5) Calcular las derivadas de las funciones

a) $f(x) = \operatorname{sen}\big(x + \dfrac{\cos x}{x}\big)$, *b)* $f(x) = \log\big(e^{5x}+1\big)$, *c)* $f(x) = (x+2^x)e^x$,

d) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{100-x^2}}$, *e)* $f(x) = \dfrac{x\log x}{e^x + \operatorname{sen}^2 x}$, *f)* $f(x) = \dfrac{x+2\cos x}{\sqrt{2+x(4+x^4)}}$,

g) $f(x) = \dfrac{2^x(4x^2-1)}{(5x+4)^2}$, *h)* $f(x) = e^{\left(e^{1/x}+1\right)^2}$, *i)* $f(x) = \dfrac{e^{x/2}}{(3+\operatorname{sen}(0.7x))\log x}$.

6) Calcular las rectas tangentes a las gráficas de las siguientes funciones en el punto que se indica

a) $f(x) = \log(e + \operatorname{sen} x)$ en $x = 0$, *b)* $f(x) = x^{x^2-x+1}$ en $x = 1$,

c) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$ en $x = \pi/6$, *d)* $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ en $x = 2$.

7) Algunos autobuses interurbanos tienen una palanca a la derecha del volante llamada freno electromagnético que cuando se activa hace que unos electroimanes ligados a las ruedas ejerzan una fuerza opuesta al movimiento proporcional a la velocidad que lleva el vehículo.

Supongamos que un autobús de 10 toneladas baja un puerto con una pendiente del 10 % a una velocidad de $30m/s$ (esto son $108km/h$) y en cierto momento $t = 0$ se queda sin frenos por lo que el conductor activa el freno electromagnético, que produce una fuerza de 2500 veces la velocidad del vehículo.

a) Las leyes de la mecánica aseguran $F = ma$ y que la aceleración debida a la gravedad es aproximadamente $9.8\operatorname{sen}(0.1) \approx 0.98$, por lo que

$$10000 \cdot 0.98 - 2500\frac{dx}{dt} = 10000\frac{d^2x}{dt^2}$$

donde $x(t)$ son los metros recorridos por el vehículo. Al cabo de un tiempo frenando se llega esencialmente a que la velocidad del autobús es constante, es decir $x'(t) = c$. ¿Cuál es esa constante?

b) Se sabe que la solución es de la forma $x(t) = At + B(1 - e^{Ct})$. Calcula las constantes A, B y C. *Indicación*: usar la condición inicial $x'(0) = 30$ y la ecuación.

c) Desde que empieza a frenar, al autobús le quedan $82m$ hasta una curva muy cerrada. Para tomarla sin salirse debería llegar a ella a menos de $14m/s$ (unos $50km/h$). ¿Lo conseguirá?

8) La fórmula

$$f'(x) = f(x)\big(\log f(x)\big)'$$

se llama *derivación logarítmica* y se dice que L. Euler (matemático del siglo XVIII) lo consideraba su truco favorito. Su fuerza para calcular $f'(x)$ se muestra sólo en los casos en que se pueden aplicar las propiedades de los logaritmos: $\log(a+b) = \log a + \log b$, $\log a^b = b \log a$.

a) Usar la derivación logarítmica para hallar las derivadas de

$$f(x) = (x^2+1)^7(e^x+1)(\cos x + \operatorname{sen} x) \qquad \text{y} \qquad g(x) = (x^2+1)^{x^2+1}.$$

b) Escribir una regla para derivar un producto de funciones $f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)$.

9) Recuérdese que $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

a) Demostrar que $1/\cos^2 x$ es la derivada de $\tan x$.

b) La función $\operatorname{arc\,sen} x$ es la inversa de $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow (-1, 1)$. Deducir derivando $(f \circ f^{-1})(x) = x$ que $1/\sqrt{1-x^2}$ es la derivada de $\operatorname{arc\,sen} x$.

10) ¿Qué se obtiene al derivar tres veces $f(x)g(x)$?

11) Se está inflando un globo, que suponemos de forma esférica, con una bomba de aire a un ritmo de 20 centilitros por segundo. ¿A qué ritmo cambia el radio del globo en el instante en que el globo contiene 1 litro de aire? (Recuérdese que el volumen de una esfera de radio R es $(4/3)\pi R^3$). Intentar explicar también por qué la derivada del volumen es el área de la superficie esférica, $4\pi R^2$.

12) En muchas fórmulas de ingeniería aparecen derivadas. A la hora de programar, la derivada de f se suele aproximar por

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \qquad \text{en vez de por} \qquad \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

con h pequeño.

a) Comprobar que la primera aproximación es exacta para polinomios de grado 2 mientras que la segunda no lo es.

b) Escogiendo una función f complicada, como $f(x) = \cos\big((x+1)\operatorname{sen} x\big)$, y un punto x_0 que no sea exacto, como $x_0 = \sqrt{2}$. Dando valores con una calculadora comprobar que la primera aproximación para $f'(x_0)$ es típicamente mejor que la segunda para h pequeño.

c) Encontrar f y x_0 tales que f no es derivable en x_0 pero sí existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}.$$

Así la aproximación permite ampliar la definición de derivada. *Indicación*: Intentar que el numerador sea pequeño en comparación con $f(x_0+h)-f(x_0)$.

13) Dada una función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ y $x_1\in\mathbb{R}$, sea x_2 la intersección con el eje X de la recta tangente en $x=x_1$ a la gráfica de f, x_3 la intersección de la tangente en $x=x_2$ y así sucesivamente.

a) Escribir la fórmula que da x_{n+1} en función de x_n.

b) Comprobar que para $f(x)=x^2-t$ se tiene $x_{n+1}=\frac{1}{2}\big(x_n+\frac{t}{x_n}\big)$ que apareció en un problema anterior para aproximar $\sqrt{t}$.

c) Explicar geométricamente por qué es lógico que bajo condiciones adecuadas la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converja a una solución de $f(x)=0$.

Nota: Este método para resolver $f(x)=0$ se llama *método de Newton* y suele ser más rápido que el de bisección.

14) La fórmula $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^m=(x^{m+1}-1)/(x-1)$ es bien conocida y se prueba por inducción o simplemente multiplicando por $x-1$.

a) Derivando, utilizarla para calcular $1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+15\cdot 2^{15}$.

b) ¿Cómo calcular $1^2\cdot 2^1+2^2\cdot 2^2+3^2\cdot 2^3+\cdots+15^2\cdot 2^{15}$?

15) Como parte de un videojuego, se quiere simular el aterrizaje de un avión. Para hacer que el programa sea eficiente se elige que la trayectoria del avión en pantalla venga descrita por un polinomio de grado 3, es decir $y=p(x)$, con $p(x)$ dicho polinomio y (x,y) el punto con distancia horizontal x y distancia vertical y a la esquina inferior izquierda de la pantalla.

a) Queremos que el inicio del aterrizaje sea el punto $(2,4)$ y el final en $(5,1)$, y además que las tangentes a las trayectorias en esos dos puntos sean horizontales. ¿Qué polinomio debemos elegir para obtener ese resultado? *Indicación*: Escribir $p(x)=3f\big(\frac{x-2}{3}\big)+1$ donde f es un polinomio cúbico.

b) Deseamos que nuestro programa sea muy realista: vamos a hacer que el avión se mueva por la trayectoria obtenida en a) con velocidad horizontal constante $x'(t)=V$ y que la aceleración vertical cumpla $y''(t)\leq 96$. ¿Cuánto puede valer V a lo más para que esto ocurra?

Nota: La idea de este problema tiene que ver con técnicas de *splines*, empleadas en la práctica en muchos contextos tales como escalado de una fotografías digitales, animación y sombreado de imágenes 3D.