Cálculo I - Examen Final - 19 de enero de 2011

---

1) Consideramos la sucesión a_n definida por

$$a_{n+1} = 2a_n^2 - 1, \qquad a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

a) Demostrar que $-1 \leq a_n \leq 1$ para todo número natural n.
b) ¿Es a_n monótona?

2) Calcular

$$\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\,dx.$$

3) Calcular los límites siguientes

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\operatorname{sen}(1/x)}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos x)}{\operatorname{sen} x}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x(4x+3)} - 2x)$.

4) Esbozar la gráfica de la función $f(x) = x\log(x)$. Indicando, si los hubiera, extremos locales, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento y decrecimiento e intervalos de concavidad y convexidad.

5) Hallar qué valores reales debe tomar el parámetro α para que la siguiente serie converja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{\alpha n}+1}{2^{\alpha n}+2^{-\alpha n}}.$$
