1) Encontrar funciones continuas f, g y h con las siguientes propiedades:
a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$ es biyectiva.
b) $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ es inyectiva.
c) $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica que la imagen de $(-1,1)$ por h es $[-1,1]$.

2) Decidir si es posible definir las siguientes funciones fuera de los valores que se indican para que sean funciones continuas en todo $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2}$ si $0 < x < 1$,

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x \operatorname{sen} x)}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ \cos x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

c) $f(x) = (\operatorname{sen} x)\big(\operatorname{sen} \dfrac{1}{x-\pi}\big)$ si $x < \pi$,

d) $f(x) = e^{-1/(x-2x^2)}$ si $0 < x < 1/2$,

e) $f(x) = \cos \dfrac{x^2-1}{|x^2-1|}$ si $x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$,

f) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x^2-4} & \text{si } x > 2 \\ x+2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

3) Empleando el método de la bisección hallar una aproximación de la solución de la ecuación $xe^x + 2e^x = 1$ con dos cifras decimales correctas.

4) Probar que al calentar un aro siempre existen dos puntos diametralmente opuestos a la misma temperatura. *Indicación*: Considérese $f(\alpha) = T(\alpha) - T(\alpha+\pi)$ donde $T(\alpha)$ es la temperatura en función del ángulo en radianes. ¿Qué relación hay entre $f(\alpha)$ y $f(\alpha+\pi)$?

5) Para este problema es necesario conocer que la gráfica se $f(x) = \operatorname{sen} x$ es cóncava (curvada hacia arriba) en $[0,\pi]$ y convexa (curvada hacia abajo) en $[\pi, 2\pi]$.
a) Hallar el número de soluciones de la ecuación $10 \operatorname{sen} x = x$ y obtener una aproximación con al menos una cifra decimal de una solución en $(8,\infty)$.
b) Dado $N \in \mathbb{Z}^+$ arbitrario hallar el número de soluciones de $N \operatorname{sen}(2\pi x) = x$.

6) Si $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es continua probar que existe al menos un valor $x_0 \in [0,1]$ que queda fijo, es decir, tal que $f(x_0) = x_0$.

7) La implementación más simple del método de la bisección para resolver $f(x) = 0$ corresponde a iterar cierto número `N` de veces el siguiente código

```
med = (ext1+ext2)/2.0;
if( f(ext1)*f(med)<=0 ) ext2 = med;
else ext1 = med;
```

donde `ext1` y `ext2` son los extremos del intervalo y `med` se acercará a la solución buscada. Supondremos, como ocurre en la práctica para funciones mínimamente complicadas, que todo el tiempo del algoritmo radica en las dos evaluaciones de f en cada paso.

a) Explicar en pocas palabras porqué el código anterior corresponde al método de la bisección.

b) Si inicialmente `ext1` $= 0$ y `ext2` $= 1$ (esto es, $f(0)$ y $f(1)$ tienen signos distintos) y cada evaluación de f requiere 5 ms (milisegundos), estimar el `N` mínimo y el tiempo de ejecución para asegurar que la diferencia entre `med` y la solución exacta es menor que 10^{-12}.

c) ¿Es posible mejorar el algoritmo para que sólo sea necesaria una evaluación por paso y por tanto la mitad de tiempo?

8) Hallar dos funciones discontinuas tales que su suma sea continua y no constante. Hallar también dos funciones discontinuas tales que su producto sea continuo. ¿Es posible resolver los dos apartados anteriores con el mismo par de funciones?

9) Hallar cuántas funciones continuas $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cumplen $(f(x))^2 = x^2$ justificando la respuesta con rigor.

10) Consideremos un juego en que una persona piensa un número entre 1 y 1024 que su oponente debe adivinar. A cada intento incorrecto el primer jugador sólo puede responder si es mayor o menor.

a) Adaptar el método de la bisección para elaborar un algoritmo que permita adivinar el número tras a lo más 10 intentos incorrectos.

b) Probar que es imposible encontrar un algoritmo mejor, en el sentido de que el número máximo de fallos sea menor. *Indicación*: Las formas de elegir una tira de k signos de desigualdad es 2^k porque hay dos posibilidades para uno de ellos mientras que por otro lado $\sum_{k=0}^{9} 2^k < 1024$.