1) Indicar los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se satisfacen las siguientes desigualdades:

a) $|4x+3| \leq 1$,

b) $|x+1| \leq |x-1|$,

c) $|x^2-5x+6| < 2$,

d) $|x+1|+|x+3| < 5$,

e) $\dfrac{x-1}{(x+2)(x-3)} > 0$,

f) $\dfrac{x^2-2}{x^2-4} \leq 0$.

2) Escribir condiciones con desigualdades lo más sencillas posibles para decidir si dos intervalos $[a,b]$ y $[A,B]$ tienen puntos comunes. En ciertas interfaces gráficas de programación los rectángulos son estructuras (conjuntos de datos) $\{\mathtt{x},\mathtt{y},\mathtt{w},\mathtt{h}\}$ donde el punto $(\mathtt{x},\mathtt{y})$ es la esquina inferior izquierda, `w` la anchura y `h` la altura. Dar fórmulas matemáticas implementables en un ordenador que permitan saber si dos rectángulos tienen puntos comunes. Tales problemas son básicos para el estudio de colisiones en videojuegos.

3) Decidir si las siguientes desigualdades son válidas para los valores de x e y que se indican.

a) $|x-y| \leq |x|-|y|$ para todo $x,y \in \mathbb{R}$

b) $|x-y| \leq |x|+|y|$ para todo $x,y \in \mathbb{R}$

c) $|x-y|^2 \leq x+y$ para todo $x,y \in [0,1]$.

d) $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$ para todo $x,y \in \mathbb{R}^+$.

4) Demostrar por inducción las siguientes fórmulas:

a) $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$.

b) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\ldots+\dfrac{n}{2^n} = 2-\dfrac{n+2}{2^n}$.

d) *Desigualdad de Bernoulli:* $(1+x)^n \geq 1+nx$, para todo $x \geq -1$, $n \geq 1$.

5) Consideremos un programa de la forma

```
for(j = 0; j < N; ++j)
        for(i = 2*j-2; i < 6*j; ++i)
                calc(i,j);
```

que para cada $\mathtt{0} \leq \mathtt{j} < \mathtt{N}$ ejecuta la función `calc` para todos los valores $\mathtt{2}*\mathtt{j}-\mathtt{2} \leq \mathtt{i} < \mathtt{6}*\mathtt{j}$ donde `i` y `j` son enteros. Supongamos que esta función requiere 5 ms (milisegundos) mientras que las otras líneas de programa un tiempo despreciable.

a) Hallar el tiempo $\texttt{T(N)}$ que tarda el programa para algunos valores pequeños de $\texttt{N}$, conjeturar una fórmula sencilla para $\texttt{T(N)}$ y probarla por inducción.

b) Si sólo disponemos de 4 horas de cálculo en el laboratorio, ¿cuál es el máximo $\texttt{N}$ que se puede elegir?

6) Si partimos una tarta con un cuchillo dando tres cortes que no pasen por el mismo punto conseguimos un máximo de 7 trozos (desiguales). Buscar una fórmula para el número máximo de trozos al dar n cortes y probarla por inducción. *Indicación*: La fórmula es de segundo grado.

7) Indicar si los siguientes conjuntos están acotados inferior y superiormente y en su caso hallar el ínfimo y el supremo.

a) $\{x \in \mathbb{R} \,:\, x^4 < 9\}$,

b) $\{x \in \mathbb{R} \,:\, x^5 < 9\}$,

c) $\{x + x^{-1} \,:\, x \in \mathbb{R}^+\}$,

d) $\{(-1)^n - n^{-1} \,:\, n \in \mathbb{Z}^+\}$,

8) Si nos fijamos en el protagonista de nuestro videojuego favorito veremos que no pasa desde el reposo a la velocidad máxima $\texttt{V}$ sino que hay cierto periodo de aceleración para dar mayor realismo. Una forma sencilla y efectiva de programar este efecto es definir la velocidad en un instante como $\texttt{v} + \alpha(\texttt{V} - \texttt{v})$ donde $\texttt{v}$ es la velocidad en el instante anterior y $0 < \alpha < 1$.

a) Explicar por qué, partiendo del reposo, la velocidad está acotada superiormente por $\texttt{V}$.

b) ¿Para qué puede emplearse el parámetro α en la práctica? ¿Debe ser mayor en un juego de carreras de coches o al representar a un personaje corriendo?

9) Supongamos una subrutina $\texttt{F} = \texttt{F(x)}$ que termina el programa si $\texttt{x} > \texttt{1.999}$ y llama a $\texttt{F(1.0} + \texttt{x/2.0)}$ en otro caso. ¿Se colgará el programa al llamar a $\texttt{F(1.0)}$?