1) Estudiar si los términos generales que se indican dan lugar a sucesiones convergentes y en caso afirmativo hallar su límite.

$a)\ a_n = \dfrac{3n^4-2}{n^4+2n^2+2},\qquad b)\ a_n = \sqrt{n^2+1}-n,\qquad c)\ a_n = n\sqrt{n^2+1}-n^2,$

$d)\ a_n = \dfrac{4^n}{5^n+6^n},\qquad e)\ a_n = \dfrac{6^n}{5^n+(-6)^n},\qquad f)\ a_n = \dfrac{\sqrt{2n^6+1}-1}{n^3+n^2+1}.$

2) Dar en cada apartado un ejemplo de una sucesión que tenga las propiedades que se afirman o explicar por qué no es posible construirla.
a) $|a_n|$ es monótona y acotada y a_n no converge.
b) b_{n+1}/b_n converge pero b_n no converge.
c) c_n es monótona y positiva pero $c_n/(2+c_n)$ no converge.
d) $d_n^2-2d_n$ converge pero d_n no converge.

3) Consideremos la sucesión $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$ con $a_1=1$.
a) Probar por inducción que $a_n<2$.
b) Justificar que a_n es monótona creciente y hallar su límite.
c) Una forma alternativa de resolver los apartados anteriores es calcular una fórmula exacta para a_n. Intentar hallarla.

4) El ejercicio anterior da sentido a la expresión $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\dots}}}$ que formalmente es el resultado de iterar indefinidamente la sucesión allí indicada y por tanto se le debe asignar el valor de su límite.

Construyendo sucesiones convergentes adecuadas hallar el valor que habría que asignar a las expresiones

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}\qquad \text{y}\qquad \sqrt[3]{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}+\dots}}}$$

y comprobar con una calculadora que el resultado es coherente con tomar unos cuantos términos de ellas.

5) Sean a_n y b_n dos sucesiones acotadas superiormente y A y B sus respectivos supremos. Consideremos también $c_n=a_n+b_n$ y llamemos C a su supremo.
a) ¿Se cumple siempre $A+B\ge C$?
b) ¿Se cumple $A+B=C$ si a_n y b_n son crecientes?
c) ¿Se cumple siempre $A+B=C$?

6) Fijado $1 < t \le 4$ consideramos la sucesión recurrente dada por $x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{t}{x_n}\big)$ con $x_1 = 2$.

a) Probar que esta sucesión está acotada inferiormente por $\sqrt{t}$ y superiormente por 2. *Indicación*: $(a+b)^2 \ge 4ab$ para $a, b \ge 0$.

b) Demostrar que es monótona decreciente.

c) Deducir que $\lim x_n = \sqrt{t}$.

7) Los procesadores por sí mismos hacen sólo operaciones muy básicas y todas las funciones matemáticas radican en algoritmos. Aquí analizaremos la aproximación de raíces cuadradas mediante el ejercicio anterior.

a) Utilizando $\sqrt{a2^{2n}} = 2^n\sqrt{a}$ y recordando que los ordenadores trabajan en base 2, explicar por qué un algoritmo para raíces cuadradas de números en $(1, 4]$ se extiende fácilmente a $\mathbb{R}^+$.

b) Probar que la sucesión del ejercicio anterior cumple $x_{n+1} - \sqrt{t} \le \frac{1}{2}\big(x_n - \sqrt{t}\big)$ y por tanto si x_n aproxima $\sqrt{t}$ con k bits de precisión entonces x_{n+1} lo aproxima con al menos $k+1$.

c) Escogiendo valores concretos de t y unos pocos x_n comprobar que la convergencia es muchísimo más rápida de lo que afirma el apartado anterior.

8) Utilizando la relación $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ dar una fórmula exacta sencilla para las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ y utilizarla para averiguar a qué valor converge esta serie.

9) Consideremos la serie geométrica $S = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$. ¿Para qué valores de x converge? Deducir para ellos que $S = x/(1-x)$ usando la relación $S_{n+1} = xS_n + x$ entre las sumas parciales.

10) Decidir si las siguiente afirmaciones son verdaderas, dando una pequeña explicación, o falsas, dando un contrejemplo.

a) Si $a_n > 0$ y $\sum a_n$ converge entonces $\sum a_n^2$ converge.

b) Si $a_n > 0$ y $\sum a_n$ converge entonces $\sum \frac{1}{a_n}$ no converge.

c) Si $\lim a_n = 0$ entonces $\sum (-1)^n a_n$ converge.

d) Si $a_n > 0$ y a_n es monótona y no está acotada entonces $\sum a_n^{-n}$ converge.

e) Si $a_n > 0$ entonces $\sum \big(\frac{a_n}{2a_n+1}\big)^n$ converge.

11) Estudiar si las series siguientes son convergentes. Los sumatorios se sobreentienden sobre $n \ge 1$.

$$a)\ \sum \frac{n^2+1}{n2^n}, \qquad b)\ \sum \frac{2^{\sqrt{n}}}{n^n}, \qquad c)\ \sum (-1)^n \frac{n^2+n-6}{n^4+1}, \qquad d)\ \sum \frac{n^2-6}{n^3+1},$$

$$e)\ \sum \big(\sqrt{n^4+1} - n^2\big), \qquad f)\ \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \qquad g)\ \sum \big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big)^2, \qquad h)\ \sum \frac{n!}{n^n}.$$

12) La sucesión de Fibonacci está definida por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ con $F_1 = F_2 = 1$.

a) Estudiar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} F_{2n}^{-1/2010}$ converge.

b) Sabiendo que $a_n = F_{n+1}/F_n$ es una sucesión convergente hallar su límite. *Indicación*: ¿Qué relación hay entre a_n y a_{n+1}?

Nota: La convergencia de a_n se sigue de que tanto a_{2n} como a_{2n+1} son sucesiones monótonas y acotadas.

13) Estudiar para qué valores del parámetro α son convergentes las siguientes series:

$$a)\ \sum \frac{e^{\alpha n}}{n^2+1}, \qquad b)\ \sum \big(\sqrt{n^{2\alpha}+2}-n^{\alpha}\big), \qquad c)\ \sum \binom{2n+1}{n+1}^{\alpha},$$

$$d)\ \sum \big(1-\frac{\alpha}{n}\big)^{n^2}, \qquad e)\ \sum \big(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\big)^{\alpha}, \qquad f)\ \sum \frac{3^{\alpha n}+n^{-\alpha}}{2^{\alpha n}+n\log^2 n}.$$

14) Muchos problemas de ingeniería tienen soluciones dadas por series y hay varios métodos que permiten "acelerar" su convergencia para economizar tiempo de computación. En este problema veremos uno de los más sencillos que se aplica a series alternadas $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ con $\lim a_n = 0$ y $a_n > 0$ decreciente (el criterio de Leibniz asegura la convergencia).

a) Probar que

$$S = -\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}A \qquad \text{con} \qquad A = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(a_n - a_{n+1}).$$

¿Qué relación hay entre las sumas parciales de S y A?

b) Calcular la serie "acelerada" A en el caso $a_n = 1/n$ y también la serie "doblemente acelerada" $\widetilde{A}$ (la acelerada de A).

c) Sabiendo que $S = -\log 2 = 0{,}69314718\dots$ para $a_n = 1/n$ calcular con ayuda de un pequeño programa (o con menos valores) el error cometido al aproximar este valor cuando se toman en la serie original 10, 20 y 100 términos, y repetir los mismos cálculos usando A y $\widetilde{A}$.

15) Es conocido que si el criterio del cociente no es concluyente para una serie porque el límite da 1, entonces tampoco puede serlo el de la raíz. Dando esto por conocido, deducir el valor de $\lim \sqrt[n]{n!}/n$ estudiando la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha n)^{-n} n!$ para $\alpha > 0$.

16) Numerosos algoritmos tienen una estructura llamada "divide y vencerás" que consiste en que una entrada de n bits se divide en k trozos y después de unas cuantas manipulaciones sencillas se llama al algoritmo v veces. Por ello es habitual que el tiempo máximo que tarda el algoritmo sea una sucesión creciente t_n que satisface

$$t_n = v t_{\lceil n/k \rceil} + \epsilon_n$$

donde ϵ_n es el tiempo de las manipulaciones sencillas y $\lceil n/k \rceil$ es el entero más cercano por arriba a n/k (la longitud máxima de cada trozo).

a) Supongamos que $0 \leq \epsilon_n \leq Cn$ para cierta constante C. Probar que

$$t_{k^m} \leq t_1 v^m + Cv^m \Big(\frac{k}{v} + \big(\frac{k}{v}\big)^2 + \cdots + \big(\frac{k}{v}\big)^m \Big).$$

b) Deducir que fijados $v > k$ y t_1, la sucesión $n^{-\alpha} t_n$ con $\alpha = \frac{\log v}{\log k}$ está acotada. *Indicación*: Por ser creciente, $t_{k^m} \leq t_n < t_{k^{m+1}}$ si $k^m \leq n < k^{m+1}$, entonces $n^{-\alpha} t_n \leq k^{-\alpha m} t_{k^{m+1}}$.

17) Para un ordenador sumar dos números de n bits con n grande requiere un tiempo proporcional a n pero multiplicarlos es más costoso. El método más simple, como el que usamos a mano, necesitaría un tiempo proporcional a n^2 y fue reducido por primera vez por el estudiante ruso (y después eminente matemático recientemente fallecido) A.A. Karatsuba.

a) Dos números x e y de $2n$ bits se escriben como $x = 2^n a + b$, $y = 2^n c + d$ con $0 \leq a, b, c, d < 2^n$ simplemente separando la mitad de los bits (cifras). Comprobar que

$$xy = 2^{2n} L + 2^n M + N$$

con $L = ac$, $N = bd$ y $M = (a+b)(c+d) - (L+N)$.

b) Deducir que calcular xy requiere tres multiplicaciones de números de n bits y algunas sumas (multiplicar por 2^k es inmediato para el ordenador como para nosotros multiplicar por la unidad seguida de ceros). Por tanto el tiempo t_n que se tarda en multplicar dos números de n bits verifica $t_n = 3t_{\lceil n/2 \rceil} + Cn$ para cierta constante C.

c) Concluir usando el ejercicio anterior que se pueden multiplicar dos números de n bits en a lo más Kn^α segundos con $\alpha = \frac{\log 3}{\log 2} = 1{,}5849\ldots$ y K una constante que depende de la velocidad del procesador.

Nota: Actualmente se conocen métodos mucho mejores cuando n es enorme.

18) Consideramos la serie

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \ldots$$

a) Comprobar que para cualquier $x \in \mathbb{R}$ esta serie es convergente. Mas tarde en el curso demostraremos que converge a $\operatorname{sen} x$.

b) Suponiendo lo afirmado en el apartado anterior, probar que para $|x| \leq 1$

$$-\frac{x^7}{7!} \leq \operatorname{sen} x - \big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\big) \leq 0$$

y utilizarlo para aproximar $\operatorname{sen} 1$ con tres cifras decimales de precisión sin calculadora. *Indicación*: Agrupar los términos por parejas.