Capítulo 10

Sucesiones y series de funciones

10.1. Introducción

La representación de funciones complicadas por medio de funciones sencillas es una de las ideas centrales del Análisis Matemático. En este capítulo vamos a precisar algunos de los posibles significados del término “representación”. Intuitivamente, se trata de “aproximar” funciones que se suponen muy generales por otras de un tipo especialmente sencillo. Por ejemplo, podemos aproximar localmente, en las proximidades de un punto, una función derivable por sus polinomios de Taylor calculados en dicho punto. Ya hemos visto que esta aproximación es de gran utilidad para calcular límites. Ahora queremos dar un paso más y nos interesamos por representaciones que sean válidas no sólo localmente, en las proximidades de un cierto punto, sino en todo un intervalo.

Hay muchas maneras de representar funciones complejas por medio de otras más simples, una de las más útiles es la representación por medio de series. Podemos describir este proceso en términos muy generales como sigue.

- Se considera una clase $\mathfrak{S}$ de “funciones simples”. Por ejemplo, $\mathfrak{S}$ puede ser la clase de las funciones polinómicas, o la clase de todos los polinomios trigonométricos que son las funciones de la forma $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\big(a_k\cos(kx)+b_k\operatorname{sen}(kx)\big)$ donde a_k, b_k son números reales.
- Para representar una función f por medio de funciones de la clase $\mathfrak{S}$ hay que asociar a dicha función una sucesión de funciones $\{f_n\}$ donde $f_n\in\mathfrak{S}$. Las funciones f_n suelen interpretarse como las “componentes elementales” de la función f. La forma de obtener las funciones componentes f_n de f viene dada en cada caso por un algoritmo matemá-

tico que, conocida la función f, permite calcular, al menos en teoría, las f_n. Esta parte del proceso de representación se suele llamar "análisis" porque consiste en analizar f descomponiéndola en sus componentes más simples. Esto es algo que se hace constantemente en todos los procesos de tratamiento de señales auditivas o gráficas.

Si, por ejemplo, queremos representar la función exponencial $f(x) = \mathrm{e}^x$ por medio de funciones polinómicas, entonces las funciones elementales son los polinomios de Taylor que, para la función exponencial viene dados por $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

- El último paso consiste en "recomponer" la función f mediante sus componentes elementales f_n. Para que este proceso sea útil las funciones componentes f_n deben estar determinadas de manera única por f y debe ser posible, mediante algún algoritmo matemático – que suele ser una serie o una integral –, recobrar la función f mediante sus componentes f_n. Por ejemplo, para el caso de la función exponencial sabemos (ver (9.13)) que para todo $x \in \mathbb{R}$ es:

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Con ello hemos representado una función trascendente, como es la exponencial, por medio de una serie de funciones polinómicas.

Volviendo a la situación general, lo que suele hacerse es tratar de recuperar la función f por "superposición" de sus componentes elementales f_n. El término "superponer" procede de la Física y en Matemáticas se traduce por "sumar". Por tanto, lo que queremos es expresar f como la suma de la serie definida por la sucesión de funciones $\{f_n\}$:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n.$$

Lo primero que debemos hacer es dar un sentido a esta igualdad. El sentido que va a tener para nosotros en este capítulo es que para cada valor de x en un cierto intervalo I se verifica que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x). \tag{10.1}$$

Esta igualdad sí sabes lo que significa: quiere decir que la serie de números reales $\sum f_n(x)$ converge y tiene como suma el número $f(x)$.

Puede que te estés preguntando ¿para qué sirve todo esto? Respuesta: para traducir problemas relativos a f en otros más sencillos relativos a sus funciones componentes f_n. Por ejemplo, si queremos obtener la solución de una ecuación diferencial en la que interviene una función f, podemos sustituir dicha función por f_n y resolver la ecuación diferencial correspondiente, y a partir de las soluciones obtenidas construir por superposición una función que esperamos que sea la solución buscada.

Una representación como la dada por (10.1) lleva a preguntarse por aquellas propiedades de las funciones f_n que se conservan y se transmiten de forma automática a la función representada f. Por ejemplo, si las funciones f_n son continuas o derivables ¿es también f continua o derivable?.

Para terminar esta introducción vamos a ver un ejemplo de aproximación de funciones que, en cierto sentido, es paradójico. Sea f_1 la función identidad en el intervalo $[0,1]$ cuya gráfica es la diagonal del cuadrado unidad (ver figura 10.1). Sea f_2 la función definida en $[0,1]$ cuya gráfica es el triángulo de vértices $(0,0), (\frac{1}{2},\frac{1}{2}), (1,0)$. La longitud de las gráficas de f_1 y f_2 es evidentemente la misma e igual a $\sqrt{2}$.

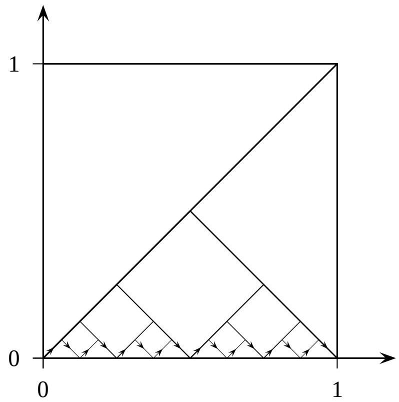


Figura 10.1. ¿Es $\sqrt{2}=1$?

Sea f_3 la función definida en $[0,1]$ cuya gráfica son los triángulos de vértices $(0,0), (\frac{1}{4},\frac{1}{4})$, $(\frac{1}{2},0)$ y $(\frac{1}{2},0), (\frac{3}{4},\frac{1}{4}), (1,0)$. La longitud de las gráficas de f_2 y f_3 es evidentemente la misma e igual a $\sqrt{2}$. Este proceso de ir dividiendo por la mitad los lados de los triángulos puede proseguirse indefinidamente y obtenemos una sucesión de funciones f_n tales que para todo $x\in[0,1]$ es $0\leqslant f_n(x)\leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$, y la longitud de la gráfica de f_n es igual a $\sqrt{2}$. Es evidente que las funciones f_n convergen a la función $f(x)=0$ cuya gráfica es el segmento de extremos $(0,0), (1,0)$ de longitud 1; ¿luego $\sqrt{2}=1$?.

En esta introducción del capítulo ya han salido algunas ideas que seguidamente vamos a presentar de manera formal.

10.2. Conceptos básicos

10.1 Definición. Una **sucesión de funciones** *es una aplicación* que a cada número natural n hace corresponder una función f_n. Usaremos el símbolo $\{f_n\}$ para representar la sucesión de funciones dada por $n\mapsto f_n$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

Supondremos en lo que sigue que las funciones f_n son funciones reales definidas en un intervalo I.

10.2 Ejemplos. Consideremos las sucesiones de funciones $\{f_n\}$, donde $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es la función definida en cada caso por:

$$a)\ f_n(x)=\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}},\ b)\ f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}},\ c)\ f_n(x)=nx(1-x)^n,\ d)\ f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

10.2.1. Convergencia puntual

10.3 Definición. Dado $x \in I$ se dice que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ **converge puntualmente** en x, si *la sucesión de números reales* $\{f_n(x)\}$ es convergente.

El conjunto C de todos los puntos $x \in I$ en los que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge puntualmente, se llama **campo de convergencia puntual**. Simbólicamente:

$$C = \{x \in I : \{f_n(x)\} \text{ converge}\}.$$

Supuesto que $C \neq \emptyset$, la función $f : C \to \mathbb{R}$ definida para todo $x \in C$ por:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \{f_n(x)\}$$

se llama **función límite puntual** de la sucesión $\{f_n\}$.

10.4 Observación. Para entender la definición de convergencia puntual y en general en todo este capítulo, es ***muy importante*** no confundir la *sucesión de funciones* $\{f_n\}$ con la *sucesión de números reales* $\{f_n(x)\}$ obtenida *evaluando las funciones* de dicha sucesión en un número $x \in I$. Tampoco debes olvidar que en una sucesión la variable es siempre $n \in \mathbb{N}$ y nunca $x \in I$. Así, la sucesión $\{f_n(x)\}$ es la aplicación que a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ (la variable) le asigna el número real $f_n(x)$ ***donde*** x ***está fijo***.

10.5 Ejemplo. Sea la sucesión de funciones $\{f_n\}$ donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ es la función definida para todo $x \in [0,1]$ por:

$$f_n(x) = nx(1-x)^n.$$

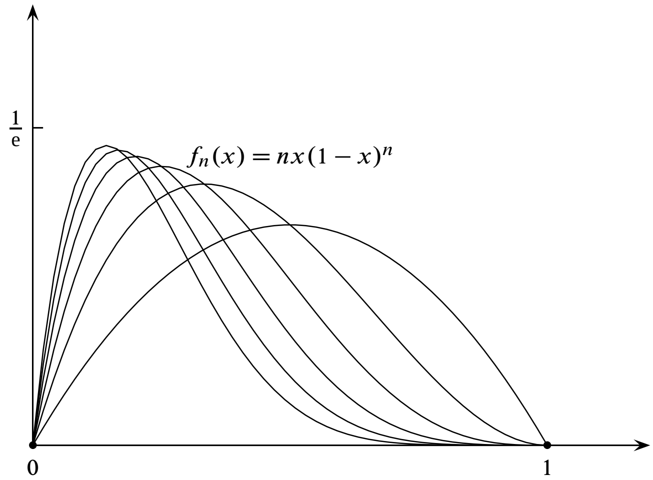
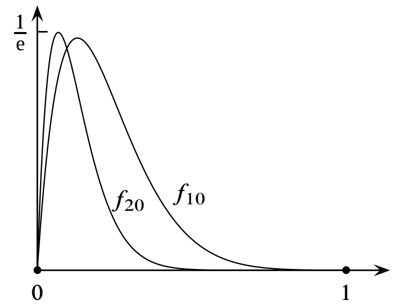


Figura 10.2. Convergencia puntual

Observa que si $x = 0$ o $x = 1$, la sucesión $\{f_n(0)\} = \{f_n(1)\} = \{0\}$ es, evidentemente, convergente a 0. Si $0 < x < 1$ entonces $0 < 1-x < 1$ y se verifica que $\{f_n(x)\} \to 0$ porque es una sucesión de la forma $\{n^p \lambda^n\}$ donde $|\lambda| < 1$. Deducimos que el campo de convergencia puntual de esta sucesión es el conjunto $C = [0,1]$ y la función límite puntual es la función idénticamente nula, $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$. Observa en la figura 10.2 las gráficas de las primeras seis funciones de esta sucesión.

Fíjate cómo por el extremo derecho del intervalo las gráficas se van pegando al eje de abscisas pero su comportamiento es muy diferente en el extremo izquierdo. Ello es así porque cuando $1 - x$ es pequeño (es decir, x está cerca de 1) la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge muy rápidamente a cero, pero cuando $1 - x$ está próximo a 1 (es decir, x está cerca de 0) la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge lentamente a cero.

Observa las gráficas de las funciones f_{10} y f_{20} en la figura de la derecha. ¿Te parece que estas funciones están *muy próximas* a la función límite puntual $f \equiv 0$? Observa que, aunque para cada $x \in [0,1]$ es $f(x) = \lim_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = 0$, la función f_n no se acerca mucho a la función límite puntual $f \equiv 0$.



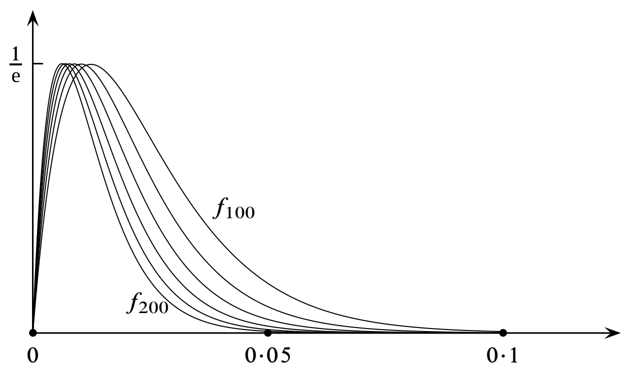
♦

Para evitar ambigüedades necesitamos precisar qué entendemos por *proximidad* entre dos funciones. Para ello, considera dos funciones $f,g : I \to \mathbb{R}$. Dichas funciones son iguales cuando $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$ o, lo que es igual, cuando $\max\{|f(x) - g(x)| : x \in I\} = 0$. En general, el número $\max\{|f(x) - g(x)| : x \in I\}$ proporciona una buena idea de la proximidad entre las funciones f y g pues dicho número es tanto más pequeño cuanto más cercanas estén las gráficas de las dos funciones.

Volviendo al ejemplo anterior, con $f_n(x) = nx(1-x)^n$ y $f \equiv 0$, podemos calcular fácilmente el número $\max\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} = \max\{f_n(x) : x \in [0,1]\}$. Basta derivar f_n para comprobar que la función f_n alcanza su máximo absoluto en el intervalo $[0,1]$ en el punto $x_n = \frac{1}{n+1}$. Luego

$$\max\{f_n(x) : x \in [0,1]\} = f_n(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \to \frac{1}{e}.$$

Fíjate en que $\lim_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = 0$ pero $\lim_{n\to\infty} \max\{f_n(x) : x \in [0,1]\} = 1/e > 0$, es decir, las funciones f_n no se aproximan a la función nula. De hecho, como la sucesión $\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right\}$ es creciente, cuanto mayor sea n mayor es la distancia entre la función f_n y la función nula. Observa cómo son las gráficas de las funciones f_n cerca de cero para $n = 100, 120, 140, 160, 180, 200$.



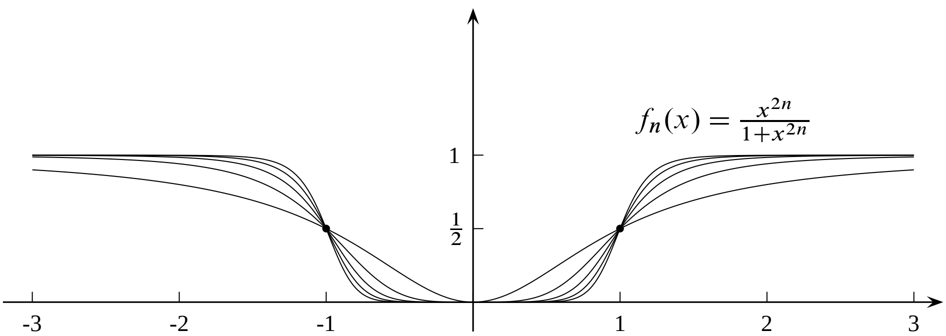
10.6 Ejemplo. Sea la sucesión de funciones $\{f_n\}$ donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función dada para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$$

Es claro que si $|x| < 1$ se tiene que $\{f_n(x)\} \to 0$, y si $|x| > 1$ se tiene que $\{f_n(x)\} \to 1$. Para $x = \pm 1$ es $\{f_n(\pm 1)\} = \{1/2\}$ que, evidentemente, converge a $1/2$. Por tanto, el campo de convergencia puntual de $\{f_n\}$ es $C = \mathbb{R}$, y la función límite puntual está definida por:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = \begin{cases} 1 \text{ si } |x| > 1; \\ 1/2 \text{ si } |x| = 1 \\ 0 \text{ si } |x| < 1. \end{cases}$$

Aquí ocurre que la función límite puntual es discontinua (tiene discontinuidades de salto en -1 y en 1) a pesar de que las funciones de la sucesión son continuas. Observa las gráficas de las primero cinco funciones de la sucesión.



Tenemos que:

$$\max\{|f(x) - f_n(x)| : x \in \mathbb{R}\} \geqslant f\Big(1+\frac{1}{2n}\Big) - f_n\Big(1+\frac{1}{2n}\Big) = 1 - \frac{(1+\frac{1}{2n})^{2n}}{1 + (1+\frac{1}{2n})^{2n}} \to 1 - \frac{\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}} = \frac{1}{1+\mathrm{e}}.$$

Por tanto, la distancia entre la función f_n y la función límite puntual, f, no converge a cero. ♦

Este ejemplo y el anterior ponen de manifiesto que la convergencia puntual de $\{f_n\}$ a f no proporciona una buena idea de la aproximación entre las funciones f_n y f. Además las propiedades de continuidad de las funciones f_n pueden no conservarse para la función límite puntual. Esto lleva a definir un tipo de convergencia mejor que la convergencia puntual.

10.2.2. Convergencia Uniforme

Sea J un intervalo no vacío contenido en el campo de convergencia puntual de la sucesión $\{f_n\}$. Y sea f la función límite puntual de $\{f_n\}$. Se dice que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en J si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que dependerá de ε) tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in J\} \leqslant \varepsilon$.

Para comprender bien esta definición, analicemos la última desigualdad. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\sup\{|f_n(x)-f(x)| : x\in J\}\leqslant\varepsilon &\Longleftrightarrow |f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon \quad \forall x\in J\\ &\Longleftrightarrow -\varepsilon\leqslant f_n(x)-f(x)\leqslant\varepsilon \quad \forall x\in J\\ &\Longleftrightarrow f(x)-\varepsilon\leqslant f_n(x)\leqslant f(x)+\varepsilon \quad \forall x\in J.\end{aligned}$$

Cuya interpretación gráfica es la siguiente (donde hemos considerado $J=[a,b]$).

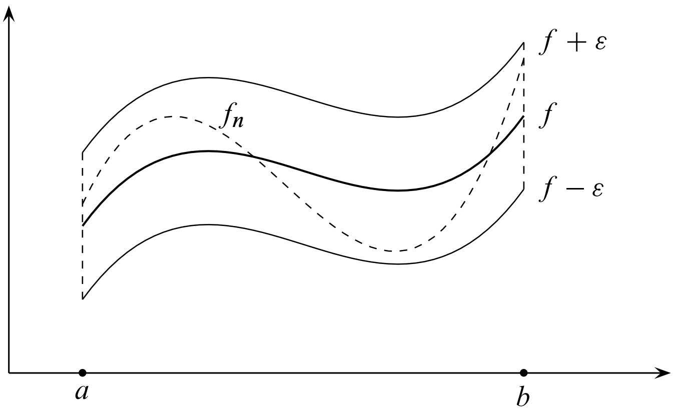


Figura 10.3. Interpretación gráfica de la convergencia uniforme

Esto nos dice que la gráfica de la función f_n se queda dentro de un *tubo* centrado en la gráfica de f de anchura 2ε (ver figura 10.3). Ahora debe estar claro que en el ejemplo 1 no hay convergencia uniforme en ningún intervalo del tipo $[0,a]$ con $0<a<1$ y en el ejemplo 2 no hay convergencia uniforme en ningún intervalo que contenga a -1 o a 1.

10.7 Observaciones. Observa que la diferencia entre la convergencia puntual y la convergencia uniforme en J es la siguiente.

Decir que $\{f_n\}$ converge a f puntualmente en J significa que:

- Fijas un $x\in J$;
- La correspondiente sucesión de números reales $\{f_n(x)\}$ converge a $f(x)$, es decir: para todo $\varepsilon>0$, existe un número natural n_0 tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ con $n\geqslant n_0$ se verifica que $|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$.

Naturalmente, el número n_0 dependerá del ε y, en general, **también de** x porque si cambias x por otro punto $z\in J$ la sucesión $\{f_n(z)\}$ es distinta de $\{f_n(x)\}$ y el n_0 que vale para una no tiene por qué valer también para la otra.

Decir que $\{f_n\}$ converge a f uniformemente en J significa que:

- Fijas un $\varepsilon>0$;
- Existe un número natural n_0 (que dependerá de ε) tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ con $n\geqslant n_0$ se verifica que $|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$ **para todo** $x\in J$.

Es decir, en la convergencia uniforme, hay un mismo número n_0 que es válido simultáneamente para todos los $x\in J$.

En la práctica, el estudio de la convergencia puntual se reduce a calcular *para cada x fijo* el límite $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\}$, lo que suele ser muy sencillo. Mientras que para estudiar la convergencia uniforme en un intervalo J, lo que se hace es calcular, con las técnicas usuales de derivación, el *máximo absoluto* de $|f_n(x) - f(x)|$ en J. La presencia del valor absoluto en $|f_n(x) - f(x)|$ es incómoda para derivar por lo que conviene quitarlo, lo que casi siempre puede hacerse con facilidad. Supongamos que el *máximo absoluto* de $|f_n(x) - f(x)|$ en J se alcanza en un punto $c_n \in J$. Entonces, si $\lim_{n\to\infty} \{f_n(c_n) - f(c_n)\} = 0$ hay convergencia uniforme en J, y en otro caso no hay convergencia uniforme en J. En particular, si hay una sucesión $\{z_n\}$ de puntos de J tal que $\{|f_n(z_n) - f(z_n)|\}$ no converge a 0, entonces $\{f_n\}$ no converge uniformemente a f en J.

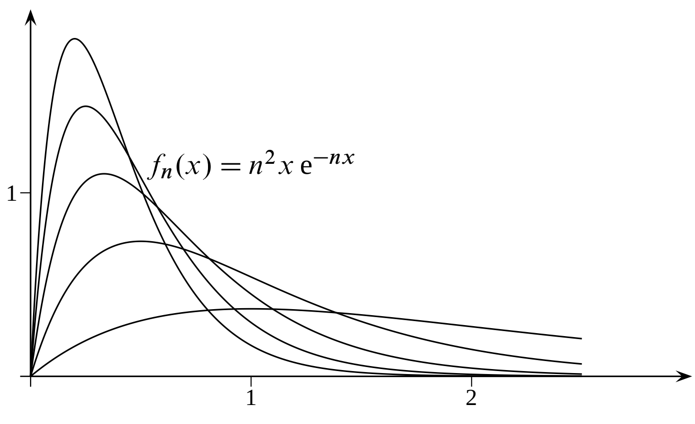
10.8 Ejemplo. Estudiemos la convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$ y en intervalos de la forma $[a, +\infty[$, $(a > 0)$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \in \mathbb{R}_o^+$ por $f_n(x) = n^2 x \,\mathrm{e}^{-nx}$.

Observa que $f_n(0) = 0$ y, si $x > 0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x \lim_{n\to\infty} n^2(\mathrm{e}^{-x})^n = 0$ (porque es una sucesión de la forma $n^p\lambda^n$ donde $0 < |\lambda| < 1$). Por tanto, el campo de convergencia puntual es $C = \mathbb{R}_o^+$, y la función límite puntal está dada por $f(x) = \lim_{n\to\infty} \{f_n(x)\} = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}_o^+$.

Estudiemos si hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$. Observa que $f_n(x) \geqslant 0$, por lo que $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$. Ahora, como, $f_n'(x) = n^2 \,\mathrm{e}^{-nx}(1 - nx)$, se deduce que $f_n'(x) > 0$ para $0 \leqslant x < 1/n$, y $f_n'(x) < 0$ para $x > 1/n$. Luego $f_n(x) \leqslant f_n(1/n)$ para todo $x \geqslant 0$. Deducimos que $f_n(1/n) = \max\{f_n(x) : x \in \mathbb{R}_o^+\}$, y como $f_n(1/n) = n/\mathrm{e}$, sucesión que, evidentemente, no converge a 0, concluimos que no hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$.

Estudiemos si hay convergencia uniforme en un intervalo de la forma $[a, +\infty[$, con $a > 0$. Por lo antes visto, sabemos que la función f_n es decreciente en el intervalo $[1/n, +\infty[$. Sea n_0 un número natural tal que $\frac{1}{n_0} < a$. Entonces, para todo $n \geqslant n_0$, tenemos que $[a, +\infty[\subset [1/n, +\infty[$, por lo que, $\max\{f_n(x) : x \in [a, +\infty[\} = f_n(a)$. Como $\lim\{f_n(a)\} = 0$, concluimos que hay convergencia uniforme en $[a, +\infty[$.

Observa las gráficas de las primero cinco funciones de la sucesión.



Puedes comprobar fácilmente, integrando por partes, que $\int_0^1 n^2 x \,\mathrm{e}^{-nx}\, dx = 1 - (1+n)\,\mathrm{e}^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\,\mathrm{d}x \,.$$

Es decir, en general, no se puede permutar la integración con el límite puntual. ♦

10.9 Observaciones. El concepto de convergencia uniforme requiere algunas precisiones importantes.

• *La convergencia uniforme se refiere siempre a un conjunto*. No tiene sentido decir que *"la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente"* si no se indica inmediatamente a continuación el conjunto en el que afirmamos que hay convergencia uniforme. Además, siempre hay convergencia uniforme en subconjuntos finitos del campo de convergencia puntual (si no sabes probarlo es que no has entendido la definición de convergencia uniforme). Por ello, sólo tiene interés estudiar la convergencia uniforme en conjuntos infinitos, por lo general en intervalos.

• No existe *"el campo de convergencia uniforme"*. Es decir, el concepto de *campo de convergencia puntual* no tiene un análogo para la convergencia uniforme. La razón es que no tiene por qué existir un *más grande* conjunto en el que haya convergencia uniforme. Así, en el ejemplo anterior, hay convergencia uniforme en intervalos de la forma $[a, +\infty[$ con $a > 0$. La unión de todos ellos es $\mathbb{R}^+$ y en $\mathbb{R}^+$ no hay convergencia uniforme.

10.10 Teorema (Condición de Cauchy para la convergencia uniforme). *Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente en J si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un número natural n_0 tal que para todos $n, m \geqslant n_0$ se verifica que:*

$$\sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in J\} \leqslant \varepsilon.$$

Demostración. Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función f en J. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existirá un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ se tiene que:

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in J\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $m \geqslant n_0$. Para todo $x \in J$ tenemos que:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por tanto para todos $n, m \geqslant n_0$ se verifica que $\sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in J\} \leqslant \varepsilon$.

Recíprocamente, supuesto que la condición del enunciado se cumple, entonces para cada $x \in J$ se verifica que la sucesión $\{f_n(x)\}$ verifica la condición de Cauchy pues:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in J\} \leqslant \varepsilon.$$

Por el teorema de completitud de $\mathbb{R}$ dicha sucesión es convergente. Por tanto podemos definir la función límite puntual $f : J \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x)$ para todo $x \in J$. Comprobemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en J. Dado $\varepsilon > 0$, por la hipótesis hecha, hay un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n, m \geqslant n_0$ es:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon \qquad \forall x \in J$$

Fijando $x \in J$ y $n \geqslant n_0$ en esta desigualdad y tomando límite para $m \to \infty$ obtenemos que:

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon,$$

desigualdad que es válida para todo $x \in J$. Deducimos que $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in J\} \leqslant \varepsilon$ siempre que $n \geqslant n_0$. Hemos probado así que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en J. $\square$

La utilidad de la condición de Cauchy para la convergencia uniforme es que es intrínseca a la sucesión, es decir, no involucra a la función límite.

10.2.3. Series de funciones

Dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$, podemos formar otra, $\{F_n\}$, cuyos términos se obtienen sumando *consecutivamente* los de $\{f_n\}$. Es decir, $F_1=f_1$, $F_2=f_1+f_2$, $F_3=f_1+f_2+f_3$,... En general, $F_n=\sum_{k=1}^{n} f_k$. La sucesión $\{F_n\}$ así definida se llama *serie de término general* f_n y la representaremos por el símbolo $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

Debe quedar claro que **una serie de funciones es una sucesión de funciones que se obtienen sumando consecutivamente las funciones de una sucesión dada**. Todo lo dicho para sucesiones de funciones se aplica exactamente igual para series de funciones. En particular, los conceptos de convergencia puntual y uniforme para sucesiones de funciones tienen igual significado para series. Así el campo de convergencia puntual de la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ cuyas funciones f_n suponemos definidas en un intervalo I, es el conjunto:

$$C=\{x\in I : \sum_{n\geqslant 1} f_n(x) \text{ es convergente}\}.$$

La función límite puntual, llamada *función suma* de la serie, es la función $F : C \to \mathbb{R}$ dada para todo $x \in C$ por:

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

La única novedad es que ahora también podemos considerar el *campo de convergencia absoluta* de la serie, que es el conjunto

$$A=\{x\in I : \sum_{n\geqslant 1} |f_n(x)| \text{ es convergente}\}.$$

El siguiente resultado es el más útil para estudiar la convergencia uniforme y absoluta de una serie.

10.11 Teorema (Criterio de Weierstrass). *Sea* $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ *una serie de funciones y* A *un conjunto tal que para todo* $x \in A$ *y todo* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $|f_n(x)| \leqslant \alpha_n$*, donde la serie* $\sum_{n\geqslant 1}\alpha_n$ *es convergente. Entonces* $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ *converge uniformemente y absolutamente en* A.

Demostración. De las hipótesis se deduce, en virtud del criterio de comparación para series de términos positivos, que la serie $\sum_{n\geqslant 1}|f_n(x)|$ converge para todo $x\in A$. Esto implica que la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ (x) converge para todo $x\in A$. Veamos que la convergencia es uniforme. Utilizaremos el criterio de Cauchy.

Como $\sum_{n\geqslant 1}\alpha_n$ es convergente cumplirá la condición de Cauchy, esto es, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que si $n > m \geqslant n_0$ entonces

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k - \sum_{k=1}^{m}\alpha_k\right| = \sum_{k=m+1}^{n}\alpha_k < \varepsilon.$$

Deducimos que para todo $x\in A$ se verifica que:

$$|F_n(x) - F_m(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n}\alpha_k < \varepsilon.$$

Como esta desigualdad es válida para todo $x\in A$ se sigue que:

$$\sup\{|F_n(x) - F_m(x)| : x\in A\} \leqslant \varepsilon. \tag{10.2}$$

Es decir, la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ cumple la condición de Cauchy para la convergencia uniforme en A. □

Por otra parte, si en la condición de Cauchy (10.2) para una serie de funciones $\sum f_n$, hacemos $m = n+1$ deducimos la siguiente condición necesaria para la convergencia uniforme.

10.12 Corolario. *Una condición necesaria para que una serie de funciones $\sum f_n$ sea uniformemente convergente en un conjunto A es que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converja uniformemente a cero en A.*

Observa que los conceptos de convergencia absoluta y de convergencia uniforme son independientes: una serie puede ser uniformemente convergente en un conjunto A y no ser absolutamente convergente en A. En tales casos se aplican los siguientes criterios de convergencia no absoluta para series de funciones.

10.13 Proposición (Criterios de convergencia uniforme no absoluta). *Sea $\{a_n\}$ una sucesión numérica y $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ una serie de funciones definidas en un conjunto A.*

Criterio de Dirichlet. *Supongamos que:*

a) $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales monótona y convergente a cero.

b) La serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ tiene sumas parciales uniformemente acotadas en A, es decir, hay un número $M > 0$ tal que para todo $x\in A$ y para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica que $\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leqslant M$.

Entonces la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} a_n f_n$ converge uniformemente en A.

Criterio de Abel. *Supongamos que:*

a) La serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

b) Para cada $x \in A$ $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de números reales monótona y la sucesión de funciones $\{f_n\}$ está uniformemente acotada en A, es decir, hay un número $M > 0$ tal que para todo $x \in A$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $|f_n(x)| \leqslant M$.

Entonces la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} a_n f_n$ converge uniformemente en A.

Demostración. Probaremos primero el criterio de Dirichlet. Pongamos $F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. De la fórmula (9.10) de suma por partes de Abel se deduce fácilmente que:

$$\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} f_{n+k}(x) = \sum_{k=1}^{p} F_{n+k}(x)(a_{n+k} - a_{n+k+1}) + F_{n+p}(x)a_{n+p+1} - F_n(x)a_{n+1}. \quad (10.3)$$

Igualdad que es válida para todos $p > n \geqslant 1$ y todo $x \in A$. Tomando valores absolutos en esta igualdad, teniendo en cuenta que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $|F_n(x)| \leqslant M$ y suponiendo que $\{a_n\}$ es decreciente en cuyo caso será $a_n > 0$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} f_{n+k}(x)\right| &\leqslant M \sum_{k=1}^{p}(a_{n+k} - a_{n+k+1}) + M a_{n+p+1} + M a_{n+1} = \\ &= M(a_{n+1} - a_{n+p+1}) + M a_{n+p+1} + M a_{n+1} = 2M a_{n+1}.\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, como suponemos que $\{a_n\} \to 0$, hay un n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que $a_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$. Deducimos que para todos $p > n \geqslant n_0$ y para todo $x \in A$ se verifica que:

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_k f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} f_{n+k}(x)\right| \leqslant 2M a_{n+1} \leqslant \varepsilon.$$

Hemos probado así que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} a_n f_n$ verifica la condición de Cauchy para la convergencia uniforme en A.

Probaremos ahora el criterio de Abel. Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Intercambiando los papeles de a_k y f_k en la igualdad (10.3) tenemos:

$$\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} f_{n+k}(x) = \sum_{k=1}^{p} S_{n+k}(f_{n+k}(x) - f_{n+k+1}(x)) + S_{n+p} f_{n+p+1}(x) - S_n f_{n+1}(x).$$

Sea $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.Teniendo en cuenta que:

$$\sum_{k=1}^{p}(f_{n+k}(x) - f_{n+k+1}(x)) + f_{n+p+1}(x) - f_{n+1}(x) = 0,$$

deducimos de la igualdad anterior:

$$\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} f_{n+k}(x) = \sum_{k=1}^{p} (S_{n+k} - S)(f_{n+k}(x) - f_{n+k+1}(x)) + (S_{n+p} - S) f_{n+p+1}(x) - \\ - (S_n - S) f_{n+1}(x).$$

Igualdad que es válida para todos $p > n \geqslant 1$ y todo $x \in A$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|S_q - S| \leqslant \varepsilon/4M$ siempre que $n \geqslant n_0$. Entonces $p > n \geqslant n_0$, tomando valores absolutos en la igualdad anterior y teniendo en cuenta que $|f_n(x)| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos:

$$\left| \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} f_{n+k}(x) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4M} \sum_{k=1}^{p} |f_{n+k}(x) - f_{n+k+1}(x)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como para cada $x \in A$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ es monótona, las diferencias $f_{n+k}(x) - f_{n+k+1}(x)$ son todas positivas o todas negativas y, por tanto:

$$\sum_{k=1}^{p} |f_{n+k}(x) - f_{n+k+1}(x)| = \left| \sum_{k=1}^{p} (f_{n+k}(x) - f_{n+k+1}(x)) \right| = \left| f_{n+1}(x) - f_{n+p+1}(x) \right| \leqslant 2M.$$

Concluimos que para todos $p > n \geqslant n_0$ y para todo $x \in A$ se verifica que:

$$\left| \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} f_{n+k}(x) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4M} 2M + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hemos probado así que la serie de funciones $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n f_n$ verifica la condición de Cauchy para la convergencia uniforme en A. □

10.14 Corolario (Criterio de Leibniz para la convergencia uniforme). *Sea $\{g_n\}$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in A$ la sucesión $\{g_n(x)\}$ es monótona y converge uniformemente a cero en A. Entonces la serie $\sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n+1} g_n$ converge uniformemente en A.*

Demostración. Pongamos $f_n \equiv f_n(x) = (-1)^{n+1}$. Entonces $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones constantes. Sea $F_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$. Se verifica que $|F_n| = \left| \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \leqslant 1$ para todo $x \in A$. Pongamos también $a_k = g_k(x)$. Usando la igualdad (10.3), tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{p} (-1)^{n+k+1} g_{n+k}(x) = \sum_{k=1}^{p} F_{n+k}(g_{n+k}(x) - g_{n+k+1}(x)) + F_{n+p} g_{n+p+1}(x) - F_n g_{n+1}(x).$$

Tomando valores absolutos obtenemos:

$$\left| \sum_{k=1}^{p} (-1)^{n+k+1} g_{n+k}(x) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{p} |g_{n+k}(x) - g_{n+k+1}(x)| + \left| g_{n+p+1}(x) \right| + |g_{n+1}(x)|.$$

Como, para cada $x \in A$, los números $g_{n+k}(x) - g_{n+k+1}(x)$ son todos positivos o todos negativos, se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{p} |g_{n+k}(x) - g_{n+k+1}(x)| = \left|\sum_{k=1}^{p} (g_{n+k}(x) - g_{n+k+1}(x))\right| = \left|g_{n+1}(x) - g_{n+p+1}(x)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|g_{n+p+1}(x)\right| + |g_{n+1}(x)|\,.$$

Resulta así que para todo $x \in A$:

$$\left|\sum_{k=1}^{p} (-1)^{n+k+1} g_{n+k}(x)\right| \leqslant 2\left|g_{n+p+1}(x)\right| + 2\,|g_{n+1}(x)|\,.$$

Como $\{g_n\}$ converge uniformemente a 0, dado $\varepsilon > 0$, hay un n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$ y para todo $x \in A$ se verifica que $|g_n(x)| \leqslant \varepsilon/4$. De la desigualdad anterior, se sigue que para $n \geqslant n_0$ y para todo $x \in A$ se verifica que:

$$\left|\sum_{k=1}^{p} (-1)^{n+k+1} g_{n+k}(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Hemos probado así que la serie $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1} g_n$ verifica la condición de Cauchy para la convergencia uniforme en A. □

Los resultados siguientes, relativos a la convergencia uniforme, se aplican, claro está, tanto a sucesiones como a series de funciones.

10.15 Teorema (Conservación de la continuidad). *Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en un intervalo J. Sea $a \in J$ y supongamos que las funciones f_n son todas ellas continuas en a. Se verifica entonces que la función f es continua en a. En particular, si las funciones f_n son todas ellas continuas en J. Se verifica entonces que la función f es continua en J.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, la hipótesis de convergencia uniforme implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant n_0$ se verifica que $|f_n(u) - f(u)| \leqslant \varepsilon/3$ para todo $u \in J$. Tenemos:

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)|$$

Pero por la forma en que hemos tomado n_0 se sigue que:

$$|f(x) - f(a)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| \tag{10.4}$$

Además, como por hipótesis f_{n_0} es continua en a , se verifica que existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in J$ con $|x - a| < \delta$ es $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| \leqslant \varepsilon/3$, lo que, en virtud de (10.4) implica que:

$$|f(x) - f(a)| \leqslant \frac{3\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Resumiendo, hemos probado que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si tomamos $|x - a| < \delta$ y $x \in J$ entonces $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$, que es, precisamente, la continuidad de f en a. □

Como la continuidad de f en $a \in J$ se expresa por $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} (\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x))$ y, por otra parte, por ser f_n continua en a, $f(a) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(a) = \lim\limits_{n \to \infty} (\lim\limits_{x \to a} f_n(x))$; el resultado anterior nos dice que:

$$\lim_{x \to a} (\lim_{n \to \infty} f_n(x)) = \lim_{n \to \infty} (\lim_{x \to a} f_n(x)).$$

Es decir, la convergencia uniforme permite permutar los límites. El ejemplo 10.6 con $a = 1$ o $a = -1$ muestra que esta igualdad puede ser falsa si no hay convergencia uniforme.

10.16 Teorema (Permutación de la integración con el límite uniforme). *Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en un intervalo $[a, b]$ y que las funciones f_n son todas ellas continuas en $[a, b]$. Se verifica entonces que:*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b (\lim_{n \to \infty} f_n(x))\,dx\,. \tag{10.5}$$

En particular, si una serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en $[a, b]$ se verifica que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx\,. \tag{10.6}$$

Demostración. Sea $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \{f_n(x)\}$. La hipótesis de convergencia uniforme nos dice que dado $\varepsilon > 0$ existe un n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$ se cumple:

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{para todo } x \text{ en } [a, b]$$

Así pues, si $n \geqslant n_0$ tenemos:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)]\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \leqslant \int_a^b \varepsilon\,dx = \varepsilon(b-a).$$

Al cumplirse esto para todo $\varepsilon > 0$ se sigue que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

□

Este resultado es válido también si solamente se supone que las funciones f_n son integrables en $[a, b]$, aunque en ese caso su demostración es un poco más larga porque hay que probar en primer lugar que la función límite uniforme f también es integrable en $[a, b]$. Suponiendo que las funciones f_n son continuas la función límite uniforme f también es continua y, por tanto, es integrable en $[a, b]$.

Cuando no hay convergencia uniforme la igualdad (10.5) no tiene por qué ser cierta como se pone de manifiesto en el ejemplo 10.8.

10.17 Ejemplo. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por $f_n(x) = x^n (\log x)^2$, y $f_n(0) = 0$. Veamos que la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en $[0,1]$.

Observa que f_n es continua y positiva en $[0,1]$ y se anula en los extremos del intervalo. Como $f_n'(x) = (n \log x + 2)x^{n-1} \log x$, se sigue que en el punto $c_n = \exp(-2/n)$ la función f_n alcanza un máximo absoluto en $[0,1]$. Luego

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leqslant f_n(c_n) = \frac{4\,\mathrm{e}^{-2}}{n^2},$$

y, puesto que la serie $\sum \dfrac{4\,\mathrm{e}^{-2}}{n^2}$ es convergente, deducimos, por el criterio de Weierstrass, que $\sum f_n$ converge uniformemente en $[0,1]$. En consecuencia, se verificará que:

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{x(\log x)^2}{1-x} \quad \text{y} \quad \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 2\frac{1}{(n+1)^3}$$

como fácilmente puedes comprobar integrando por partes, se deduce que:

$$\int_0^1 \frac{x(\log x)^2}{1-x} dx = 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

♦

La convergencia uniforme no conserva la derivabilidad. Esto es fácil de entender si consideras que puedes sacar pequeños dientes de sierra a la gráfica de una función derivable con lo que resulta una nueva función no derivable y arbitrariamente próxima a la primera. Por ello, el siguiente resultado tiene hipótesis más exigentes que los anteriores.

10.18 Teorema (Derivabilidad y convergencia uniforme). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en un intervalo I, y supongamos que:*

i) f_n es derivable en I para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en I.

iii) $\{f_n'\}$ converge uniformemente a g en I

Entonces f es derivable en I y $g(x) = f'(x)$ para todo $x \in I$.

Demostración. Demostraremos este resultado en el caso particular de que las funciones f_n tengan derivada primera continua en I. En tal caso, fijemos un punto $a \in I$. Ahora, para $x \in I$, en virtud del teorema fundamental del Cálculo, tenemos que:

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Tomando límites y haciendo uso del teorema anterior, deducimos que:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \,.$$

Una nueva aplicación del teorema fundamental del Cálculo nos dice ahora que f es derivable en I y que $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in I$. □

Observa que este teorema nos dice que, en las hipótesis hechas, podemos permutar la derivabilidad con la convergencia uniforme:

$$f = \text{lím} f_n \Longrightarrow f' = \text{lím}\{f_n'\}.$$

Esta igualdad es una permutación de límites pues afirma que para $a \in I$ se verifica que:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x)-f_n(a)}{x-a}\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} \frac{f_n(x)-f_n(a)}{x-a}\right) = \lim_{n\to\infty}\{f_n'(a)\} \end{aligned}$$

El teorema anterior suele enunciarse de una forma más general en apariencia. Tú mismo puedes deducirla a partir del siguiente resultado que se prueba haciendo uso del teorema del valor medio.

10.19 Proposición. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones derivables en un intervalo I. Supongamos que la sucesión $\{f_n'\}$ converge uniformemente en I y que hay un punto $a \in I$ tal que $\{f_n(a)\}$ es convergente. Entonces la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en todo intervalo acotado contenido en I.*

Demostración. Sea J un intervalo acotado contenido en I y sea L la longitud de J. Podemos suponer que $a \in J$ (si es necesario ampliamos J para que así sea). Como $\{f_n'\}$ converge uniformemente en I también converge uniformemente en $J \subset I$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n, m \geqslant n_0$ se verifica que:

$$\left|f_n'(x) - f_m'(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2L}, \quad \forall x \in J \tag{10.7}$$

Como $\{f_n(a)\}$ es convergente, podemos tomar también n_0 de forma que para $n, m \geqslant n_0$ se verifica que:

$$|f_n(a) - f_m(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{10.8}$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función $h(t) = f_n(t) - f_m(t) - (f_n(a) - f_m(a))$ en un intervalo de extremos x y a donde $x \in J$, se tiene que hay algún c comprendido entre x y a, por lo que $c \in J$, tal que $h(x) - h(a) = h'(c)(x-a)$, es decir:

$$f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a)) = \big(f_n'(c) - f_m'(c)\big)(x-a).$$

Tomando valores absolutos en esta igualdad y teniendo en cuenta (10.7), resulta que para $n, m \geqslant n_0$ es:

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a))| = \left|\big(f_n'(c) - f_m'(c)\big)\right| |x-a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2L} L = \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall x \in J.$$

Deducimos que:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a))| + |f_n(a) - f_m(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

desigualdad que es válida siempre que $n, m \geqslant n_0$ y *para todo* $x \in J$. Hemos probado así que la sucesión $\{f_n\}$ verifica en J la condición de Cauchy para la convergencia uniforme. □

10.3. Series de potencias

Dados un número real, $a \in \mathbb{R}$, y una sucesión de números reales, $\{c_n\}_{n\geqslant 0}$, sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada para todo $x \in \mathbb{R}$ por $f_n(x) = c_n(x-a)^n$ y, por convenio, $f_0(x) = c_0$. La serie de funciones $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ se llama *serie de potencias centrada en* a. La sucesión $\{c_n\}_{n\geqslant 0}$ se llama *sucesión de coeficientes de la serie*. El coeficiente c_0 se llama *término independiente* de la serie. Suele usarse, y nosotros también seguiremos la costumbre, la notación $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ para representar la serie de potencias centrada en a con coeficientes c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Un tipo particular de series de potencias son las **series de Taylor**. Dada una función f que tiene derivadas de todo orden en un punto a, la serie de potencias

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

se llama serie de Taylor de f en a. Recuerda que, por convenio, la derivada de orden 0 de una función, $f^{(0)}$, es la propia función $f^{(0)} = f$ y que $0! = 1$.

Observa que la serie de Taylor de f en a *es* la sucesión de los polinomios de Taylor de f en a. Recuerda que el polinomio de Taylor de orden n de f en a es la función polinómica dada por:

$$T_n(f, a)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

El resultado básico para estudiar la convergencia de una serie de potencias es el siguiente.

10.20 Lema (Lema de Abel). *Sea $\rho > 0$ y supongamos que la sucesión $\{|c_n|\rho^n\}$ está mayorada. Entonces se verifica que la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ converge absolutamente en el intervalo $]a-\rho, a+\rho[$ y converge uniformemente en todo intervalo cerrado y acotado contenido en $]a-\rho, a+\rho[$.*

Demostración. Por hipótesis, existe $M > 0$ tal que $|c_n|\rho^n \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $0 < r < \rho$. Será suficiente probar que la serie converge absolutamente y uniformemente en el intervalo $[a-r, a+r]$. Aplicaremos para ello el criterio de Weierstrass. Para todo $x \in [a-r, a+r]$, tenemos que:

$$|c_n(x-a)^n| = |c_n|\rho^n \frac{|x-a|^n}{\rho^n} \leqslant M \leqslant M\frac{r^n}{\rho^n} = M\left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$

Basta ahora tener en cuenta que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\dfrac{r}{\rho}\right)^n$ es convergente por ser una serie geométrica de razón $0 < \dfrac{r}{\rho} < 1$. □

El resultado anterior nos lleva, de forma natural, a considerar el más grande $\rho > 0$ tal que la sucesión $\{|c_n|\rho^n\}$ esté mayorada.

10.3.1. Radio de convergencia de una serie de potencias

Consideremos el conjunto

$$A = \{\rho \geqslant 0 : \text{ la sucesión } \ \{|c_n|\rho^n\} \ \text{ está acotada}\}.$$

Observa que $A \neq \emptyset$ ya que el $0 \in A$. Además, A es un intervalo porque si $\rho \in A$ entonces $[0, \rho] \subset A$. Si A está mayorado definimos $R = \sup(A)$, si no lo está definimos $R = +\infty$. Se dice que R es el *radio de convergencia* de la serie de potencias $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$. El intervalo $I =]a - R, a + R[$, con el convenio de que cuando $R = +\infty$ es $I = \mathbb{R}$, se llama *intervalo de convergencia* de la serie. La razón de esta terminología queda clara en el siguiente resultado, fácil consecuencia del lema de Abel.

10.21 Teorema. *Sea $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia no nulo y sea I el intervalo de convergencia de la serie. Se verifica que la serie converge absolutamente en todo punto de I y converge uniformemente en cualquier intervalo cerrado y acotado contenido en I. Además la serie no converge para valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $|x - a| > R$.*

10.22 Definición. Sea $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia no nulo y sea I el intervalo de convergencia de la serie. La función $f : I \to \mathbb{R}$ definida para todo $x \in I$ por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

se llama *función suma de la serie*.

Como consecuencia del teorema anterior, del carácter local de la continuidad y del teorema 10.15, se sigue que la función suma de una serie de potencias es continua. Enseguida veremos que es mucho más que continua.

El teorema 10.21 nos dice que el estudio de la convergencia de una serie de potencias se reduce a calcular el radio de convergencia. La única duda corresponde a los extremos del intervalo de convergencia, los puntos $a - R$ y $a + R$, en los cuales puede darse cualquier comportamiento como veremos enseguida con ejemplos.

Fíjate en que el radio de convergencia sólo depende de la sucesión de coeficientes de la serie y que el punto a en que la serie está centrada no interviene para nada en la definición del radio de convergencia.

Todo esto está muy bien, dirás, pero ¿cómo se calcula el radio de convergencia? Desde luego, la definición que hemos dado de radio de convergencia tiene utilidad teórica pero no sirve para calcularlo. Hay una fórmula general para calcular el radio de convergencia que no vamos considerar aquí porque, a efectos de cálculo, los siguientes casos particulares son los más interesantes.

10.3.1.1. Cálculo del radio de convergencia

Podemos aplicar los criterios del cociente y de la raíz para estudiar la convergencia absoluta de una serie de potencias. Ello permite deducir con facilidad los siguientes dos resultados.

10.23 Proposición. *Sea* $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ *una serie de potencias y supongamos que* $\dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \to L$ *donde* $0 \leqslant L \leqslant +\infty$. *Entonces si* $L=0$ *el radio de convergencia de la serie es* $R=+\infty$, *si* $L=+\infty$ *el radio de convergencia de la serie es* $R=0$ *y si* $0<L<+\infty$ *el radio de convergencia de la serie es* $R=1/L$.

Demostración. Apliquemos el criterio del cociente para estudiar la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$. Pongamos $a_n = |c_n(x-a)^n|$. Tenemos que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}|x-a| \to L|x-a|.$$

Si $0<L<1$, el criterio del cociente nos dice que la serie converge absolutamente si $L|x-a|<1$, es decir, si $|x-a|<1/L$, y que si $L|x-a|>1$ entonces la serie no converge porque su término general $\{c_n(x-a)^n\}$ no converge a 0. Deducimos que el radio de convergencia es $R=1/L$.

Si $L=0$ la condición $L|x-a|<1$ se cumple para todo $x\in\mathbb{R}$ y el radio de convergencia es $R=+\infty$. Si $L=+\infty$ entonces para todo $x\neq a$ se tiene que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}|x-a| \to +\infty.$$

lo que, por el criterio del cociente, nos dice que la serie no converge porque su término general no converge a 0. Luego en este caso es $R=0$. □

De forma totalmente análoga, haciendo uso del criterio de la raíz, se prueba el siguiente resultado.

10.24 Proposición. *Sea* $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ *una serie de potencias y supongamos que* $\sqrt[n]{|c_n|} \to L$ *donde* $0 \leqslant L \leqslant +\infty$. *Entonces si* $L=0$ *el radio de convergencia de la serie es* $R=+\infty$, *si* $L=+\infty$ *el radio de convergencia de la serie es* $R=0$ *y si* $0<L<+\infty$ *el radio de convergencia de la serie es* $R=1/L$.

Observa que los criterios anteriores son bastante restrictivos pues, por ejemplo, a la serie $\sum_{n\geqslant 0} x^{2n}$ no puedes aplicarle ninguno de ellos. En particular, el criterio del cociente no puede aplicarse cuando hay infinitos coeficientes nulos. En casos parecidos a este el siguiente artificio es de bastante utilidad práctica.

10.25 Observaciones.

- Consideremos una serie de potencias de la forma $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^{qn}$ donde q es un número natural fijo. Para calcular su radio de convergencia hacemos $z=(x-a)^q$ y calculamos el radio de convergencia de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$. Si éste es $R\in\mathbb{R}^+$, entonces la $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^{qn}$ converge para $|x-a|^q < R$, es decir, para $|x-a| < \sqrt[q]{R}$, luego su radio de convergencia es $\sqrt[q]{R}$.

- Si $k\in\mathbb{N}$, las series $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^{n+k}$ y $\sum\limits_{n\geqslant k} c_n(x-a)^{n-k}$ tienen igual radio de convergencia puesto que todas ellas convergen para los mismos valores de x.

- Si las sucesiones $\{|c_n|\}$ y $\{|b_n|\}$ son asintóticamente equivalentes, entonces las series de potencias $\sum c_n(x-a)^n$ y $\sum b_n(x-a)^n$ tienen igual radio de convergencia. Ello es consecuencia de que si $\rho > 0$ las sucesiones $\{|c_n|\,\rho^n\}$ y $\{|b_n|\,\rho^n\}$ son, evidentemente, asintóticamente equivalentes, por lo que ambas están mayoradas o ninguna lo está.

El siguiente importante teorema nos dice, entre otras cosas, que si una serie de potencias tiene radio de convergencia no nulo entonces dicha serie es la serie de Taylor de su función suma. Usaremos el siguiente resultado.

10.26 Lema. *Las series* $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ *y* $\sum\limits_{n\geqslant 1} n c_n(x-a)^{n-1}$ *tienen igual radio de convergencia.*

Demostración. Pongamos:

$$A=\left\{\rho\geqslant 0:\{|c_n|\,\rho^n\}\ \text{está acotada}\right\},\quad B=\left\{\rho\geqslant 0:\{n\,|c_n|\,\rho^n\}\ \text{está acotada}\right\}.$$

Los respectivos radios de convergencia viene dados por $R=\sup(A)$ y $R'=\sup(B)$ con los convenios usuales. Es evidente que $B\subset A$. Lo que implica que $R'\leqslant R$. En particular, si $R=0$ entonces $R=R'=0$. Consideremos que $0<R<+\infty$ y sea $0<\rho_0<R$. Por definición de supremo, tiene que haber algún $\rho\in A$ tal que $\rho_0<\rho$. La sucesión $\{|c_n|\,\rho^n\}$ está acotada, es decir, hay un $M>0$ tal que $|c_n|\,\rho^n\leqslant M$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Deducimos que:

$$n\,|c_n|\,\rho_0^n = n\,|c_n|\,\rho^n\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^n \leqslant M n\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^n.$$

Como, por ser $0<\rho_0<\rho$, la sucesión $n\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^n$ converge a cero, se sigue que dicha sucesión está acotada y, teniendo en cuenta la desigualdad anterior, se sigue que también está acotada la sucesión $\{n\,|c_n|\,\rho_0^n\}$. Hemos probado así que $\rho_0\in B$ y, por tanto, $\rho_0\leqslant R'$. Como esta desigualdad es válida para todo número $\rho_0<R$ se sigue que necesariamente debe ser $R\leqslant R'$ y concluimos que $R=R'$. En el caso en que $R=+\infty$ puede repetirse el razonamiento anterior con cualquier número $\rho_0>0$ y concluimos que también es $R'=+\infty$. □

10.27 Teorema (Derivación de una serie de potencias). *Sea* $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia no nulo* R*. Sea* I *el intervalo de convergencia de la serie y* $f: I \to \mathbb{R}$ *la función suma de la serie definida para todo* $x \in I$ *por:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n.$$

Entonces se verifica que:

i) f *es indefinidamente derivable en* I.

ii) La derivada de orden k *de* f *está dada para todo* $x \in I$ *por:*

$$f^{(k))}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(x-a)^{n-k}. \tag{10.9}$$

En particular, se verifica que $f^{(k))}(a) = c_k \cdot k!$*, es decir,* $c_k = \dfrac{f^{(k))}(a)}{k!}$ *y, por tanto, la serie de potencias* $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ *coincide con la serie de Taylor en a de su función suma.*

Demostración. Las series de potencias son series de funciones polinómicas las cuales son indefinidamente derivables. Pongamos $f_n(x)=c_n(x-a)^n$. Teniendo en cuenta el lema anterior, las series de potencias $\sum_{n\geqslant 0} f_n \equiv \sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ y $\sum_{n\geqslant 0} f_n' \equiv \sum_{n\geqslant 0} nc_n(x-a)^{n-1}$ tienen igual radio de convergencia. Podemos aplicar ahora los teoremas 10.21 y 10.18 para obtener que la función suma f es derivable y su derivada viene dada para todo $x \in I$ por:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}.$$

Es decir, la derivada de la función suma es la función suma de la serie de las derivadas.

Podemos volver a aplicar este resultado a la serie de las derivadas $\sum_{n\geqslant 0} nc_n(x-a)^{n-1}$, pues dicha serie sigue siendo una serie de potencias con el mismo radio de convergencia, y deducimos que la función suma de dicha serie, que es f' según acabamos de probar, es derivable y su derivada viene dada para todo $x \in I$ por:

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-a)^{n-2}.$$

Este razonamiento puede repetirse tantas veces como queramos. Una simple y evidente inducción prueba que para todo $k \in \mathbb{N}$ se verifica la igualdad (10.9). □

Dijimos que las series de Taylor eran un tipo especial de series de potencias. El teorema anterior nos dice que no son tan especiales: toda serie de potencias con radio de convergencia no nulo es una serie de Taylor; es la serie de Taylor de su función suma.

El teorema anterior nos dice que las funciones suma de series de potencias son funciones con derivadas de todos órdenes (funciones de clase C^{∞}) y que podemos calcular sus derivadas sucesivas derivando término a término la serie que las define.

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del teorema de derivación y nos dice que siempre podemos calcular una primitiva de una serie de potencias expresándola por medio de otra serie de potencias.

10.28 Corolario (Primitiva de una serie de potencias). *Las series de potencias* $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ *y* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ *tiene igual radio de convergencia. Supuesto que dicho radio de convergencia es positivo y llamando* I *al intervalo de convergencia, se verifica que la función*

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} \qquad (x\in I)$$

es una primitiva en I *de la función*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n \qquad (x\in I).$$

En otros términos, este resultado afirma que para todo $x\in I$ se verifica la igualdad:

$$\int_a^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n(t-a)^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x c_n(t-a)^n\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} \tag{10.10}$$

10.29 Ejemplo.

$$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n!}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

◆

10.30 Estrategia. Acabamos de ver que si expresamos una función f como suma de una serie de potencias, derivando la serie término a término se obtiene la serie de potencias de la derivada de f, e integrando la serie término a término se obtiene una serie de potencias cuya suma es una primitiva de f. Estos procesos se determinan mutuamente. Por eso, para expresar una función f como suma de una serie de potencias, puede ser una estrategia válida, cuando la derivada de f sea más sencilla que f, expresar la derivada f' como suma de una serie de potencias, pues integrando dicha serie término a término se obtiene una serie de potencias que se diferencia de f en una contante que usualmente puede calcularse fácilmente.

10.31 Ejemplo. Sabemos que:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad (1-<x<1)$$

Integrando término a término se obtiene que la función:

$$h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (1-<x<1)$$

es derivable en $]-1,1[$ con derivada $h'(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Por tanto, las funciones h y $f(x) = -\log(1-x)$ tienen la misma derivada en $]-1,1[$ y como $h(0) = f(0) = 0$, concluimos que $h(x) = -\log(1-x)$. Luego:

$$\log(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (1- < x < 1).$$

♦

10.4. Desarrollos en serie de potencias de las funciones elementales

Dada una función f con derivadas de todos órdenes en un intervalo I y un punto $a \in I$, ¿se verifica que la serie de Taylor de f centrada en a tiene radio de convergencia no nulo? En caso de que así sea, ¿se verifica que la función suma de la serie de Taylor de f coincide con f?

Contrariamente a lo que en principio puede parecer, la respuesta a ambas preguntas es, en general, negativa. Un estudio en profundidad de este problema requiere el uso de técnicas de variable compleja que no son propias de este curso. A continuación consideraremos algunas de las funciones más usuales del Cálculo y probaremos que, en determinados intervalos, coinciden con la suma de sus respectivas series de Taylor. La herramienta básica para estudiar la convergencia de una serie de Taylor es, precisamente, el teorema de Taylor. Conviene recordarlo.

Teorema de Taylor

Sea f un función $n+1$ veces derivable en un intervalo I y sean $a, x \in I$ entonces existe un punto $c \in I$ con $|a-c| < |a-x|$ tal que:

$$f(x) = T_n(f,a)(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1}(c)(x-a)^{n+1}$$

Series de Taylor de la función exponencial

Ya sabemos que la función exponencial coincide con la suma de su serie de Taylor en 0:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Recuerda que usamos el Teorema de Taylor para probar esta igualdad. Vamos a volver a obtener este resultado de forma diferente.

Los polinomios de Taylor de la función exp son particularmente fáciles de calcular. Puesto que $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$ para todo k, el polinomio de Taylor de orden n en 0 es:

$$T_n(\exp,0)(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Consideremos la serie de potencias centrada en 0 $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$. Llamando $c_n = \dfrac{1}{n!}$ tenemos que $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{1}{n+1} \to 0$, por tanto la serie tiene radio de convergencia $R = +\infty$. Llamemos h a la función suma de la serie:

$$h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad \text{para todo } x\in\mathbb{R}.$$

Vamos a probar que h es la función exponencial. Por el teorema de derivación tenemos que

$$h'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=h(x).$$

Acabamos de probar que h es una función que coincide con su derivada, esto es, $h(x)=h'(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Consideremos ahora la función $g(x)=h(x)\,\mathrm{e}^{-x}$,

$$g'(x)=h'(x)\,\mathrm{e}^{-x}-h(x)\,\mathrm{e}^{-x}=h(x)\,\mathrm{e}^{-x}-h(x)\,\mathrm{e}^{-x}=0\quad \text{para todo } x\in\mathbb{R}.$$

Como $g'(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}$ tenemos que la función g es constante. Como $g(0)=1$, deducimos que $g(x)=g(0)=1$. Concluimos, por tanto, que $h(x)=\mathrm{e}^x$.

La serie de Taylor centrada en un punto a se deduce de la anterior sin más que tener en cuenta que:

$$\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{x-a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^a}{n!}(x-a)^n\qquad \text{para todo } x\in\mathbb{R}.$$

Series de Taylor del seno y del coseno

Sabemos que:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}'(x)&=\cos(x)=\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right);\\ \operatorname{sen}^{(k)}(x)&=\operatorname{sen}\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Por tanto

$$T_n(\operatorname{sen},a)(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\operatorname{sen}\left(a+k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}(x-a)^k$$

Como para todo $z\in\mathbb{R}$ es $|\operatorname{sen} z|\leqslant 1$, el teorema de Taylor implica que:

$$\left|\operatorname{sen} x-\sum_{k=0}^{n}\frac{\operatorname{sen}\left(a+k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}(x-a)^k\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

Pero sabemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

De donde deducimos

$$\operatorname{sen} x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(a+k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}(x-a)^k\quad \text{para todo } x\in\mathbb{R}$$

Es decir, la serie de Taylor del seno converge a $\operatorname{sen} x$ cualquiera sea $x\in\mathbb{R}$.

Por el teorema de derivación para series de potencias obtenemos la serie del coseno, que también será convergente cualquiera sea $x\in\mathbb{R}$.

$$\cos x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(a+(k+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\left(a+k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}(x-a)^{k}\quad\text{para todo}\quad x\in\mathbb{R}$$

Si hacemos $a=0$ tenemos que para todo $x\in\mathbb{R}$:

$$\operatorname{sen}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\qquad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

Series de Taylor de la función logaritmo

Seguiremos la idea expuesta en la estrategia 10.30 y en el ejemplo 10.31.

Para calcular la serie de Taylor de log, pongamos $f(x)=\log(1+x)$ definida para $x>-1$. Tenemos que

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\qquad(|x|<1)$$

Integrando término a término esta serie, definamos para $|x|<1$:

$$h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

Tenemos, en virtud del teorema de derivación, que $h'(x)=f'(x)$ para todo $x\in]-1,1[$, esto implica que $h(x)-f(x)$ es constante y, como $h(0)-f(0)=0$, concluimos que $f(x)=h(x)$. Hemos probado así que:

$$\log(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}\quad(|x|<1)$$

Observa que, efectivamente, $]-1,1[$ es el intervalo de convergencia de la serie.

La serie de Taylor del logaritmo centrada en $a>0$ se deduce de lo anterior:

$$\log(x)=\log(a+(x-a))=\log a+\log\left(\frac{x-a}{a}\right)=\log a+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}}(x-a)^{n+1}\ (|x-a|<a).$$

Observa que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ cuya suma para $|x|<1$ es igual a $\log(1+x)$ es también convergente para $x=1$ puesto que se trata de la serie armónica alternada. En esta situación ¿cabe esperar que la igualdad $\displaystyle\log(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ válida, en principio, para $|x|<1$ sea también válida para $x=1$? En este caso particular, la respuesta es afirmativa porque sabemos que $\displaystyle\log 2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$. El siguiente resultado establece que esto es cierto en general.

10.32 Teorema (Teorema de Abel). *Sea* $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia* R*, siendo* $0<R<+\infty$*. Sea*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \qquad x\in]a-R,a+R[$$

la función suma de la serie. Supongamos además que la serie $\sum_{n\geqslant 0} c_n R^n$ *converge. Entonces se verifica que la serie* $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ *converge uniformemente en el intervalo* $[a,a+R]$*. En consecuencia:*

$$\lim_{\substack{x\to a+R\\ x<a+R}} f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n \qquad y \qquad \int_a^{a+R} f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^{a+R} c_n(x-a)^n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}R^{n+1}.$$

Demostración. Escribamos:

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n=\sum_{n\geqslant 0} c_n R^n\left(\frac{x-a}{R}\right)^n.$$

Podemos aplicar a esta serie el criterio de Abel 10.13 con $a_n=c_nR^n$ y $f_n(x)=\left(\frac{x-a}{R}\right)^n$. Por hipótesis la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ es convergente y para $x\in[a,a+R]$ se verifica que $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de números reales monótona (decreciente); además, para todo $n\in\mathbb{N}$ y para todo $x\in[a,a+R]$ se tiene que $|f_n(x)|\leqslant 1$. En estas condiciones el citado criterio de Abel nos dice que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n f_n(x)=\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ converge uniformemente en $[a,a+R]$.

Las dos afirmaciones finales del teorema son consecuencia de que al ser la convergencia uniforme en $[a,a+R]$ se verifica que:

$$\lim_{\substack{x\to a+R\\ x<a+R}} f(x)=\lim_{\substack{x\to a+R\\ x<a+R}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{\substack{x\to a+R\\ x<a+R}} c_n(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty} c_nR^n.$$

donde en la segunda igualdad podemos permutar el límite con la suma de la serie por ser la convergencia uniforme en $[a,a+R]$.

Igualmente, la convergencia uniforme de la serie en $[a,a+R]$ permite permutar la integral con la suma de la serie. □

Serie de Taylor del arcotangente en cero

Puesto que

$$\operatorname{arc\,tg}'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \qquad (x\in]-1,1[)$$

se deduce fácilmente que

$$\operatorname{arc\,tg} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \qquad (x\in]-1,1[)$$

Además, como esta serie converge también para $x = 1$, el teorema de Abel nos dice que:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} 1 = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Serie binomial de Newton

Consideremos la función $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, donde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, ya que para $\alpha \in \mathbb{Z}$ el desarrollo es conocido. Calculemos la serie de Taylor de f en 0. Tenemos que

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$
$$f^{(n}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

Los coeficientes de la serie serán:

$$\frac{f^{(n}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}.$$

Por tanto la serie de Taylor de f es:

$$\sum_{n \geqslant 0} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Calculemos su radio de convergencia.

$$c_n = \binom{\alpha}{n} \Rightarrow \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{|\alpha - n|}{|n+1|} \to 1$$

Por tanto, el radio de convergencia es $R = 1$. Definamos para $|x| < 1$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad (|x| < 1)$$

Queremos probar ahora que la función suma de la serie, g, coincide con la función f en el intervalo $]-1,1[$. Para esto consideremos la función $h(x) = (1+x)^{-\alpha} g(x)$, definida para $|x| < 1$. Calculemos h'.

$$h'(x) = -\alpha(1+x)^{-\alpha-1} g(x) + (1+x)^{-\alpha} g'(x) = (1+x)^{-\alpha-1}\big[-\alpha g(x) + (1+x)g'(x)\big]$$

Analicemos ahora la expresión entre corchetes,

$$\begin{aligned}
(1+x)g'(x) - \alpha g(x) &= (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^n - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)\binom{\alpha}{n+1} - \alpha \binom{\alpha}{n} + n \binom{\alpha}{n} \right] x^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + (n-\alpha)\binom{\alpha}{n} \right] x^n = 0
\end{aligned}$$

Hemos probado que $h'(x)=0$ para todo $x\in]-1,1[$, de donde deducimos que $h(x)$ es constante, y como $h(0)=1$, concluimos que $g(x)=(1+x)^\alpha$ para $|x|<1$. Hemos probado así que:

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n, \quad (|x|<1)$$

Para centrar esta serie en un punto $a>-1$ podemos proceder como sigue:

$$(1+x)^\alpha=(1+a+(x-a))^\alpha=(1+a)^\alpha\left[1+\frac{x-a}{1+a}\right]^\alpha=(1+a)^\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\left(\frac{x-a}{1+a}\right)^\alpha=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\frac{1}{(1+a)^{n-\alpha}}(x-a)^n \quad \text{siempre que} \quad |x-a|<1+a.$$

Donde hemos tenido en cuenta que $1+a>0$.

Serie de Taylor del arcoseno en cero

Sea $f(x)=\operatorname{arc\,sen} x$, su derivada viene dada como:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-1/2}$$

Haciendo las sustituciones $x\to -x^2$ y $\alpha\to -1/2$ en la serie binomial de Newton obtenemos:

$$f'(x)=(1-x^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-1)^n x^{2n} \quad (|x|<1).$$

Integrando término a término la expresión anterior obtenemos la serie del arcoseno:

$$\operatorname{arc\,sen} x=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \quad (|x|<1)$$

Como

$$\binom{-1/2}{n}=\frac{-1/2(-1/2-1)\cdots(-1/2-n+1)}{n!}=(-1)^n\frac{1}{2^n}\frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}=$$
$$=(-1)^n\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(2n)}$$

Resulta finalmente:

$$\operatorname{arc\,sen} x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(2n)}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} \quad (|x|<1)$$

Además, como la serie también converge para $x=1$, por el teorema de Abel tenemos que:

$$\operatorname{arc\,sen} 1=\frac{\pi}{2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(2n)}\frac{1}{2n+1}$$

Ya dijimos que las series de Taylor de una función no siempre convergen a dicha función. Veamos un ejemplo de esto.

10.33 Ejemplo. Consideremos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida de la siguiente forma

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x\leqslant 0 \end{cases}$$

La función es de clase infinito, y puede probarse sin dificultad que $f^{(n)}(0)=0$ para todo $n=0,1,2,\dots$, por lo que su serie de Taylor en $a=0$ es la serie idénticamente nula que, evidentemente, no converge a f en ningún intervalo *abierto* que contenga a 0. ♦

Por esta razón se define una clase de funciones que son precisamente aquellas que pueden representarse localmente por sus series de Taylor.

10.34 Definición. Se dice que f es una **función analítica** en un intervalo abierto I si para cada punto $a\in I$ hay una serie de potencias centrada en a que converge en un intervalo abierto no vacío J_a, y su suma es igual a f en el intervalo $J_a\cap I$.

Dicho de forma más concisa: las funciones analíticas son las funciones que se representan localmente por medio de series de potencias. Teniendo en cuenta el teorema de derivación y el carácter local de la derivabilidad, es inmediato que una función f es analítica en un intervalo abierto I si, y sólo si, se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. $f\in C^{\infty}(I)$.
2. Para todo punto $a\in I$ la serie de Taylor de f en a converge en un intervalo abierto no vacío J_a, y su suma es igual a f en el intervalo $J_a\cap I$.

10.35 Ejemplos. Hemos visto antes que para todo $a>0$ se verifica que:

$$\log x=\log a+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}}(x-a)^{n+1} \qquad (|x-a|<a). \tag{10.11}$$

Esto nos dice que la función logaritmo es analítica en el intervalo $I=]0,+\infty[$. Observa que en cada punto $a>0$ la serie de Taylor del logaritmo converge en el intervalo $J_a=]0,2a[$ y es en ese intervalo en donde representa a la función. El intervalo es tanto más pequeño cuanto más próximo esté a de 0.

También hemos visto que para todo $a>-1$ se verifica que:

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\frac{1}{(1+a)^{n-\alpha}}(x-a)^n \qquad |x-a|<1+a.$$

Esto nos dice que la función $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ es analítica en el intervalo $I=]-1,+\infty[$. Observa que en cada punto $a>-1$ la serie de Taylor f converge en el intervalo abierto no vacío $J_a=]-1,2a+1[$ y es en ese intervalo en donde representa a la función. El intervalo es tanto más pequeño cuanto más próximo esté a de -1.

De la misma forma, los resultados vistos para las funciones exponencial, seno y coseno, muestran que dichas funciones son analíticas en $\mathbb{R}$ y sus series de Taylor en cualquier punto convergen en todo $\mathbb{R}$.

La función del ejemplo 10.33 no es analítica en ningún intervalo abierto que contenga a 0, pero sí es analítica en intervalos abiertos que no contengan a 0.

10.4.1. Las funciones trascendentes elementales definidas por series

Las series de potencias son objetos matemáticos muy simples, en ellas solamente intervienen las operaciones algebraicas de adición y de multiplicación y la operación analítica de paso al límite. De hecho, las series de potencias son sucesiones de funciones polinómicas. Por eso dichas series suelen usarse para definir nuevas funciones. Recuerda que usamos el Teorema Fundamental del Cálculo para definir el logaritmo natural y, a partir de él, la función exponencial. Ahora vamos a hacer lo mismo con series de potencias y ¡por fin! podremos definir de forma analítica las funciones trigonométricas.

10.4.1.1. La función exponencial

Olvidemos de momento lo que sabemos de la función exponencial. Sabemos que la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{x^n}{n!}$ tiene radio de convergencia $R=+\infty$ y, por tanto, su función suma está definida en todo $\mathbb{R}$.

10.36 Definición. La función $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada para todo $x\in\mathbb{R}$ por:

$$\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Se llama *función exponencial*.

Como consecuencia del teorema de derivación para series de potencias, la función exponencial es derivable en todo punto $x\in\mathbb{R}$ y su derivada viene dada por:

$$\exp'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{x^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\exp(x).$$

Por tanto, la exponencial es una función que coincide con su derivada. Consideremos un número fijo $a\in\mathbb{R}$ y definamos para todo $x\in\mathbb{R}$ $f(x)=\exp(x+a)\exp(-x)$. Tenemos que:

$$f'(x)=\exp(x+a)\exp(-x)-\exp(x+a)\exp(-x)=0:$$

Por tanto f es constante en $\mathbb{R}$. Como $\exp(0)=1$, deducimos que $f(x)=f(0)=\exp(a)$. Hemos probado que $\exp(x+a)\exp(-x)=\exp(a)$. En particular, para $a=0$ será $\exp(x)\exp(-x)=1$ lo que implica que la función exponencial no se anula nunca y que $\exp(-x)=1/\exp(x)$. Por tanto, podemos escribir la igualdad antes obtenida en la forma $\exp(a+x)=\exp(a)\exp(x)$. Igualdad que es válida para todos $a,x\in\mathbb{R}$. Hemos probado así la propiedad aditiva de la exponencial.

Tenemos también que $\exp(x)=(\exp(x/2))^2>0$, por lo que la función exponencial es siempre positiva. Como coindide con su derivada, deducimos que es una función estrictamente creciente. Como $\exp(1)>\exp(0)=1$ se tiene que $\exp(n)=(\exp(1))^n\to+\infty$ y $\exp(-n)=1/\exp(n)\to 0$. Deducimos que $\lim\limits_{x\to-\infty}\exp(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp(x)=+\infty$ y que la exponencial es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^+$.

Se define el número $\mathrm{e} = \exp(1)$. Es fácil probar, usando la propiedad aditiva de la exponencial, que $\exp(r) = (\exp(1))^r$ para todo número racional r, es decir $\exp(r) = \mathrm{e}^r$, por lo que se usa la notación $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

Observa de qué forma tan elegante y cómoda hemos obtenido las propiedades principales de la función exponencial. Se define ahora la función logaritmo natural como la inversa de la función exponencial.

10.4.1.2. Las funciones trigonométricas

Olvidemos de momento lo que sabemos de las funciones trigonométricas. La serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ tiene radio de convergencia $R = +\infty$ y, por tanto, su función suma está definida en todo $\mathbb{R}$.

10.37 Definición. La función $\operatorname{sen}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Se llama *función seno*.

Como consecuencia del teorema de derivación para series de potencias, la función seno es derivable en todo punto $x \in \mathbb{R}$ y su derivada viene dada por:

$$\operatorname{sen}'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (2n+1) \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

La función derivada de la función seno se llama *función coseno* y es la función definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

El teorema de derivación permite probar enseguida que $\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x)$. Además $\operatorname{sen}(0) = 0$ y $\cos(0) = 1$.

Derivando ahora la función $f(x) = \operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)$ se obtiene que:

$$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x - 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0.$$

Luego f es constante. Como $f(0) = 1$, concluimos que $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sea $a \in \mathbb{R}$ fijo y definamos la función:

$$h(x) = \big(\cos(x+a) - (\cos x \cos a - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} a)\big)^2 + \big(\operatorname{sen}(x+a) - (\operatorname{sen} x \cos a + \cos x \operatorname{sen} a)\big)^2.$$

Puedes comprobar en dos líneas que $h'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $h(0) = 0$, se sigue que $h(x) = 0$ lo que implica que:

$$\cos(x+a) = \cos x \cos a - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} a, \qquad \operatorname{sen}(x+a) = \operatorname{sen} x \cos a + \cos x \operatorname{sen} a.$$

Igualdades que son válidas para todos $x, a \in \mathbb{R}$. Acabamos de probar los teoremas de adición para el seno y el coseno.

Este estudio puede proseguirse y no está exento de algunas dificultades. Por ejemplo, hay que definir el número π y probar que las funciones seno y coseno son periódicas con período 2π. Esto puede hacerse como sigue. Tenemos que:

$$1 - \cos 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n}}{(2n)!}.$$

Esta serie es una serie alternada cuyo término general es decreciente y, por tanto, por la acotación (9.11), se verifica que la suma de la serie es mayor que las sumas parciales pares, en particular:

$$1 - \cos 2 > \frac{4}{2!} - \frac{16}{4!} \implies \cos 2 < -\frac{1}{3}.$$

Como $\cos(0) = 1$ por el teorema de Bolzano hay un mínimo número $0 < s_0 < 2$ tal que $\cos(s_0) = 0$. Por tanto $0 < \cos x$ para $0 \leqslant x < s_0$. Definimos:

$$\pi = 2s_0.$$

Como $\cos(\pi/2) = 0$ deducimos que $\operatorname{sen}(s_0) = \pm 1$, pero como $\operatorname{sen}'(x) = \cos x$, se sigue que la función seno es creciente en $[0, s_0]$ y, como $\operatorname{sen}(0) = 0$, resulta que debe ser $\operatorname{sen}(s_0) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1$. Usando ahora los teoremas de adición se obtiene fácilmente que:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(\pi) = 2\operatorname{sen}(\pi/2)\cos(\pi/2) = 0, & \cos(\pi) = \cos^2(\pi/2) - \operatorname{sen}^2(\pi/2) = -1 \\ \operatorname{sen}(2\pi) = 2\cos(\pi)\operatorname{sen}(\pi) = 0, & \cos(2\pi) = \cos^2(\pi) - \operatorname{sen}^2(\pi) = 1. \end{array}$$

Deducimos que:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \cos(2\pi) + \cos x \operatorname{sen}(2\pi) = \operatorname{sen} x,$$

lo que prueba que la función seno es periódica con período 2π. Lo que implica que su derivada, la función coseno, también es periódica con igual período.

A partir de las funciones seno y coseno ya podemos definir todas las demás funciones trigonométricas como lo hicimos en el capítulo 2. Tú mismo puedes completar este estudio.

La definición de las funciones exponencial y trigonométricas por medio de series de potencias tiene, desde un punto de vista matemático, todas las ventajas posibles pues las definiciones dadas prueban la existencia de dichas funciones y permiten obtener con comodidad sus propiedades principales. Además, y esto es fundamental, dichas definiciones se extienden exactamente igual al campo complejo porque las series de potencias reales y complejas tienen las mismas propiedades de convergencia. Esto no quiere decir, ni mucho menos, que debas olvidar el significado de las funciones seno y coseno de la trigonometría elemental. Simplemente, debes saber que las funciones seno y coseno analíticas tal como las acabamos de definir, y las funciones seno y coseno de la trigonometría elemental tal como se definen para ángulos de un triángulo rectángulo, son funciones que se relacionan a través del concepto de "medida de un ángulo", y en cada situación concreta debes adoptar el punto de vista más adecuado a la misma.

10.5. Teorema de aproximación de Weierstrass

Muchas funciones continuas no son derivables, es claro que dichas funciones no pueden representarse por medio de series de potencias. Por otra parte, dado un conjunto finito de puntos en el plano, $\{(x_k, y_k) : 1 \leqslant k \leqslant n\}$, es fácil construir una función polinómica P que interpole dichos puntos, es decir, cuya gráfica pase por todos ellos, $P(x_k) = y_k$ para $1 \leqslant k \leqslant n$. Dada una función continua en un intervalo $[a, b]$, parece intuitivo que si tomamos una partición de $[a, b]$ con un número suficientemente grande de puntos, $\{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$, y es P una función polinómica que interpola los correspondientes puntos en la gráfica de f, esto es los puntos del conjunto $\{(x_k, f(x_k)) : 1 \leqslant k \leqslant n\}$, entonces dicha función polinómica P coincide con f en todos los puntos x_k y debería ser una buena aproximación de la función f en todo el intervalo $[a, b]$.

Aunque las cosas no son exactamente así, un notable resultado debido a Weierstrass afirma que, efectivamente, es posible aproximar uniformemente en un intervalo cerrado y acotado una función continua por una función polinómica. Pero no debes hacerte una idea falsa de la situación. Las cosas no son tan simples como pudieran parecer a primera vista. Ello se debe a que una función continua puede oscilar demasiado, de hecho puede oscilar tanto que no sea derivable en ningún punto. El primer ejemplo de una función continua que no es derivable en ningún punto (¿puedes imaginar la gráfica de una función así?) fue dado por Weierstrass en 1872. Su función era:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

donde a es un número impar, $0 < b < 1$ y $ab > 1 + 3\pi/2$. Observa que f está definida como la suma de una serie de funciones continuas (¡de clase C^{∞}!) que converge absolutamente y uniformemente en $\mathbb{R}$ (porque para todo $x \in \mathbb{R}$ es $|b^n \cos(a^n \pi x)| \leqslant b^n$ y la serie $\sum b^n$ converge por ser $0 < b < 1$). Por tanto, f es una función continua en $\mathbb{R}$. Weierstrass demostró que f no es derivable en ningún punto. Te digo esto para que aprecies que el problema de aproximar una función continua por una función polinómica en todos los puntos de un intervalo no es un fácil problema de interpolación.

De las variadas demostraciones que hay del citado resultado de Weierstrass, vamos a exponer la basada en los polinomios de Bernstein porque, además de ser la más elemental, proporciona unos polinomios concretos para realizar la deseada aproximación.

10.38 Definición. Dada una función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ el polinomio de Bernstein de orden n de f es la función polinómica:

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Necesitaremos usar algunas identidades que se deducen fácilmente de la igualdad siguiente.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Derivando esta igualdad una vez respecto a x y multiplicando después por x obtenemos:

$$xn(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} kx^k y^{n-k}.$$

Derivando la primera igualdad dos veces respecto a x y multiplicando después por x^2 obtenemos:

$$x^2 n(n-1)(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)x^k y^{n-k}.$$

Haciendo en las anteriores igualdades $y = 1 - x$ y definiendo, por comodidad de notación, $b_k^n(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, obtenemos las siguientes igualdades:

$$1 = \sum_{k=0}^{n} b_k^n(x) \tag{10.12}$$

$$nx = \sum_{k=0}^{n} k b_k^n(x) \tag{10.13}$$

$$n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) b_k^n(x) \tag{10.14}$$

Usando estas igualdades deducimos que:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 b_n^k(x) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 b_n^k(x) - 2nx \sum_{k=0}^{n} k b_n^k(x) + n^2x^2 \sum_{k=0}^{n} b_n^k(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{n}(k(k-1)+k) b_n^k(x) - 2n^2x^2 + n^2x^2 = \\ &= n(n-1)x^2 + nx - n^2x^2 = nx(1-x).\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 b_n^k(x) = nx(1-x). \tag{10.15}$$

10.39 Teorema (Weierstrass (1868)). *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función continua. Dado* $\varepsilon > 0$, *hay una función polinómica* P_ε *que verifica que*

$$|f(x) - P_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon$$

para todo $x \in [a,b]$.

Demostración. Haremos primero la demostración en el caso de que el intervalo $[a,b]$ es el intervalo $[0,1]$. Como f es continua y $[0,1]$ es un intervalo cerrado y acotado, sabemos que f está acotada en $[0,1]$ y es uniformemente continua en $[0,1]$. Sea $M > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in [0,1]$. Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad uniforme de f, existe un $\delta > 0$, tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para todos } x, y \in [0,1] \text{ tales que } |x-y| < \delta. \tag{10.16}$$

Acotaremos ahora el error que se comete al aproximar f por su polinomio de Bernstein de orden n. Tenemos que:

$$\begin{aligned} |f(x)-B_n(f)(x)| &= \left| f(x)-\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_n^k(x)\right| \stackrel{(10.12)}{=} \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right) b_n^k(x)\right| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n}\left| f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| b_n^k(x). \end{aligned} \tag{10.17}$$

Donde hemos usado que $b_n^k(x) \geqslant 0$. Acotaremos ahora la diferencia $f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)$ según que $\left|x-\frac{k}{n}\right| < \delta$ o $\left|x-\frac{k}{n}\right| \geqslant \delta$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} &\left|x-\frac{k}{n}\right| < \delta \stackrel{(10.16)}{\Longrightarrow} \left| f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \\ &\left|x-\frac{k}{n}\right| \geqslant \delta \Longrightarrow \frac{|nx-k|}{n\delta} \geqslant 1 \Longrightarrow \left| f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \\ &\leqslant |f(x)| + \left| f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant 2M \leqslant \frac{2M}{n^2\delta^2}(nx-k)^2 \end{aligned}$$

Podemos resumir las dos acotaciones obtenidas en una sola de la forma:

$$\left| f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n^2\delta^2}(nx-k)^2. \tag{10.18}$$

Esta desigualdad es válida para todo $x \in [0,1]$ y para todo $k = 0,1,2,\dots,n$. Usando ahora (10.17),deducimos que:

$$\begin{aligned} |f(x)-B_n(f)(x)| &\leqslant \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{n^2\delta^2}(nx-k)^2\right) b_n^k(x) \stackrel{(10.12)}{=} \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2 b_n^k(x) = \\ &\stackrel{(10.15)}{=} \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{n^2\delta^2}nx(1-x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{n\delta^2}. \end{aligned}$$

Donde hemos tenido en cuenta que para $x \in [0,1]$ es $x(1-x) \leqslant 1$. Hemos probado así que para todo $x \in [0,1]$ se verifica que:

$$|f(x)-B_n(f)(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{n\delta^2}.$$

Tomando ahora $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant n_0$ se verifique que $\frac{2M}{n\delta^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, concluimos que para todo $n \geqslant n_0$ y para todo $x \in [0,1]$ se verifica que:

$$|f(x)-B_n(f)(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Podemos tomar como polinomio P_ε del enunciado cualquier polinomio $B_n(f)$ con $n \geqslant n_0$.

Observa que hemos probado que la sucesión de polinomios de Bernstein de f converge uniformemente a f en $[0,1]$.

En el caso general de un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ y una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$, podemos proceder como sigue. Consideremos la función $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $g(t)=f(a+t(b-a))$ para todo $t\in[0,1]$. La función g es continua en $[0,1]$ por ser f continua en $[a,b]$. Dado $\varepsilon>0$, por la ya probado, hay un polinomio de Bernstein de g, $B_n(g)$, tal que para todo $t\in[0,1]$ es:

$$|g(t)-B_n(g)(t)|\leqslant\varepsilon.$$

Teniendo ahora en cuenta que para $x\in[a,b]$ se tiene que $\frac{x-a}{b-a}\in[0,1]$, deducimos que para todo $x\in[a,b]$ se verifica que:

$$\left|g\left(\frac{x-a}{b-a}\right)-B_n(g)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right|\leqslant\varepsilon.$$

Puesto que $f(x)=g\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$, y $P_\varepsilon(x)=B_n(g)\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$ es un polinomio por ser composición de dos polinomios, obtenemos que para todo $x\in[a,b]$ es $|f(x)-P_\varepsilon(x)|\leqslant\varepsilon$. □

El polinomio

$$B_n(g)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)=\sum_{k=0}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n-k}$$

es, por definición, el polinomio de Bernstein de orden n de f en $[a,b]$. Hemos probado que la sucesión de dichos polinomios converge uniformemente a f en $[a,b]$.

10.40 Corolario. *Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es límite uniforme en dicho intervalo de una sucesión de funciones polinómicas.*

10.5.1. Ejercicios propuestos

474. Estudia la convergencia uniforme en intervalos de la forma $[0,a]$ y $[a,+\infty[$ donde $a>0$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x\geqslant 0$ por:

$$f_n(x)=\frac{2nx^2}{1+n^2x^4}.$$

475. Estudia la convergencia uniforme en $[0,1]$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para $x\in]0,1]$ por $f_n(x)=x^n\log(1/x)$, y $f_n(0)=0$.

476. Dado $\alpha\in\mathbb{R}$, consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}$, donde $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ es la función definida para todo $x\in[0,1]$ por:

$$f_n(x)=n^\alpha x(1-x^2)^n.$$

¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[0,1]$? ¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[\rho,1]$, donde $0<\rho<1$?

477. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f_n(x) = n(\cos x)^n \operatorname{sen} x.$$

Estudia la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ y la convergencia uniforme en los intervalos $[0, a]$ y $[a, \pi/2]$ donde $0 < a < \pi/2$.

478. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n \operatorname{sen} x} \qquad 0 < x < \pi.$$

Estudia la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ así como la convergencia uniforme en intervalos del tipo $]0, a]$, $[a, \pi[$ y $[a, b]$ donde $0 < a < b < \pi$.

479. Estudia la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ donde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por:

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

480. Estudia la convergencia uniforme en intervalos de la forma $]-\infty, -a]$, $[-a, a]$ y $[a, +\infty[$ donde $a > 0$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas por $f_n(x) = n \operatorname{sen}(x/n)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

481. Estudia la convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \in \mathbb{R}_o^+$ por:

$$f_n(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{n + x}{1 + nx}\right).$$

482. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$f_n(x) = \frac{x}{n^a(1 + nx^2)} \qquad (x \geqslant 0).$$

Prueba que la serie $\sum f_n$:

a) Converge puntualmente en $\mathbb{R}_o^+$ si $a > 0$, y la convergencia es uniforme en semirrectas cerradas que no contienen al cero.

b) Converge uniformemente en $\mathbb{R}_o^+$ si $a > 1/2$.

483. Estudia la convergencia puntual y uniforme de la serie $\sum f_n$ donde, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función dada por:

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Sea $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, la función suma de la serie. Calcula $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} F(x)$ y $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} F(x)$.

Sugerencia. Para $x > 0$ se tiene que

$$\int_k^{k+1} \frac{x}{1 + t^2 x^2}\,dt \leqslant f_k(x) = \int_k^{k+1} \frac{x}{1 + k^2 x^2}\,dt \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{x}{1 + t^2 x^2}\,dt\,.$$

484. Estudia la convergencia puntual y uniforme de la serie $\sum f_n$ donde

$$f_n(x) = \frac{n^{n+1}}{n!} x^n \, \mathrm{e}^{-nx} \quad (x \geqslant 0).$$

485. En cada uno de los siguientes ejercicios se especifica un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, se define una función $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$. Se pide estudiar la convergencia puntual en Ω de la sucesión de funciones, $\{f_n\}$, así como la convergencia uniforme en los conjuntos $A \subset \Omega$ que se indican en cada caso.

a) $\Omega =]0, \frac{\pi}{2}[$, $f_n(x) = n^2 (\operatorname{tg} x)^n (1 + \cos 4x)$, $A = [0, a]$, $A = [a, \frac{\pi}{4}]$, $0 < a < \frac{\pi}{4}$.

b) $\Omega = \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = n\big(\sqrt[n]{x} - 1\big)$, $A = [a, b]$, $A =]0, a]$, $A = [b, +\infty[$, $0 < a < b$.

c) $\Omega = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, $A = [a, b]$, $a < b$.

d) $\Omega =]-1, +\infty[$, $f_n(x) = n \log\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$, $A =]-1, a]$, $A = [a, +\infty[$, $a > -1$.

e) $\Omega = \mathbb{R}_o^+$, $f_n(x) = n^\alpha x \, \mathrm{e}^{-nx}$ (donde $\alpha > 0$ es un número fijo), $A = [a, +\infty[$, $a > 0$. ¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$?

486. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones que converge uniformemente a una función f en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Supongamos que $f_n(A) \subset [a, b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$; y sea φ una función continua en $[a, b]$. Prueba que la sucesión $\{\varphi \circ f_n\}$ converge uniformemente a $\varphi \circ f$ en A.

487. Sean $\alpha > 0$ y $\{f_n\}$ la sucesión de funciones definida por:

$$f_n : \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \left(\frac{1 + nx}{n + x^2}\right)^\alpha.$$

Estudia la convergencia puntual y uniforme en $\mathbb{R}_o^+$ y en intervalos del tipo $[0, a]$ donde $a > 0$.

Sugerencia. Puede usarse el ejercicio anterior con $\varphi(x) = x^\alpha$.

488. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$f_n(x) = \left(\cos \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Estudia la convergencia puntual de la sucesión $\{f_n\}$ y la convergencia uniforme en intervalos cerrados y acotados.

489. Sea $f : \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ una función continua, no idénticamente nula con $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $f(0) = 0$. Sean $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ las sucesiones de funciones definidas por $f_n(x) = f(nx)$, $g_n(x) = f(x/n)$, para todo $x \in \mathbb{R}_o^+$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Prueba que:

a) $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen puntualmente a cero en $\mathbb{R}_o^+$ pero la convergencia no es uniforme en $\mathbb{R}_o^+$.

b) La sucesión $\{f_n g_n\}$ converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}_o^+$.

490. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 e $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y acotado.

a) Prueba que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que cualesquiera sean $x, y \in I$ con $0 < |x - y| < \delta$ se verifica que $\left| \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(y) \right| \leqslant \varepsilon$.

b) Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos:

$$f_n(x) = \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Justifica que $\{f_n'\}$ converge uniformemente a f' en I.

491. Sea $g:]-1, 1[\to \mathbb{R}$ una función no constante y continua en $x = 0$. Sea $\{f_n\}$ la sucesión de funciones definida por $f_n(x) = g(x^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in]-1, 1[$. Prueba que dicha sucesión converge uniformemente en intervalos cerrados y acotados contenidos en $]-1, 1[$, y no converge uniformemente en $]-1, 1[$.

492. Supongamos que una sucesión de funciones polinómicas converge uniformemente en $\mathbb{R}$. ¿Qué puede decirse de dicha sucesión?

Sugerencia: La condición de Cauchy puede ser útil.

493. Prueba que la función límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones uniformemente continuas también es una función uniformemente continua.

494. Prueba que $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^3 \frac{n + \operatorname{sen} x}{3n + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = 1$.

495. Supongamos que f es una función continua en $[a, b]$ y que para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se verifica que:

$$\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Prueba que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Sugerencia: Usa el teorema de aproximación de Weierstrass.

495. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : [0, 1 \to \mathbb{R}$ la función definida para todo $x \in [0, 1]$ por:

1. $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-x} \cos x \log(x + n)$.
2. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}\,\mathrm{e}^{-x^2}$.
3. $f_n(x) = \dfrac{n\sqrt{x}}{1 + n^2x^2} \cos x^2$.
4. $f_n(x) = \begin{cases} n \operatorname{sen}(nx) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$

Estudia, en cada caso, la convergencia puntual y uniforme de la sucesión $\{f_n\}$ y compara $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty} \{f_n\}$ con $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n$.

496. Da un ejemplo de una sucesión de funciones que converge uniformemente en $\mathbb{R}$ tal que la sucesión de las derivadas no converge puntualmente en ningún punto de $\mathbb{R}$.

497. Da un ejemplo de una sucesión de funciones que no converge en ningún punto de $\mathbb{R}$ y cuya sucesión de derivadas converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

498. Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f_n(x) = \operatorname{arc\,tg}(x/n)$. Prueba que:

a) $\{f_n\}$ converge puntualmente a cero en $\mathbb{R}$ pero la convergencia no es uniforme.

b) $\{f_n'\}$ converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$.

499. Sea $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x}$. Prueba que la serie $\sum f_n$ converge puntualmente en $\mathbb{R}^+$. Estudia la continuidad y derivabilidad de la función suma de la serie: $f(x) = \sum\limits_{n}^{\infty} f_n(x)$.

500. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones que converge uniformemente a una función f en un intervalo $[a, +\infty[$. Supongamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = a_n \in \mathbb{R}$. Prueba que la sucesión $\{a_n\}$ es convergente y que f tiene límite en $+\infty$, siendo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\}$.

Sugerencia. La condición de Cauchy permite probar la convergencia de $\{a_n\}$.

501. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas que converge puntualmente a una función f en un intervalo $[a, b[$, $(a < b \leqslant +\infty)$, siendo la convergencia uniforme en todo subintervalo cerrado y acotado contenido en $[a, b[$. Supongamos, además, que hay una función positiva g cuya integral es convergente en $[a, b[$ y tal que $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ para todo $x \in [a, b[$. Prueba que las integrales de f_n y f son convergentes en $[a, b[$ y que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

502. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - x^2/n\right)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{n} \\ 0 & \text{si } x \geqslant \sqrt{n} \end{cases}$$

a) Demuestra, haciendo uso del ejercicio anterior, que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

b) Pruébese que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} t)^{2n+1}\mathrm{d}t$, y deduce que:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

503. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a una función f en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de A que converge a un punto $x \in A$. Prueba que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

504. En cada uno de los siguientes ejercicios se especifica un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, se define una función $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$. Se pide estudiar, en cada caso, la convergencia puntual en Ω de la serie de funciones, $\sum f_n$, y la continuidad de la función suma $F = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

a) $\Omega = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}$.

b) $\Omega = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{x^2 + n}$.

c) $\Omega = \mathbb{R}$, $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{\operatorname{sen}(n^2 x)}{n(\log(n+1))^2}$.

d) $\Omega = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2 - x^2}$.

e) $\Omega = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $f_n(x) = \dfrac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}}$.

f) $\Omega = \mathbb{R}_o^+$, $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+nx)(1+nx+x)}$.

505. Estudia la derivabilidad de la función de Riemann $\varsigma :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$, definida para todo $x > 1$ por:

$$\varsigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Justifica también que $\displaystyle\lim_{x\to 1} \varsigma(x) = +\infty$.

506. Sea $f : \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}, \qquad (x \in \mathbb{R}_o^+).$$

Estudia la derivabilidad de f y justifica que para todo $x > 0$ es:

$$f''(x) + f(x) = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-x}}.$$

Prueba que f es continua en $\mathbb{R}_o^+$ que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, y $\displaystyle\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$. Deduce que f no es derivable en 0.

507. Sea $\sum f_n$ una serie de funciones que converge uniformemente en un conjunto A. Sea $F_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k$. Prueba que para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A se verifica que la sucesión $\{F_{2n}(x_n) - F_n(x_n)\}$ converge a cero.

508. En cada uno de los siguientes ejercicios se especifica un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, se define una función $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$. Se pide estudiar, haciendo uso de los criterios de Dirichlet o de Abel, la convergencia puntual y uniforme en Ω de la serie de funciones $\sum f_n$.

a) $\Omega = \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^2 + n}$.

b) $\Omega = [2, +\infty[$, $\quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{nx + (-1)^n}$.

c) $\Omega = [0, \pi]$, $\quad f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{n}}$.

d) $\Omega = \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)\dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$.

e) $\Omega = [-2\pi, 2\pi]$, $\quad f_n(x) = \dfrac{x \operatorname{sen}(nx)}{2\sqrt{n} + \cos x}$.

f) $\Omega = [0, 1]$, $\quad f_n(x) = \dfrac{(1-x)x^n}{\log(n+1)}$. Sea $a_n = \sup f_n([0, 1])$. Pruébese que la serie $\sum a_n$ no converge.

g) $\Omega = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\quad f_n(x) = a_n \dfrac{x^n}{1 + x^n}$, donde la serie $\sum a_n$ converge.

509. Prueba que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{x}{n}$ converge uniformemente en subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$ pero no converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Sugerencia. La condición uniforme de Cauchy no se satisface en $\mathbb{R}$. Téngase en cuenta que $\operatorname{sen} x \geqslant \sqrt{2}/2$ para $\pi/4 \leqslant x \leqslant 3\pi/4$. También puede hacerse uso del ejercicio 507 con $x_n = n\pi/2$.

510. Sea $\{a_n\}$ una sucesión creciente y no mayorada de números reales positivos. Prueba que la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida para todo $x > 0$ por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \mathrm{e}^{-a_n x}$$

es continua y:

$$\int_0^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{a_n}.$$

Aplica lo anterior a los casos particulares $a_n = n + 1$, y $a_n = 2n + 1$ para obtener las igualdades:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \log 2, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

511. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n(x) = \dfrac{x}{n^a(1 + nx^2)}$ $(x \in \mathbb{R})$. Prueba que la serie $\sum f_n$:

a) Converge puntualmente en $\mathbb{R}$ si $a > 0$, y la convergencia es uniforme en semirrectas cerradas que no contienen al cero.

b) Converge uniformemente en $\mathbb{R}$ si $a > 1/2$.

c) No converge uniformemente en $\mathbb{R}$ si $0 < a \leqslant 1/2$.

Sugerencia. Estudia el comportamiento de f_n. Para el apartado c) puede usarse el ejercicio 507.

512. Prueba que si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de números positivos y $\sum a_n \operatorname{sen}(nx)$ converge uniformemente en $[0, 2\pi]$, entonces la sucesión $\{na_n\}$ converge a cero.

Sugerencia. Usar el ejercicio 507, tomando $x_n = \dfrac{\pi}{4n}$.

513. Prueba que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \frac{x}{(1+x^2)^n}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ y calcula su suma. Calcula también $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^n}\,dx$.

514. Calcula el radio de convergencia de cada una de las series de potencias $\sum a_n x^n$, y estudia el comportamiento de la serie en los extremos del intervalo de convergencia, en los siguientes casos:

$$
\begin{array}{lll}
c_n = \dfrac{n-\sqrt{n}}{n^2+n+1}, & c_n = (n+1)^{\log(n+1)}, & c_n = \mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \\
c_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)}, & c_n = a^{\sqrt{n}}\ (a>0), & c_n = \dfrac{n!}{(n+1)^n} \\
c_n = 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}, & c_n = \dfrac{1}{2^n(n+1)}, & c_n = \dfrac{1}{\log(n+2)} \\
c_n = \dfrac{3\cdot 5\cdots(3n+1)}{5\cdot 10\cdots(5n)}, & c_n = n^{\alpha},\ \ (\alpha\in\mathbb{R}), & c_n = \dfrac{1}{1+1/2+\cdots+1/n}
\end{array}
$$

515. Calcula la función suma de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$.

516. Calcula la función suma de las series de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\frac{x^{3n}}{2^n}$ y $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n(x+3)^n}{2^n}$.

517. Dado un número natural $q\in\mathbb{N}$, prueba la igualdad

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{qn+1}.$$

Calcula el valor de la suma de las series correspondientes a los valores de $q = 1, 2, 3$.

518. Expresa la función suma de las series de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1}$, y $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n}{n+1}x^n$ por medio de funciones elementales y calcula el valor de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(n+1)}$.

519. Calcula el radio de convergencia y la suma de las series:

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^3+n+3}{n+1}x^n;\quad \sum_{n\geqslant 0}\frac{n^3}{n!}x^n;\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1+2+\cdots+n}x^n.$$

520. Calcula la función suma de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n(2n+1)}$ y deduce el valor de las sumas de las series:

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(2n+1)}\quad \text{y}\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}.$$

521. Prueba que las funciones definidas por:

$$g(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x},\ g(0)=1,\qquad f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{x},\ f(0)=1$$
$$h(x)=\frac{\cos x-1}{x^2},\ h(0)=-1/2,\quad \varphi(x)=\frac{\log(1+x)}{x},\ \varphi(0)=1$$

son de clase C^∞ en su intervalo natural de definición.

522. Prueba que la función $f:]-\pi,\pi[\to\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x)=\frac{x}{\operatorname{sen} x-x}\log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\qquad f(0)=1,$$

es de clase C^∞. Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1-\frac{1}{12}x^2}{x^4}$.

523. Calcula el desarrollo en serie de potencias centrada en un punto a de la función:

$$f(x)=\frac{2x^3-x^2+2x-7}{x^4-x^3-3x^2+x+2}.$$

524. Calcula el desarrollo en serie de potencias centrada en cero de las funciones:

$$\frac{1}{x^2+5x+6},\qquad \frac{1+x}{(1+x^2)(1-x)^2}.$$

525. Representa la función $f:]-1,1[\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=\log\dfrac{1+x}{1-x}$, como suma de una serie de potencias centrada en 0. Utiliza dicha serie para calcular $\log 2$ con ocho cifras decimales exactas.

526. Prueba que:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}+\frac{(-1)^n}{2n}+\cdots=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$$

Sugerencia. Considera la serie de potencias:

$$x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n-1}+\frac{(-1)^n}{2n}x^{2n}+\cdots$$

527. Justifica que la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, donde para todo $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ es:

$$a_{3n+1}=\frac{1}{3n+1},\ a_{3n+2}=0,\ a_{3n+3}=\frac{-1}{3n+3},$$

converge en $]-1,1[$. Sea f la función suma de dicha serie. Calcula la derivada de f, y deduce que para todo $x\in]-1,1[$ es:

$$f(x)=\frac{1}{2}\log(1+x+x^2)+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Como aplicación calcula el valor de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(3n+1)(3n+3)}$.

528. Expresa como suma de una serie de potencias centrada en cero la función:

$$f(x)=\frac{1}{3}\log\frac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

Calcula la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{1}{3n+1}$.

Sugerencia. Deriva la función dada.

529. Calcula explícitamente el valor de a_n, n= 0,1,2,... sabiendo que se verifica la siguiente relación de recurrencia:

$$a_{n+2}=-2a_{n+1}-a_n,\quad a_0=1,\ a_1=-3.$$

10.41 Estrategia. Las relaciones de recurrencia como la anterior, también llamadas "ecuaciones en diferencias finitas", se pueden resolver a veces por el método de la *función generatriz*. Se llama así a la función $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$. El proceso a seguir es el siguiente:

1. Haciendo uso de la relación de recurrencia dada se puede calcular la función generatriz *sin conocer el valor de a_n*.
2. Una vez conocida la función generatriz se obtiene su desarrollo en serie de potencias centrado en cero.

530. Resolver por el método de la función generatriz las siguientes ecuaciones en diferencias finitas:

1. $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n,\ \ n=0,1,2,\dots\ \ a_0=2,\ a_1=5.$
2. $b_{n+2}=b_{n+1}+b_n,\ \ n=1,2,\dots\ \ b_1=1,\ b_2=1.$

531. ¿Para qué números reales α se verifica que $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})\leqslant\mathrm{e}^{\alpha x^2}$ para todo $x\in\mathbb{R}$?

Sugerencia. Expresa dicha desigualdad usando series de potencias.

532. Justifica que para $-1 \leqslant x < 1$ se verifica que:

$$\int_0^x \log \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Prueba también, ya sea por cálculo directo o por razones de continuidad, que dicha igualdad es válida para $x = 1$.

533. Justifica que para $-1 < x < 1$ se verifica la igualdad:

$$\int_0^x \frac{1}{t} \log \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

¿Es dicha igualdad válida para $x = 1$?

534. Definamos $f : \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Prueba que:

a) $f(0) = \pi/4$, y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) Usando un desarrollo en serie para f, prueba que f es derivable en $\mathbb{R}^+$ y:

$$f'(x) = -2x \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\,.$$

c) Justifica que para todo $x \geqslant 0$ se verifica que:

$$f(x) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

d) Deduce de lo anterior que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

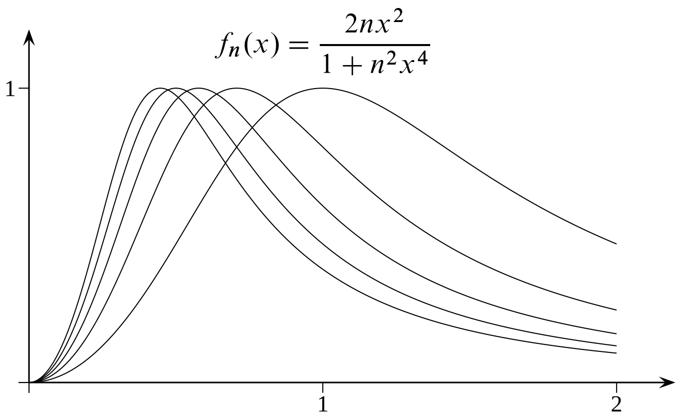
10.5.2. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{240}}$ Estudia la convergencia uniforme en intervalos de la forma $[0,a]$ y $[a,+\infty[$ donde $a > 0$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \geqslant 0$ por:

$$f_n(x) = \frac{2nx^2}{1+n^2x^4}.$$

Solución. Es evidente que $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\}=0$. Como $f_n'(x)=4nx\dfrac{1-n^2x^4}{(1+n^2x^4)^2}$, tenemos que $f_n'(1/\sqrt{n})=0$, $f_n'(x)>0$ para $0<x<1/\sqrt{n}$ y $f_n'(x)<0$ para $x>1/\sqrt{n}$. Deducimos que la función f_n es estrictamente creciente en $[0,1/\sqrt{n}]$ y estrictamente decreciente en $[1/\sqrt{n},+\infty[$, por lo que f_n alcanza un máximo valor en $\mathbb{R}_o^+$ en el punto $x_n=1/\sqrt{n}$.



Dado un número $a>0$ sea n_0 tal que $x_{n_0}<a$. Para todo $n\geqslant n_0$ tenemos que $x_n<a$, y por tanto:

$$\text{máx}\{f_n(x):0\leqslant x\leqslant a\}=f_n(x_n)=1,\quad \text{máx}\{f_n(x):x\geqslant a\}=f_n(a)$$

Como $\lim\{f_n(a)\}=0$ se sigue que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[a,+\infty[$ pero, evidentemente, no converge uniformemente en $[0,a]$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{241}$ Estudia la convergencia uniforme en $[0,1]$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para $x\in]0,1]$ por $f_n(x)=x^n\log(1/x)$, y $f_n(0)=0$.

Solución. Es evidente que $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\}=0$. Como $f_n'(x)=-\big(n\log x+1\big)x^{n-1}$ tenemos que $f_n'(x)=0$ si, y sólo si, $\log x=-1/n$, es decir, $x=\mathrm{e}^{-1/n}$. Además $f_n'(x)>0$ para $0<x<\mathrm{e}^{-1/n}$ y $f_n'(x)<0$ para $\mathrm{e}^{-1/n}<x\leqslant 1$. Deducimos que la función f_n es estrictamente creciente en $]0,\mathrm{e}^{-1/n}]$ y estrictamente decreciente en $[\mathrm{e}^{-1/n},1]$, por lo que f_n alcanza un máximo valor en $[0,1]$ en el punto $x_n=\mathrm{e}^{-1/n}$. Por tanto:

$$\text{máx}\{f_n(x):x\in]0,1]\}=f_n(\mathrm{e}^{-1/n})=\frac{1}{\mathrm{e}}\,\frac{1}{n}$$

y, deducimos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[0,1]$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{242}$ Dado $\alpha\in\mathbb{R}$, consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}$, donde $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ es la función definida para todo $x\in[0,1]$ por:

$$f_n(x)=n^\alpha x(1-x^2)^n.$$

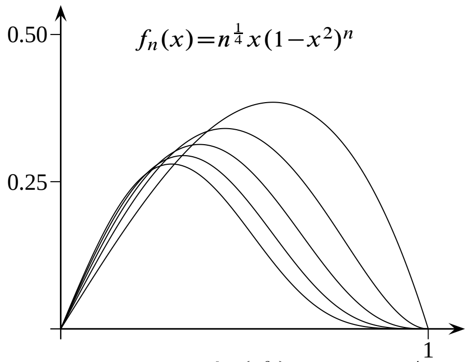
¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[0,1]$? ¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[\rho,1]$, donde $0<\rho<1$?

Solución. Observa que $f_n(0) = f_n(1) = 0$ y, si $0 < x < 1$, la sucesión $\{n^\alpha(1-x^2)^n\}$ es de la forma $\{n^\alpha\lambda^n\}$ con $0 < \lambda < 1$ por lo que $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = 0$. Por tanto, en el intervalo $[0,1]$ la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a cero.

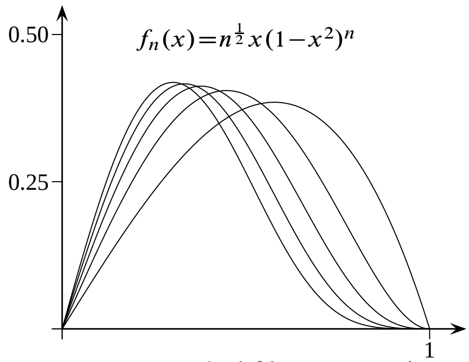
Tenemos que

$$f_n'(x) = n^\alpha(1-x^2)^{n-1}(1-(1+2n)x^2)$$

Pongamos $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+2n}}$. Entonces $f_n'(x_n) = 0$, $f_n'(x) > 0$ para $0 < x < x_n$ y $f_n'(x) < 0$ para $x_n < x < 1$. Deducimos que la función f_n es estrictamente creciente en $[0, x_n]$ y estrictamente decreciente en $[x_n, 1]$, por lo que f_n alcanza un máximo valor en $[0,1]$ en el punto x_n.



La sucesión $\{f_n\}$ para $\alpha = 1/4$



La sucesión $\{f_n\}$ para $\alpha = 1/2$

Como

$$f_n(x_n) = \frac{n^\alpha}{\sqrt{1+2n}}\left(1 - \frac{1}{1+2n}\right)^n$$

se deduce que $\lim\{f_n(x_n)\}=0$ si, y sólo si, $\alpha < 1/2$. Pot tanto, la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[0,1]$ si, y sólo si, $\alpha < 1/2$.

Dado $0 < \rho < 1$, sea n_0 tal que $x_{n_0} < \rho$. Para todo $n \geqslant n_0$ tenemos que $x_n < \rho$ y por tanto $\max\{f_n(x) : \rho \leqslant x \leqslant 1\} = f_n(\rho) \to 0$ por lo que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[\rho, 1]$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{243}}$ Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f_n(x) = n(\cos x)^n \operatorname{sen} x.$$

Estudia la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ y la convergencia uniforme en los intervalos $[0,a]$ y $[a, \pi/2]$ donde $0 < a < \pi/2$.

Solución. Es claro que $f_n(0)=f_n(\pi/2)=0$ y para $0 < x < \pi/2$ la sucesión $\{n(\cos x)^n\}$ es de la forma $\{n\lambda^n\}$ con $0 < \lambda < 1$ por lo que $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\}=0$. Por tanto, en el intervalo $[0, \pi/2]$ la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a cero. Observa también que $f_n(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [0, \pi/2]$.

Intentemos calcular el máximo absoluto de $f_n(x)$ en $[0, \pi/2]$. Tenemos que:

$$f_n'(x) = n(\cos x)^{n-1}(\cos^2(x) - n\operatorname{sen}^2(x)).$$

Sea $x_n \in]0,\pi/2[$ tal que $\cos^2(x_n) - n\operatorname{sen}^2(x_n) = 0$. Como f_n es positiva y se anula en los extremos del intervalo, es evidente que f_n alcanza su mayor valor en $[0,\pi/2]$ en el punto x_n. Observa que $x_n = \sqrt{\operatorname{arc\,tg}(1/n)} \to 0$.

Tenemos que:

$$f_n(x_n) = n(\cos(x_n))^n \operatorname{sen}(x_n).$$

Estudiar la convergencia de esta sucesión no es del todo inmediato. Pongamos $f_n(x_n) = y_n z_n$ donde $y_n = n\operatorname{sen}(x_n)$, $z_n = (\cos(x_n))^n$. Entonces:

$$y_n = n x_n \frac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n} = \sqrt{n}\sqrt{n\operatorname{arc\,tg}(1/n)}\frac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n},$$

y como $\dfrac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n} \to 1$ y $n\operatorname{arc\,tg}(1/n) \to 1$, se sigue que $y_n \to +\infty$ (de hecho, se tiene que y_n es asintóticamente equivalente a $\sqrt{n}$, esto es, $y_n \sim \sqrt{n}$).

Por otra parte, tenemos que:

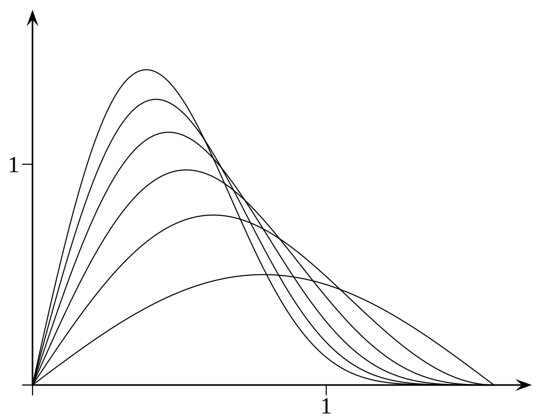
$$\log(z_n) = n\log(\cos x_n) \sim n(\cos(x_n) - 1) \sim n\frac{-1}{2}x_n^2 = \frac{-1}{2}n\operatorname{arc\,tg}(1/n) \to \frac{-1}{2}.$$

Por tanto $z_n \to \mathrm{e}^{-1/2}$. Deducimos así que $f_n(x_n) = y_n z_n \to +\infty$.

Dado un número $0 < a < \pi/2$, sea n_0 tal que $x_{n_0} < a$. Para todo $n \geqslant n_0$ tenemos que $x_n < a$. Por tanto, para todo $n \geqslant n_0$ es:

$$\text{máx}\{f_n(x) : 0 \leqslant x \leqslant a\} = f_n(x_n) \qquad \text{máx}\{f_n(x) : a \leqslant x \leqslant \pi/2\} = f_n(a).$$

Como $\{f_n(x_n)\}$ no converge a 0 se sigue que $\{f_n\}$ no converge uniformemente en $[0,a]$. Como $\{f_n(a)\} \to 0$ se sigue que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[a,\pi/2]$.



La sucesión $f_n(x) = n(\cos x)^n \operatorname{sen} x$

Hagamos este mismo ejercicio sin calcular el valor máximo de f_n, acotando de forma conveniente.

Lo primero que nos damos cuenta es de que es muy fácil probar que hay convergencia uniforme en $[a,\pi/2]$, pues como la función coseno es decreciente en $[0,\pi/2]$ y $\operatorname{sen} x \leqslant 1$, se tiene que:

$$0 \leqslant f_n(x) = n(\cos x)^n \operatorname{sen} x \leqslant n(\cos a)^n$$

para todo $x \in [a, \pi/2]$. Puesto que la sucesión $\{n(\cos a)^n\} \to 0$ (es de la forma $n\lambda^n$ con $0 < \lambda < 1$) concluimos que hay convergencia uniforme en $[a, \pi/2]$.

La situación es distinta en el intervalo $[0, a]$. Podemos sospechar que no hay convergencia uniforme en dicho intervalo. Para ello, tomemos $u_n = 1/n$. Tenemos que:

$$f_n(1/n) = n \operatorname{sen}(1/n)(\cos(1/n))^n,$$

y como $\{n \operatorname{sen}(1/n)\} \to 1$ y

$$\text{lím}\left\{(\cos(1/n))^n\right\} = \exp\left(\text{lím}\,\{n(\cos(1/n) - 1)\}\right) = \exp(0) = 1,$$

obtenemos que $\{f_n(1/n)\} \to 1$. Como, para todo $n > 1/a$ se verifica que $0 < 1/n < a$, resulta que:

$$\text{máx}\,\{f_n(x) : 0 \leqslant x \leqslant a\} \geqslant f_n(1/n)$$

y concluimos que no hay convergencia uniforme en $[0, a]$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{244}}$ Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n\colon]0, \pi[\to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n \operatorname{sen} x} \qquad 0 < x < \pi.$$

Estudia la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ así como la convergencia uniforme en intervalos del tipo $]0, a]$, $[a, \pi[$ y $[a, b]$ donde $0 < a < b < \pi$.

Solución. Evidentemente $\text{lím}\,\{f_n(x)\} = 0$. Observa también que $f_n(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]0, \pi[$. Para estudiar la convergencia uniforme en un intervalo de la forma $]0, a]$ tomemos $x_n = 1/n$. Como

$$f_n(1/n) = \frac{\operatorname{sen}^2(1)}{n \operatorname{sen}(1/n)} \to \operatorname{sen}^2(1)$$

deducimos que no hay convergencia uniforme en $]0, a]$.

Análogamente, como

$$f_n(\pi - 1/n) = \frac{\operatorname{sen}^2(n\pi - 1)}{n \operatorname{sen}(\pi - 1/n)} \to \operatorname{sen}^2(1),$$

deducimos que no hay convergencia uniforme en $[a, \pi[$.

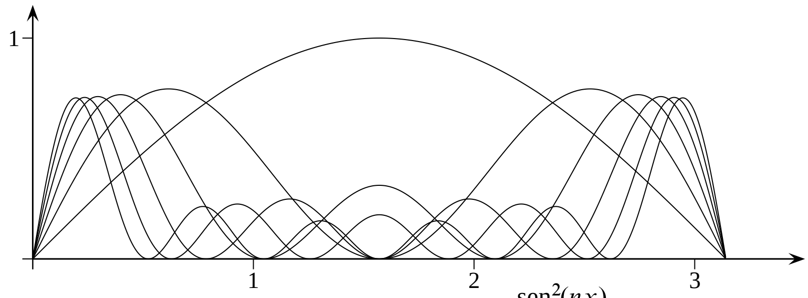
Finalmente, sea $0 < a < b < \pi$. Como $\operatorname{sen} x > 0$ para todo $x \in [a, b]$ y por el teorema de Weierstrass sabemos que tiene que haber un punto $x_0 \in [a, b]$ tal que $\operatorname{sen} x_0 \leqslant \operatorname{sen} x$ para todo $x \in [a, b]$, deducimos que:

$$0 \leqslant f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n \operatorname{sen} x} \leqslant \frac{1}{n \operatorname{sen}(x_0)},$$

y por tanto:

$$\text{máx}\,\{f_n(x) : a \leqslant x \leqslant b\} \leqslant \frac{1}{n \operatorname{sen}(x_0)}.$$

Ya que, evidentemente, $\{1/n \operatorname{sen}(x_0)\} \to 0$, concluimos que hay convergencia uniforme en $[a, b]$.



La sucesión $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n \operatorname{sen} x}$

Ejercicio resuelto $\boxed{245}$ Estudia la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ donde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por:

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Solución. Para calcular la función límite puntual hay que distinguir dos casos:

• Si $|x| < 1$, entonces $1 \leqslant \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \leqslant 1 + x^{2n}$ y por tanto $\lim\{f_n(x_n)\} = 1$.

• Si $|x| \geqslant 1$, entonces $x^2 \leqslant \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \leqslant 2^{1/n} x^2$ y por tanto $\lim\{f_n(x_n)\} = x^2$.

La función límite puntual viene dada por:

$$f(x) = \lim\{f_n(x)\} = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < 1 \\ x^2, & \text{si } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

Tenemos que:

• Si $|x| < 1$ es:

$$0 \leqslant f_n(x) - f(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} - 1 \leqslant 2^{1/n} - 1.$$

• Si $|x| \geqslant 1$ es:

$$0 \leqslant f_n(x) - f(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} - x^2 = x^2 \left(\sqrt[n]{1 + \frac{1}{x^{2n}}} - 1 \right). \tag{10.19}$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función $h(t) = \sqrt[n]{1 + t}$ en el intervalo $[0, s]$ obtenemos que $\dfrac{h(s) - h(0)}{s} = h'(c)$ donde c es algún punto del intervalo $]0, s[$. Como:

$$h'(c) = \frac{1}{n}(1 + c)^{1/n - 1} \leqslant \frac{1}{n},$$

se sigue que $h(s) - h(0) = sh'(c) \leqslant \dfrac{s}{n}$. Tomando $s = \dfrac{1}{x^{2n}}$ resulta que

$$\sqrt[n]{1 + \frac{1}{x^{2n}}} - 1 = h(1/x^{2n}) - h(0) \leqslant \frac{1}{nx^{2n}} \leqslant \frac{1}{nx^2}$$

Deducimos ahora de (10.19) que $0 \leqslant f_n(x) - f(x) \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Finalmente:

$$\text{máx}\,\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leqslant \text{máx}\left\{2^{1/n} - 1, \frac{1}{n}\right\} \to 0$$

y concluimos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Observa que, aunque la convergencia es uniforme y todas las funciones f_n son derivables en $\mathbb{R}$, la función límite, f, no es derivable en $x = 1$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{246}}$ Estudia la convergencia uniforme en intervalos de la forma $]-\infty, -a]$, $[-a, a]$ y $[a, +\infty[$ donde $a > 0$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas por $f_n(x) = n\ \text{sen}(x/n)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución. Definamos la función

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad \varphi(t) = \frac{\text{sen}\, t}{t} \quad (t \neq 0), \quad \varphi(0) = 1$$

Con ello, tenemos que $f_n(x) = x\varphi(x/n)$ y, como $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) = 1$, deducimos que la función límite puntual de la sucesión viene dada por:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Dado $a > 0$, es fácil comprobar que no hay convergencia uniforme en $[a, +\infty[$, pues para todo $n \geqslant a$ se tiene que:

$$\text{máx}\,\{|f(x) - f_n(x)| : x \geqslant a\} \geqslant f(n) - f_n(n) = n(1 - \text{sen}(1)) \to +\infty.$$

Análogamente se prueba que no hay convergencia uniforme en $]-\infty, -a]$.

Estudiemos si hay convergencia uniforme en $[-a, a]$. Para todo $x \in [-a, a]$ tenemos que:

$$|f(x) - f_n(x)| = |x - x\varphi(x/n)| = |x||1 - \varphi(x/n)| \leqslant a|1 - \varphi(x/n)|.$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que $|1 - \varphi(t)| < \varepsilon/a$ siempre que $|t| < \delta$. Tomemos un número natural n_0 tal que $1/n_0 < \delta/a$. Entonces, para todo $n \geqslant n_0$ y para todo $x \in [-a, a]$ se tiene que $|x/n| \leqslant a/n \leqslant a/n_0 < \delta$, por lo que:

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant a|1 - \varphi(x/n)| < \varepsilon,$$

y por tanto, para todo $n \geqslant n_0$ es $\text{máx}\,\{|f(x) - f_n(x)| : x \in [-a, a]\} < \varepsilon$. Hemos probado así que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[-a, a]$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{247}}$ Estudia la convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \in \mathbb{R}_o^+$ por:

$$f_n(x) = \text{arc tg}\left(\frac{n + x}{1 + nx}\right).$$

Solución. Como $f_n(0) = \text{arc tg}\, n$, y $\lim\limits_{t\to+\infty} \text{arc tg}\, t = \pi/2$, la función límite viene dada por:

$$f(x) = \lim\{f_n(x)\} = \begin{cases} \text{arc tg}(1/x), & \text{si } x > 0 \\ \pi/2, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Observa que se trata de una función continua en $\mathbb{R}_o^+$. Estudiemos si hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$. Para ello es conveniente conocer el signo de la función $f_n(x) - f(x)$. Teniendo en cuenta que la función arcotangente es inyectiva, se deduce que $f_n(x) - f(x) = 0$ si, y sólo si, $(n+x)/(1+nx) = 1/x$ lo que equivale a $x = 1$ (la otra posibilidad $x = -1$ se descarta porque suponemos que $x > 0$). En consecuencia, la función $f_n(x) - f(x)$ debe tener signo constante en cada intervalo $[0,1[$ y en $]1,+\infty[$. Como:

$$f_n(0) - f(0) = \operatorname{arc\,tg} n - \pi/2 < 0, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty}(f_n(x) - f(x)) = \operatorname{arc\,tg}(1/n) > 0,$$

se sigue que $f_n(x) - f(x) < 0$ para $x \in [0,1[$, y $f_n(x) - f(x) > 0$ para $x > 1$.

Estudiemos ahora la derivada de $f_n(x) - f(x)$. Un cálculo sencillo nos da:

$$f_n'(x) - f'(x) = 2\frac{1 + 2nx + x^2}{(1+x^2)((1+n^2)x^2 + 4nx + 1 + n^2)}.$$

Por tanto $f_n'(x) - f'(x) > 0$ para todo $x > 0$. En consecuencia $f_n - f$ es una función creciente en $\mathbb{R}_o^+$. Como

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} f(x) - f_n(x), & \text{si } x \in [0,1] \\ f_n(x) - f(x), & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}$$

Resulta que la función $|f_n - f|$ es decreciente en $[0,1]$ y creciente en $[1,+\infty[$. Concluimos que

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} f(x) - f_n(x) \leqslant f(0) - f_n(0) = \pi/2 - \operatorname{arc\,tg} n, & \text{si } x \in [0,1] \\ f_n(x) - f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to+\infty}(f_n(x) - f(x)) = \operatorname{arc\,tg}(1/n), & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}$$

Por tanto, *para todo* $x \geqslant 0$, es:

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \beta_n = \text{máx}\{\pi/2 - \operatorname{arc\,tg} n, \operatorname{arc\,tg}(1/n)\},$$

y como $\{\beta_n\} \to 0$, la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}_o^+$. ☺

Ejercicio resuelto **248** Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$f_n(x) = \frac{x}{n^a(1+nx^2)} \qquad (x \geqslant 0).$$

Prueba que la serie $\sum f_n$:

a) Converge puntualmente en $\mathbb{R}_o^+$ si $a > 0$, y la convergencia es uniforme en semirrectas cerradas que no contienen al cero.

b) Converge uniformemente en $\mathbb{R}_o^+$ si $a > 1/2$.

Solución. a) Como se pide estudiar la convergencia en $\mathbb{R}_o^+$, consideraremos en lo que sigue que $x \geqslant 0$. La serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x}{n^a(1+nx^2)}$ es de términos positivos y, para $x > 0$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} n^{1+a}\frac{x}{n^a(1+nx^2)} = \frac{1}{x}.$$

Por el criterio límite de comparación (o por el criterio de Prinsheim, como se prefiera), se sigue que la serie converge si, y sólo, si $1+a>1$, es decir $a>0$.

Estudiemos la convergencia uniforme en una semirrecta del tipo $[\rho,+\infty[$, $(\rho>0)$. Como:

$$f_n'(x)=\frac{1}{n^a}\frac{1-x^2n}{(1+nx^2)^2},$$

se deduce fácilmente que f_n es creciente en $[0,1/\sqrt{n}]$ y decreciente en $[1/\sqrt{n},+\infty[$. Sea $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $1/\sqrt{n_0}<\rho$. Para todo $n\geqslant n_0$ se tiene que $1/\sqrt{n}<\rho$ por lo que f_n es decreciente en $[\rho,+\infty[$ y, por tanto, $f_n(x)\leqslant f_n(\rho)$ para todo $x\geqslant\rho$. Puesto que, para $a>0$, la serie $\sum f_n(\rho)$ converge, se sigue, por el criterio de Weierstrass, que la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en $[\rho,+\infty[$.

b) Si $a>1/2$ entonces la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(1/\sqrt{n})=\frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{a+1/2}}$ es convergente (es una serie de Riemann con exponente $a+1/2>1$). Como para todo $x\geqslant 0$ se tiene que $f_n(x)\leqslant f_n(1/\sqrt{n})$, el criterio de Weierstrass implica que la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}_o^+$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{249}$ Estudia la convergencia puntual y uniforme de la serie de funciones $\sum f_n$ donde, $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es la función dada por:

$$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}\qquad n=0,1,2,\dots$$

Sea $\displaystyle F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, la función suma de la serie. Calcula $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F(x)$ y $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)$.

Sugerencia. Para $x>0$ se tiene que

$$\int_k^{k+1}\frac{x}{1+t^2x^2}\,\mathrm{d}t\leqslant f_k(x)=\int_k^{k+1}\frac{x}{1+k^2x^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{x}{1+t^2x^2}\,\mathrm{d}t$$

Solución. Puesto que, para $x\neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} n^2\frac{|x|}{1+n^2x^2}=\frac{1}{|x|},$$

se sigue, por el criterio límite de comparación (o por el criterio de Prinsheim, como se prefiera) que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{|x|}{1+n^2x^2}$ es convergente. También converge, evidentemente, para $x=0$.

Para estudiar la convergencia uniforme veamos qué información nos da el criterio de Weierstrass. Tenemos que:

$$f_n'(x)=\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}.$$

Deducimos que f_n es creciente en $[0,1/n]$ y decreciente en $[1/n,+\infty[$. Como $f_n(-x)=-f_n(x)$, deducimos que $|f_n(x)|\leqslant f_n(1/n)=1/2n$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Como la serie $\sum 1/2n$ no es convergente el criterio de Weierstrass *no nos dice nada* acerca de la convergencia uniforme de la serie *en todo* $\mathbb{R}$ (observa que el criterio de Weierstrass da condiciones *suficientes* pero no *necesarias* para la convergencia uniforme). Sin embargo, dicho criterio sí nos proporciona información cuando consideramos un conjunto de la forma: $A_\rho = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geqslant \rho\}$, donde $\rho > 0$. Pues, tomando n_0 tal que $1/n_0 < \rho$, para todo $n \geqslant n_0$ se tiene que $1/n < \rho$, por lo que f_n es decreciente en $[\rho, +\infty[$ y, en consecuencia $|f_n(x)| \leqslant f_n(\rho)$ para todo $x \in A_\rho$. Puesto que la serie $\sum f_n(\rho)$ es convergente, el criterio de Weierstrass nos dice que $\sum f_n$ converge uniformemente en A_ρ.

La única duda que queda por resolver es si la serie converge uniformemente en algún intervalo de la forma $[-\rho, \rho]$ con $\rho > 0$ (en cuyo caso sería uniformemente convergente en todo $\mathbb{R}$). Pronto saldremos de dudas.

Calculemos los límites laterales en $x = 0$ de la función suma de la serie. Usando la sugerencia del enunciado tenemos, supuesto $x > 0$, que

$$\begin{aligned}
\int_0^{n+1} \frac{x}{1+t^2x^2}\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} \frac{x}{1+t^2x^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} \frac{x}{1+k^2x^2}\,\mathrm{d}t = \\
&= \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = x + \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{1+k^2x^2} \leqslant \\
&\leqslant x + \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{x}{1+t^2x^2}\,\mathrm{d}t = x + \int_0^{n} \frac{x}{1+t^2x^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

deducimos que:

$$\operatorname{arc\,tg}((n+1)x) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \leqslant x + \operatorname{arc\,tg}(nx).$$

Tomando límites para $n \to \infty$ en esta desigualdad obtenemos $\pi/2 \leqslant F(x) \leqslant \pi/2 + x$. Como esta desigualdad es válida para todo $x > 0$, se sigue que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = \pi/2$. Como $F(-x) = -F(x)$, se deduce que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F(x) = -\pi/2$. Por tanto, la función F tiene una discontinuidad de salto en $x = 0$.

Como las funciones f_n son continuas en $\mathbb{R}$ deducimos que la serie $\sum f_n$ no puede ser uniformemente convergente en ningún intervalo de la forma $[-\rho, \rho]$ con $\rho > 0$ pues, si así ocurriera, la función suma habría de ser continua en dicho intervalo y, por tanto sería continua en $x = 0$ lo que acabamos de probar que no es cierto.

Fíjate en que la función F sí es continua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Pues cualquier número $a \neq 0$ podemos meterlo dentro de un conveniente conjunto A_ρ, sin más que tomar $\rho < |a|$, y como la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en A_ρ, la función suma, F, es continua en A_ρ y, por la propiedad local de la continuidad, se sigue que F es continua en a. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\mathbf{250}}$ Estudia la convergencia puntual y uniforme de la serie $\sum f_n$ donde

$$f_n(x) = \frac{n^{n+1}}{n!} x^n \,\mathrm{e}^{-nx} \quad (x \geqslant 0).$$

Solución. Estudiemos la convergencia puntual. Para $x > 0$ la serie $\sum f_n(x)$ es de términos positivos y podemos aplicar el criterio del cociente. Tenemos que:

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^{n+1}}x\,\mathrm{e}^{-x} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} x\,\mathrm{e}^{-x} \to x\,\mathrm{e}^{1-x}.$$

Consideremos la función $\varphi(x) = x\,\mathrm{e}^{1-x}$. Se tiene que $\varphi'(x) = \mathrm{e}^{1-x}(1-x)$ y, fácilmente, se deduce que φ es estrictamente creciente en $[0,1]$ y estrictamente decreciente en $[1,+\infty[$. Luego para $x \geqslant 0$, $x \neq 1$ se tiene que $\varphi(x) < \varphi(1) = 1$. Por tanto, el criterio del cociente implica que la serie converge para todo número $x \geqslant 0$, $x \neq 1$.

En este caso el criterio del cociente también proporciona información para $x = 1$, pues aunque

$$\text{lím}\,\frac{f_{n+1}(1)}{f_n(1)} = \text{lím}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\mathrm{e}^{-1} = 1,$$

como la sucesión $(1+1/n)^{n+1}$ es decreciente, se tiene que dicho límite se acerca a 1 *por valores mayores que* 1, es decir $\dfrac{f_{n+1}(1)}{f_n(1)} \geqslant 1$, lo que claramente implica que $\{f_n(1)\}$ no converge a cero y, por tanto, la serie $\sum f_n(1)$ no converge por no cumplir la condición necesaria básica de convergencia para series.

Estudiemos la convergencia uniforme. Tenemos que:

$$f_n'(x) = \frac{n^{n+1}}{n!}nx^{n-1}\,\mathrm{e}^{-nx}(1-x).$$

Y, al igual que antes, se sigue que f_n es estrictamente creciente en $[0,1]$ y estrictamente decreciente en $[1,+\infty[$. Dado $\rho > 1$, para todo $x \geqslant \rho$ es $f_n(x) \leqslant f_n(\rho)$ y como la serie $\sum f_n(\rho)$ es convergente, deducimos, por el criterio de Weierstrass, que $\sum f_n$ converge uniformemente en $[\rho,+\infty[$. Análogamente se comprueba que hay convergencia uniforme en intervalos de la forma $[0,\rho]$ donde $0 < \rho < 1$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{251}}$ En cada uno de los siguientes ejercicios se especifica un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, se define una función $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$. Se pide estudiar la convergencia puntual en Ω de la sucesión de funciones, $\{f_n\}$, así como la convergencia uniforme en los conjuntos $A \subset \Omega$ que se indican en cada caso.

a) $\Omega =]0,\frac{\pi}{2}[,\quad f_n(x) = n^2(\operatorname{tg} x)^n(1+\cos 4x),\ A = [0,a],\ A = [a,\frac{\pi}{4}],\ 0 < a < \frac{\pi}{4}.$

b) $\Omega = \mathbb{R},\quad f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n,\ A = [a,b],\ a < b.$

c) $\Omega =]-1,+\infty[,\quad f_n(x) = n\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right),\ A =]-1,a],\ A = [a,+\infty[,\ a > -1.$

Solución. a) Se tiene que $f_n(0) = 0$ y $f_n(\pi/4) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $0 < x < \pi/4$ entonces $\{f_n(x)\} \to 0$ porque es una sucesión de la forma $n^2\lambda^n$ donde $0 < \lambda = \operatorname{tg} x < 1$. Para $\pi/4 < x < \pi/2$ la sucesión $\{f_n(x)\} \to +\infty$. El campo de convergencia puntual es $C = [0,\pi/4]$ y la función límite puntual es la función nula. Sea $0 < a < \pi/4$. Como la tangente es creciente en $[0,\frac{\pi}{2}[$, tenemos que:

$$\sup\{|f_n(x)| : x \in [0,a]\} \leqslant 2n^2(\operatorname{tg} a)^n$$

y, como $\{2n^2(\operatorname{tg} a)^n\} \to 0$, concluimos que hay convergencia uniforme en $[0,a]$. Hay que sospechar que no hay convergencia uniforme en $[a,\pi/4]$. Para ello sea $x_n = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{n}$ y pongamos $u_n = \operatorname{tg}(x_n)$, $v_n = n$. Tenemos que $\{u_n\} \to 1$ y $v_n \to +\infty$. Tenemos que:

$$v_n(u_n - 1) = n\big(\operatorname{tg}(x_n) - 1\big) = -\frac{\operatorname{tg}(x_n) - 1}{-\frac{1}{n}} = -\frac{\operatorname{tg}(x_n) - 1}{x_n - \frac{\pi}{4}} \to -2$$

Donde hemos usado que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = 2$ porque es la derivada de la tangente en $x = \pi/4$. Deducimos que $\big(\operatorname{tg}(x_n)\big)^n \to \mathrm{e}^{-2}$ lo que implica que $f_n(x_n) \to +\infty$. Como $\{x_n\} \to \pi/4$ y $0 < x - n < \pi/4$, dado a con $0 < a < \pi/4$ hay un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a < x_n < \pi/4$ para todo $n \geqslant n_0$. Por tanto, para $n \geqslant n_0$ se tiene que:

$$\sup\{|f_n(x)| : x \in [a,\pi/4]\} \geqslant f_n(x_n)$$

y concluimos que no hay convergencia uniforme en $[a, \frac{\pi}{4}]$.

b) La función límite puntual viene dada por:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathrm{e}^x .$$

El campo de convergencia puntual es $\mathbb{R}$ y la función límite es la función exponencial. Probaremos que hay convergencia uniforme en todo intervalo de la forma $[-\alpha,\alpha]$ donde $\alpha > 0$. Dado $\alpha > 0$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \alpha$. Para todo $x \in [-\alpha,\alpha]$ y para todo $n \geqslant n_0$ se tiene que $\frac{x}{n} \in [-\frac{\alpha}{n}, \frac{\alpha}{n}] \subset]-1,1[$, luego $1 + \frac{x}{n} > 0$. En lo que sigue supondremos que $x \in [-\alpha,\alpha]$ y $n \geqslant n_0$.

$$\left|\mathrm{e}^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right| = \mathrm{e}^x \left|1 - \exp\big(x(\varphi(x/n) - 1)\big)\right| \leqslant \mathrm{e}^\alpha \left|1 - \exp\big(x(\varphi(x/n) - 1)\big)\right| .$$

Donde:

$$\varphi(t) = \frac{\log(1+t)}{t}, \quad t > -1,\ \varphi(0) = 1.$$

Se verifica que $\lim\limits_{t\to 1} \varphi(t) = 1$ por lo que φ es una función continua. Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad de la exponencial en 0 hay un $\delta_1 > 0$ tal que para $|u| < \delta_1$ se verifica que $|1 - \mathrm{e}^u| < \varepsilon\,\mathrm{e}^{-\alpha}$. Por la continuidad de φ en 0 hay un número $\delta_2 > 0$ tal que para $|t| < \delta_2$ se verifica que $|\varphi(t) - 1| < \delta_1/\alpha$. Tomemos $n_1 \geqslant n_0$ tal que $\frac{\alpha}{n_1} < \delta_2$. Entonces para todo $x \in [-\alpha,\alpha]$ y para todo $n \geqslant n_1$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\frac{|x|}{n} < \delta_2 \Longrightarrow |1 - \varphi(x/n)| < \frac{\delta_1}{\alpha} \Longrightarrow \big|x\big(\varphi(x/n) - 1\big)\big| < \delta_1 \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \left|1 - \exp\big(x(\varphi(x/n) - 1)\big)\right| < \varepsilon\,\mathrm{e}^{-\alpha} \Longrightarrow \left|\mathrm{e}^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Lo que prueba que para todo $\alpha > 0$ hay convergencia uniforme en $[-\alpha,\alpha]$ y, por tanto hay convergencia uniforme en todo intervalo acotado.

c) Tenemos que para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x.$$

En el ejercicio se supone que $x > -1$ para que todas las funciones f_n estén definidas en el intervalo $]-1, +\infty[$. Por tanto, el campo de convergencia puntual es $]-1, +\infty[$ y la función límite puntual es la función identidad $f(x) = x$. Definamos $h_n(x) = x - f_n(x)$. Tenemos que:

$$h'(x) = 1 - n\frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{x}{n}} = 1 - \frac{n}{n+x} = \frac{x}{n+x}$$

Deducimos que $h_n'(x) < 0$ para $-1 < x < 0$ y $h_n'(x) > 0$ para $x > 0$. Por tanto h_n tiene en el intervalo $]-1, +\infty[$ un mínimo absoluto en $x = 0$, por lo que $h_n(x) \geqslant h_n(0) = 0$. Observa que, para $n \geqslant 2$, $h_n(-1)$ está definido y las funciones h_n son continuas en $[-1, +\infty[$. Como h_n decrece en $[-1, 0]$ y crece en $[0, +\infty[$, para todo $n \geqslant 2$ y todo $a > -1$ se tiene que:

$$\text{máx}\,\{|h_n(x)| : -1 \leqslant x \leqslant a\} = \text{máx}\,\{h_n(-1), h_n(a)\} \to 0.$$

Por tanto hay convergencia uniforme en $]-1, a]$. Por otra parte se tiene que:

$$h_n(n) = n - n\log 2 = n(1 - \log 2) \to +\infty.$$

Lo que implica que no hay convergencia uniforme en ningún intervalo de la forma $[a, +\infty[$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{252}}$ Sea $f : \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ una función continua, no idénticamente nula con $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $f(0) = 0$. Sean $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ las sucesiones de funciones definidas por $f_n(x) = f(nx)$, $g_n(x) = f(x/n)$, para todo $x \in \mathbb{R}_o^+$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Prueba que:

a) $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen puntualmente a cero en $\mathbb{R}_o^+$ pero la convergencia no es uniforme en $\mathbb{R}_o^+$.

b) La sucesión $\{f_n g_n\}$ converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}_o^+$.

Solución. El apartado a) es inmediato. Haremos el apartado b). Observa que en las hipótesis hechas para f la función $|f|$ está acotada, de hecho alcanza un máximo absoluto en $\mathbb{R}_o^+$. Sea $M > 1$ tal que $|f(x)| \leqslant M$. Dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis hay números $0 < a < b$ tales que para $0 \leqslant x \leqslant a$ y para $x \geqslant b$ se verifica que $|f(x)| \leqslant \varepsilon/M$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b/n_0 < a$. Para todo $n \geqslant n_0$ y para todo $x \in [a, b]$ se tiene que $x/n < a$ y por tanto $|g_n(x)| < \varepsilon/M$, lo que implica que $|f_n(x)g_n(x)| = |f_n(x)||g_n(x)| \leqslant M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$. Si $0 \leqslant x \leqslant a$ entonces también $0 \leqslant x/n \leqslant a$ y si $b \leqslant x$ también es $b \leqslant nx$, en cualquier caso, se sigue que $|f_n(x)g_n(x)| < \varepsilon$. Por tanto, para todo $n \geqslant n_0$ y para todo $x \in \mathbb{R}$ es $|f_n(x)g_n(x)| < \varepsilon$, lo que prueba que la convergencia es uniforme en $\mathbb{R}$. ☺

10.42 Observación. El producto de dos sucesiones de funciones uniformemente convergentes puede no ser uniformemente convergente. Considera el ejmplo trivial en que las sucesiones son $f_n(x) = 1/n$ (una sucesión de funciones constantes que converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$) y $g_n(x) = x$ (una sucesión constante, formada por una sola función, que evidentemente converge uniformemente a dicha función en $\mathbb{R}$). El producto es la sucesión de funciones $f_n(x)g_n(x) = x/n$ que converge puntualmente a cero pero la convergencia no es uniforme en $\mathbb{R}$.

El ejercicio anterior proporciona un ejemplo de dos sucesiones de funciones que no convergen uniformemente y cuyo producto converge uniformemente.

Puedes probar como fácil ejercicio que si $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en un conjunto A, y g es una función *acotada* en A entonces la sucesión $\{gf_n\}$ converge uniformemente a gf en A.

Ejercicio resuelto $\boxed{253}$ Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función de clase C^1 e $I=[a,b]$ un intervalo cerrado y acotado.

a) Prueba que para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que cualesquiera sean $x,y\in I$ con $0<|x-y|<\delta$ se verifica que $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}-f'(y)\right|\leqslant\varepsilon$.

b) Para cada $n\in\mathbb{N}$ definamos:

$$f_n(x)=\frac{n}{2}\int\limits_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Justifica que $\{f_n'\}$ converge uniformemente a f' en I.

Solución. El apartado a) es consecuencia fácil de la continuidad uniforme de f' en $[a,b]$ y del teorema del valor medio. Haremos el apartado b). Tenemos que:

$$f_n'(x)=2n\Big(f\big(x+\frac{1}{n}\big)-f\big(x+\frac{1}{n}\big)\Big)=\frac{f\big(x+\frac{1}{n}\big)-f\big(x-\frac{1}{n}\big)}{x-\frac{1}{n}-\big(x-\frac{1}{n}\big)}.$$

Ahora basta escribir:

$$\left|f_n'(x)-f'(x)\right|\leqslant\left|\frac{f\big(x+\frac{1}{n}\big)-f\big(x-\frac{1}{n}\big)}{x+\frac{1}{n}-\big(x-\frac{1}{n}\big)}-f'\left(x-\frac{1}{n}\right)\right|+\left|f'\left(x-\frac{1}{n}\right)-f'(x)\right|$$

y usando el apartado a) y la continuidad uniforme de f' en $[a,b]$ se sigue que $\{f_n'\}$ converge uniformemente a f' en $[a,b]$.

Ejercicio resuelto $\boxed{254}$ Supongamos que f es una función continua en $[a,b]$ y que para todo $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ se verifica que:

$$\int\limits_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

Prueba que $f(x)=0$ para todo $x\in[a,b]$.

Sugerencia. Usa el teorema de aproximación de Weierstrass.

Solución. La hipótesis hecha implica que para toda función polinómica $p(x)$ se verifica que $\int\limits_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x=0$. Por el teorema de aproximación de Weierstrass hay una sucesión $\{p_n\}$ de funciones polinómicas que converge uniformemente e f en $[a,b]$. Como f es continua, está acotada en $[a,b]$ por lo que la sucesión $\{p_nf\}$ converge uniformemente a f^2 en $[a,b]$. Por tanto:

$$\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b \lim_{n\to\infty}p_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b p_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

Como f^2 es continua y positiva, deducimos que para todo $x\in[a,b]$ debe ser $f^2(x)=0$, esto es, $f(x)=0$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{255}$ Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones que converge uniformemente a una función f en un intervalo $[a,+\infty[$. Supongamos que, para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=a_n\in\mathbb{R}$. Prueba que la sucesión $\{a_n\}$ es convergente y que f tiene límite en $+\infty$, siendo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\}$.

Sugerencia. La condición de Cauchy permite probar la convergencia de $\{a_n\}$.

Solución. Dado $\varepsilon>0$, por la condición de Cauchy para la convergencia uniforme, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para todos $n,m\geqslant n_0$ y para todo $x\geqslant a$ se tiene que $|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\varepsilon$. Tomando límites en esta desigualdad para $x\to+\infty$ se deduce que $|a_n-a_m|\leqslant\varepsilon$. Por tanto la sucesión $\{a_n\}$ cumple la condición de Cauchy y, por tanto, es convergente. Sea $a=\lim\{a_n\}$.

Dado $\varepsilon>0$, hay un $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geqslant n_0$ y para todo $x\geqslant a$ es $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon/3$ y también $|a_n-a|<\varepsilon/3$. Pongamos:

$$|f(x)-a|\leqslant\left|f(x)-f_{n_0}(x)\right|+\left|f_{n_0}(x)-a_{n_0}\right|+\left|a_{n_0}-a\right|<\frac{2\varepsilon}{3}+\left|f_{n_0}(x)-a_{n_0}\right|.$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f_{n_0}(x)=a_{n_0}$, existe $K>a$ tal que para todo $x\geqslant K$ se verifica que $\left|f_{n_0}(x)-a_{n_0}\right|<\varepsilon/3$. Concluimos, a la vista de la anterior desigualdad, que para todo $x\geqslant K$ se verifica que $|f(x)-a|<\varepsilon$. Hemos probado así que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{256}$ En cada uno de los siguientes ejercicios se especifica un conjunto $\Omega\subset\mathbb{R}$ y, para cada $n\in\mathbb{N}$, se define una función $f_n:\Omega\to\mathbb{R}$. Se pide estudiar, en cada caso, la convergencia puntual en Ω de la serie de funciones, $\sum f_n$, y la continuidad de la función suma $F=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

a) $\Omega=\mathbb{R},\ f_n(x)=\mathrm{e}^{-nx}$.

b) $\Omega=\mathbb{R},\ f_n(x)=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{x^2+n}$.

c) $\Omega=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ f_n(x)=\dfrac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$.

Solución. a) Se trata de una serie geométrica de razón e^{-x}, por tanto, dicha serie converge si, y sólo si, $\mathrm{e}^{-x}<1$, esto es, $x>0$. El campo de convergencia puntual es $\mathbb{R}^+$. En este caso podemos calcular la función suma de la serie:

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\qquad x>0.$$

Es una función continua en $\mathbb{R}^+$. Este resultado también puede obtenerse sin necesidad de calcular la función suma. Para ello, observamos que la serie converge uniformemente en semirrectas de la forma $[a,+\infty[$ donde $a>0$, pues para todo $x\geqslant a$ se verifica que $\mathrm{e}^{-nx}\leqslant e^{-na}$ y, como la serie $\sum\mathrm{e}^{-na}$ es convergente, el criterio de convergencia uniforme de Weierstrass nos dice que la serie converge uniformemente en toda semirrecta del tipo $[a,+\infty[$ con $a>0$ y, en consecuencia, como es una serie de funciones continuas, la función suma es continua en toda semirrecta del tipo indicado. Por el carácter local de la continuidad, concluimos que la función suma es continua en $\mathbb{R}^+$.

b) Sea $a > 0$. Para todo $x \in [-a, a]$ se tiene que:

$$f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{x^2 + n} = \frac{x^2}{n(x^2 + n)} \leqslant \frac{x^2}{n^2} \leqslant \frac{a^2}{n^2}.$$

Como la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente, deducimos por el criterio de convergencia uniforme de Weierstrass, que la serie converge uniformemente en todo intervalo del tipo $[-a, a]$ y, por tanto, en todo intervalo acotado. Deducimos también que el campo de convergencia puntual es todo $\mathbb{R}$ y que la función suma es continua en $\mathbb{R}$.

Observa que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{n}$. Esto nos dice que no hay convergencia uniforme en semirrectas de la forma $[a, +\infty[$, porque el resultado visto en el ejercicio resuelto 255 implica que, si hubiera convergencia uniforme, la serie $\sum \frac{1}{n}$ debería ser convergente, cosa que no es cierto.

c) Sea $0 < a < 1$. Para $-a \leqslant x < a$ se tiene que $0 \leqslant x^{2^{n+1}} \leqslant a^{2^{n+1}}$ lo que implica que:

$$0 \leqslant \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}} \leqslant \frac{a^{2^n}}{1 - a^{2^{n+1}}}.$$

Como la sucesión $\{a^{2^{n+1}}\}$ es decreciente, se tiene que $1 - a^{2^{n+1}} \geqslant 1 - a^4 > 0$ y deducimos que:

$$0 \leqslant \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}} \leqslant \frac{a^{2^n}}{1 - a^4}.$$

Como $a^{2^n} \leqslant a^{2n}$ y la serie $\sum a^{2n}$ es convergente por ser una serie geométrica de razón $0 < a^2 < 1$, se sigue, por el criterio de comparación, que la serie $\sum a^{2^n}$ es convergente. El criterio de convergencia uniforme de Weierstrass implica que la serie dada converge uniformemente en $[-a, a]$. Deducimos que la serie converge puntualmente en $]-1, 1[$ y que la función suma es continua en dicho intervalo.

Análogamente, usando que $f_n(1/x) = -f_n(x)$, se prueba que la serie converge uniformemente en conjuntos de la forma $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geqslant a\}$ donde $a > 1$. Por tanto el campo de convergencia puntual es todo Ω y la función suma es continua en Ω. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{257}$ Sea $\sum\limits_n f_n$ una serie de funciones que converge uniformemente en un conjunto A. Sea $F_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$. Prueba que para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A se verifica que la sucesión $\{F_{2n}(x_n) - F_n(x_n)\}$ converge a cero.

Solución. Dado $\varepsilon > 0$, por la condición da Cauchy para la convergencia uniforme, hay un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $q > n \geqslant n_0$ y para todo $x \in A$ se verifica que $\left|F_q(x) - F_n(x)\right| \leqslant \varepsilon$. Haciendo en esta desigualdad $q = 2n$ resulta que para todo $x \in A$ es $|F_{2n}(x) - F_n(x)| \leqslant \varepsilon$. En particular para $x = x_n \in A$ se tiene que $|F_{2n}(x_n) - F_n(x_n)| \leqslant \varepsilon$, desigualdad que es válida para todo $n \geqslant n_0$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{258}$ En cada uno de los siguientes ejercicios se especifica un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, se define una función $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$. Se pide estudiar, haciendo uso de los criterios de Dirichlet o de Abel, la convergencia puntual y uniforme en Ω de la serie de funciones $\sum f_n$.

a) $\Omega = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^2+n}$.

b) $\Omega = [2, +\infty[, \quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{nx + (-1)^n}$.

c) $\Omega = [0, \pi], \quad f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{n}}$.

Solución. a) Pongamos $g_n(x) = \dfrac{1}{x^2+n}$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ es monótona decreciente. Además como para todo $x \in \mathbb{R}$ es $0 < g_n(x) \leqslant \frac{1}{n}$, se verifica que $\{g_n\}$ converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$. El criterio de convergencia uniforme de Leibniz nos dice que la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$. Observa que no hay convergencia absoluta en ningún punto. ☺

b) Pongamos:

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{nx + (-1)^n} = \frac{(-1)^n\big(nx - (-1)^n\big)}{n^2x^2 - 1} = (-1)^n \frac{nx}{n^2x^2-1} - \frac{1}{n^2x^2-1}.$$

Como para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \geqslant 2$ se verifica que $0 < \dfrac{1}{n^2x^2-1} \leqslant \dfrac{1}{4n^2-1}$ y la serie $\sum \frac{1}{4n^2-1}$ es convergente, se sigue, por el criterio de Weierstrass que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2x^2-1}_n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Pongamos $g_n(x) = \dfrac{nx}{n^2x^2-1}$. Se comprueba enseguida que $g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x)$. Además:

$$g_n'(x) = -\frac{n + x^2n^3}{(n^2x^2-1)^2}$$

Por lo que g_n es decreciente. En consecuencia, para todo $x \geqslant 2$ se verifica que $0 < g_n(x) \leqslant g_n(2)$. Puesto que $\{g_n(2)\} \to 0$, deducimos que la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente a cero en $[2, +\infty[$. El criterio de convergencia uniforme de Leibniz nos dice que la serie $\sum (-1)^n g_n$ converge uniformemente en $[2, +\infty[$.

Hemos probado así que $\sum f_n$ es la suma de dos series uniformemente convergentes en $[2, +\infty[$ y, por tanto, ella misma es uniformemente convergente en dicho intervalo. Observa que no hay convergencia absoluta en ningún punto del intervalo. ☺

c) Como la sucesión $\{1/\sqrt{n}\}$ es decreciente y converge a 0, parece apropiado aplicar el criterio de Dirichlet. Hemos visto en el ejercicio resuelto 42 que:

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(kx) = \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

Por lo que, para cada $0 < x \leqslant \pi$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $|G_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x/2)}$. El criterio de Dirichlet 9.43 nos dice que la serie $\sum f_n(x)$ es convergente. Puesto que para

$x=0$ la serie es trivialmente convergente, concluimos que el campo de convergencia puntual en $[0,\pi]$. Supongamos que $0<a<\pi$. Entonces como la función seno es positiva y creciente en $[0,\pi/2]$ se verificará que $0<\operatorname{sen}(a/2)\leqslant\operatorname{sen}(x/2)$ para todo $x\in[a,\pi]$. Resulta así que:

$$|G_n(x)|\leqslant\frac{1}{\operatorname{sen}(a/2)}.$$

Desigualdad que es válida para todo $n\in\mathbb{N}$ y para todo $x\in[a,\pi]$. Por tanto, la sucesión $\{G_n\}$ está uniformemente acotada en $[a,\pi]$. El criterio de Dirichlet 10.13 nos dice que la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en $[a,\pi]$.

Queda por estudiar si hay convergencia uniforme en $[0,a]$ donde $0<a<\pi$. Observamos que:

$$G_n(2/n)=\operatorname{sen}(1)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}\sim n\operatorname{sen}(1)\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{n}\right)\to+\infty.$$

Esto nos indica que no va a haber convergencia uniforme en $[0,a]$. De hecho, podemos usar el resultado del ejercicio resuelto 257 con $x_n=2/n$. Observa que $x_n\in[0,a]$ para todo n suficientemente grande. Tenemos que:

$$G_{2n}(x_n)-G_n(x_n)\sim n\left(\operatorname{sen}(2)\operatorname{sen}\left(\frac{2n+1}{n}\right)-\operatorname{sen}(1)\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)\to+\infty.$$

Lo que implica, por el citado ejercicio, que no hay convergencia uniforme en $[0,a]$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{259}}$ Calcula el radio de convergencia de cada una de las series de potencias $\sum c_n x^n$, y estudia el comportamiento de la serie en los extremos del intervalo de convergencia, en los siguientes casos:

$$a)\ c_n=\frac{n-\sqrt{n}}{n^2+n+1},\qquad b)\ c_n=(n+1)^{\log(n+1)},\qquad c)\ c_n=\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$d)\ c_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n+2)},\qquad e)\ c_n=a^{\sqrt{n}}\ (a>0),\qquad f)\ c_n=\frac{n!}{(n+1)^n}$$

Solución. a) Aplicando el criterio del cociente o de la raíz es muy fácil probar que $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\to1$ o que $\sqrt[n]{c_n}\to1$. Por tanto el radio de convergencia es 1. Como $c_n>0$ y $c_n\sim\frac{1}{n}$ la serie $\sum c_n x^n$ no converge para $x=1$. Se comprueba fácilmente que para $n\geqslant5$ es $c_{n+1}<c_n$ y como, además, $\{c_n\}\to0$. el criterio de Leibniz implica que la serie $\sum c_n x^n$ converge para $x=-1$. ☺

b) El criterio de la raíz nos da:

$$\sqrt[n]{(n+1)^{\log n}}=\sqrt[n]{\exp\,(\log n)^2}=\exp\left(\frac{(\log n)^2}{n}\right)\to\exp(0)=1.$$

Por tanto, el radio de convergencia es 1. No hay convergencia en 1 ni tampoco en -1 porque $\{c_n\}$ no converge a 0.

c) No es inmediato en este caso aplicar el criterio del cociente ni el de la raíz. Pero sabemos que:

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}=\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

Por tanto $\mathrm{e}-(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \sim \dfrac{\mathrm{e}}{2}x_n$ siempre que $\{x_n\} \to 0$. En particular, tenemos que:

$$c_n = \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{\mathrm{e}}{2}\frac{1}{n}.$$

Por tanto, recordando las observaciones 10.25, se sigue que la serie dada tiene el mismo radio de convergencia que la serie $\sum \frac{\mathrm{e}}{2}\frac{1}{n}x^n$. Pero esta serie tiene, evidentemente, radio de convergencia $R=1$. Para $x=1$ la serie dada no converge porque $0<c_n \sim \frac{\mathrm{e}}{2}\frac{1}{n}$ y se aplica el criterio límite de comparación con la serie armónica. Para $x=-1$ la serie $\sum(-1)^n c_n$ es una serie alternada y $\{c_n\}$ es decreciente y convergente a 0, luego dicha serie converge en virtud del criterio de Leibniz. ☺

d) Se aplica el criterio del cociente.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = c_n = \frac{2n+3}{2n+4} \to 1.$$

El radio de convergencia es $R=1$. Para estudiar la convergencia para $x=1$ se aplica el criterio de Raabe y para $x=-1$ el criterio de Leibniz. ☺

f) Aplicamos el criterio del cociente.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}}\frac{(n+1)^n}{n!} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+1} \to \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

El radio de convergencia es $R=\mathrm{e}$. La serie no converge para $x=\pm\,\mathrm{e}$ porque la sucesión $\{c_n\,\mathrm{e}^n_n\}$ no converge a cero. De hecho, usando la fórmula de Stirling (8.26) se tiene que:

$$c_n\,\mathrm{e}^n = \frac{n!}{(n+1)^n}\,\mathrm{e}^n \sim \frac{\sqrt{2\pi n}\,n^n\,\mathrm{e}^{-n}}{(n+1)^n}\,\mathrm{e}^n = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to +\infty.$$

☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{260}}$ Calcula la función suma de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$.

Solución. Empezamos viendo para qué valores de x la serie dada converge absolutamente. Para ello, aplicamos el criterio del cociente a la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{|x|^{2n}}{n(2n-1)}$. Pongamos $a_n = \dfrac{|x|^{2n}}{n(2n-1)}$. Puesto que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|^{2(n+1)}}{(n+1)(2n+1)}\frac{n(2n-1)}{|x|^{2n}} = |x|^2\frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)} \to |x|^2,$$

deducimos que la serie dada converge absolutamente si $|x|^2<1$, es decir, si $|x|<1$. Deducimos así que $]-1,1[$ es el intervalo de convergencia de la serie. Sea $f:]-1,1[\to\mathbb{R}$ la función suma de la serie:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)} \qquad -1<x<1.$$

Recuerda que las series de potencias pueden derivarse e integrarse término a término en su intervalo de convergencia. Por tanto, para $-1 < x < 1$ tenemos que:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$
$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(x^2)^n = \frac{2}{1-x^2}.$$

Puesto que $f(0) = f'(0) = 0$, deducimos que:

$$f'(x) = \int_0^x \frac{2}{1-t^2} dt = \log(1+x) - \log(1-x).$$

Por tanto:

$$f(x) = \int_0^x (\log(1+t) - \log(1-t))\,\mathrm{d}t = (1+x)\log(1+x) + (1-x)\log(1-x) \qquad (x \in]-1, 1[).$$

☺

Ejercicio resuelto $\boxed{261}$ Calcula la función suma de las series de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\frac{x^{3n}}{2^n}$ y $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n(x+3)^n}{2^n}$.

Solución. Sea

$$f(t) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \qquad (-1 < t < 1).$$

Tenemos que:

$$tf'(t) = \frac{t}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nt^n \qquad (-1 < t < 1).$$

Haciendo en estas igualdades $t = x^3/2$, supuesto que $-1 < x^3/2 < 1$, deducimos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{x^{3n}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^3}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x^3}{2}\right)^n = \frac{1}{1-x^3/2} + \frac{x^3/2}{(1-x^3/2)^2} = \frac{4}{(x^3-2)^2}$$

Análogamente, haciendo $t = (x+3)/2$, supuesto que $-1 < (x+3)/2 < 1$, obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+3)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x+3}{2}\right)^n = \frac{x+3}{2(1+(x+3)/2)^2} = 2\frac{3+x}{(5+x)^2}.$$

☺

Ejercicio resuelto $\boxed{262}$ Dado un número natural $q \in \mathbb{N}$, prueba la igualdad:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{qn+1}.$$

Calcula el valor de la suma de las series correspondientes a los valores de $q = 1, 2, 3$.

Solución. Podemos hacer este ejercicio directamente, con un sencillo cálculo. Como sigue a continuación.

En la igualdad:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^k = \frac{1-(-1)^{n+1}u^{n+1}}{1+u},$$

hagamos $u = x^q$ para obtener:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{qk} = \frac{1-(-1)^{n+1}x^{qn+q}}{1+x^q}.$$

Integrando esta igualdad en el intervalo $[0, 1]$, obtenemos

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{qk+1} + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{qn+q}}{1+x^q}\,\mathrm{d}x\,.$$

Tomando ahora límites para $n \to \infty$, y teniendo en cuenta que:

$$\left|\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{qn+q}}{1+x^q}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{(-1)^{n+1}x^{qn+q}}{1+x^q}\right|\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{qn+q}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{qn+q+1},$$

obtenemos la igualdad:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{qn+1}.$$

Finalmente

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \log 2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\log 2}{3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$$

También podemos hacer este ejercicio teniendo en cuenta que:

$$\frac{1}{1+x^q} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (x^q)^n \qquad (|x| < 1).$$

Como las series de potencias pueden integrarse término a término en su intervalo de convergencia, se sigue que para todo $0 < t < 1$ es

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^q}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^t x^{qn}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{qn+1}}{qn+1}$$

Ahora, la serie $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \dfrac{t^{qn+1}}{qn+1}$, es una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia es $]-1,1[$ y que, en virtud del criterio de Leibniz para series alternadas, converge para $t=1$. En consecuencia, por el teorema de Abel, se verifica que dicha serie converge uniformemente en $[0,1]$ y por tanto

$$\lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{qn+1}}{qn+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{qn+1}.$$

Como, evidentemente, se verifica que

$$\lim_{t\to 1} \int_0^t \frac{1}{1+x^q}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$$

Deducimos que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{qn+1}.$$

☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\mathbf{263}}$ Expresa la función suma de las series de potencias $\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1}$, y $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{n}{n+1}x^n$ por medio de funciones elementales y calcula el valor de $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n(n+1)}$.

Solución. Sea $f(x)=\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, donde $-1<x<1$. Entonces

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} \qquad (-1<x<1).$$

También

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n \qquad (-1<x<1).$$

Integrando esta igualdad obtenemos:

$$\int_0^x \frac{t}{(1-t)^2}dx = \frac{x}{1-x}+\log(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n+1} \quad (-1<x<1).$$

Deducimos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n=\frac{1}{1-x}+\frac{\log(1-x)}{x} \qquad (-1<x<1).$$

En particular, haciendo $x=\frac{1}{2}$ resulta que $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n(n+1)}=2-2\log 2.$ ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{264}$ Calcula el radio de convergencia y la suma de las series:

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^3+n+3}{n+1}x^n;\quad \sum_{n\geqslant 0}\frac{n^3}{n!}x^n;\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1+2+\cdots+n}x^n.$$

Solución. Cualquier serie de potencias del tipo $\sum R(n)x^n$ donde $R(n)$ es una función racional de n, es decir, $R(n)=\dfrac{P(n)}{Q(n)}$ donde P y Q son funciones polinómicas, tiene radio de convergencia 1. Pues:

$$\frac{R(n+1)}{R(n)}=\frac{P(n+1)Q(n)}{P(n)Q(n+1)}$$

es cociente de dos funciones polinómicas en n que tienen el mismo grado y el mismo coeficiente líder, luego su límite para $n\to\infty$ es igual a 1.

Cualquier serie de potencias del tipo $\sum\dfrac{P(n)}{n!}x^n$ donde $P(n)$ es una función polinómica, tiene radio de convergencia infinito. Pues:

$$\frac{P(n+1)}{(n+1)!}\frac{n!}{P(n)}=\frac{P(n+1)}{P(n)}\frac{1}{n+1},$$

y basta notar que, evidentemente, $\lim\limits_{n\to\infty}P(n+1)/P(n)=1$.

Teniendo en cuenta que $1+2+\cdots+n=n(n+1)/2$ se sigue que las series primera y tercera tienen radio de convergencia 1 y la segunda serie tiene radio de convergencia $+\infty$.

Para calcular la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^3+n+3}{n+1}x^n$ lo más fácil es expresar n^3+n+3 en potencias de $n+1$. Para ello basta expresar el polinomio $P(x)=x^3+x+3$ por medio de su desarrollo de Taylor centrado en $x=-1$. Como $P(-x)=-P(x)$ la derivada segunda de P en $x=0$ es cero. Tenemos así que:

$$x^3+x+3=P(-1)+P'(-1)(x+1)+\frac{P'''(-1)}{3!}(x+1)^3=1+4(x+1)+(x+1)^3.$$

Luego

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+n+3}{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}+4+(n+1)^2\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+2n+5)x^n.$$

La serie $\sum x^n/(n+1)$ se obtiene integrando la serie geométrica $\sum x^n$ y dividiendo por x, de donde se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=-\frac{\log(1-x)}{x}\qquad(-1<x<1).$$

La suma de la serie $\sum(n^2+2n+5)x^n$ puede calcularse también derivando dos veces la serie geométrica. Seguiremos el procedimiento general para sumar series aritmético – geométricas, es decir, series del tipo $\sum Q(n)x^n$ donde $Q(n)$ es un polinomio en n.

En nuestro caso $Q(n)=n^2+2n+5$. Observa que $Q(n+1)-Q(n)=3+2n$, por tanto:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} Q(k)x^k(1-x) &= \sum_{k=0}^{n}\big(Q(k)x^k - Q(k)x^{k+1}\big)\\ &=\sum_{k=0}^{n-1}\big(Q(k+1)-Q(x)\big)x^{k+1} + Q(0) - Q(n)x^{n+1} =\\ &=\sum_{k=0}^{n-1}(3+2k)x^{k+1} + 5 - Q(n)x^{n+1}\end{aligned}$$

Tomando límites para $n\to\infty$ en esta igualdad, teniendo en cuenta que para $-1<x<1$ es $\lim\limits_{n\to\infty} Q(n)x^{n+1}=0$, se tiene:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} Q(n)x^n &= \frac{5}{1-x} + \frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}(3+2n)x^{n+1} =\\ &= \frac{5}{1-x} + \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} =\\ &= \frac{5}{1-x} + \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3} = \frac{4x^2-7x+5}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

Finalmente

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+n+3}{n+1}x^n = -\frac{\log(1-x)}{x} + \frac{4x^2-7x+5}{(1-x)^3} \qquad (-1<x<1).$$

La suma de la tercera serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1+2+\cdots+n}x^n = \sum_{n\geqslant 1}\frac{2}{n(n+1)}x^n$ puede obtenerse muy fácilmente integrando dos veces la serie geométrica. Seguiremos otro procedimiento que suele ser efectivo para sumar series de la forma $\sum R(n)x^n$ donde $R(n)$ es una función racional de n y que consiste en descomponer $R(n)$ en elementos simples. En nuestro caso tenemos

$$R(n)=\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}.$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$, se obtiene fácilmente que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}x^n = -2\log(1-x) + 2\frac{\log(1-x)+x}{x}.$$

Para sumar la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^3}{n!}x^n$, usaremos que $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$. La idea consiste en escribir el polinomio como $n^3=n(n-1)(n-2)+An(n-1)+Bn+C$. Identificando coeficientes resulta $A=3, B=1, C=0$. Por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n}{n!}x^n =$$
$$=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-3)!}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{(n-2)!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(n-1)!}x^n=(x^3+3x^2+x)\,\mathrm{e}^x$$

Este método puede usarse para sumar series del tipo $\sum \frac{P(n)}{n!}x^n$ donde $P(n)$ es un polinomio. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{265}$ Calcula la función suma de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n(2n+1)}$ y deduce el valor de las sumas de las series:

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(2n+1)} \quad \text{y} \quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}.$$

Solución. Observa que el intervalo de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(2n+1)}x^n$ es el intervalo $]-1,1[$ y que la serie converge también en los extremos del intervalo de convergencia. Sea $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ la función suma:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}x^n \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1).$$

Como consecuencia del teorema de Abel, la función f es continua en $[-1,1]$.

Nota Observa que puede aplicarse el criterio de Weierstrass en el intervalo $[-1,1]$; lo que justifica, sin necesidad de recurrir al teorema de Abel, que la serie converge uniformemente en $[-1,1]$ y, por tanto, la función f es continua en $[-1,1]$.

Por el teorema de derivación para funciones definidas por series de potencias, sabemos que la función f es indefinidamente derivable en el intervalo $]-1,1[$ y

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2n+1} \qquad (-1<x<1).$$

Por tanto:

$$xf'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1} \qquad (-1<x<1).$$

La forma que tiene f' nos sugiere considerar la función

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1<x<1)$$

que se calcula fácilmente, pues

$$g'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}.$$

Como $g(0)=0$, deducimos que

$$g(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t^2}\,dt=\frac{1}{2}\log(1+x)-\frac{1}{2}\log(1-x).$$

Ahora relacionaremos f' con g. Para $0<x<1$ tenemos que:

$$\begin{aligned}g(\sqrt{x})&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1}=\sqrt{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}=\\&=\sqrt{x}+x\sqrt{x}f'(x).\end{aligned}$$

De donde:

$$f'(x)=\frac{g(\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\log(1+\sqrt{x})-\log(1-\sqrt{x})}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\qquad(0<x<1).$$

Integrando por partes se obtiene que una primitiva de f en $]0,1[$ viene dada por:

$$h(x)=\frac{(1-\sqrt{x})\log(1-\sqrt{x})-(1+\sqrt{x})\log(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\qquad(0<x<1).$$

Deducimos que:

$$f(x)=h(x)-\lim_{x\to 0}h(x)=2+h(x)\qquad(0\leqslant x<1).$$

Como f es continua en $[-1,1]$, obtenemos que:

$$f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}=\lim_{x\to 1}f(x)=2-\lim_{x\to 1}h(x)=2-2\log 2.$$

Consideremos ahora que $-1<x<0$. Tenemos:

$$xf'(x)=-|x|f'(-|x|)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}|x|^n\qquad(-1<x<0).$$

Consideraremos ahora la función

$$\varphi(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\qquad(-1<x<1).$$

Como

$$\varphi'(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=-\frac{1}{1+x^2},$$

y $\varphi(0)=0$, deducimos que:

$$\varphi(x) = -\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = -\operatorname{arc\,tg} x.$$

Al igual que antes deducimos que:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{-x} - \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{-x})}{x\sqrt{-x}} \qquad (-1 < x < 0),$$

o lo que es igual:

$$-f'(-x) = \frac{\sqrt{x} - \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{x})}{x\sqrt{x}} \qquad (0 < x < 1).$$

Como $-f'(-x)$ es la derivada de la función $x \mapsto f(-x)$, integrando por partes se obtiene que una primitiva de la función $x \mapsto f(-x)$ en $]0,1[$ es:

$$H(x) = 2\frac{\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \log(1+x) \qquad (0 < x < 1).$$

Deducimos que

$$f(-x) = H(x) - \lim_{x\to 0} H(x) = H(x) - 2 \qquad (0 \leqslant x < 1).$$

Como f es continua en $[-1,1]$, obtenemos

$$f(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)} = \lim_{x\to 1} f(-x) = \lim_{x\to 1} H(x) - 2 = \frac{\pi}{2} + \log 2 - 2.$$

☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{266}}$ Prueba que las funciones definidas por:

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x},\ g(0)=1, \qquad f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x},\ f(0)=1$$
$$h(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2},\ h(0) = -1/2, \quad \varphi(x) = \frac{\log(1+x)}{x},\ \varphi(0)=1$$

son de clase C^∞ en su intervalo natural de definición.

Solución.

10.43 Estrategia. Para probar que una función es de clase C^∞ en un intervalo I es *suficiente* probar que dicha función es la suma de una serie de potencias convergente en el intervalo I.

Las funciones del enunciado responden todas ellas al siguiente modelo. Supongamos que tenemos una serie de potencias $\sum c_n(x-a)^n$, con radio de convergencia no nulo. Sea I el intervalo de convergencia de la serie y sea $F : I \to \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$

la función suma. En virtud del teorema de derivación para series de potencias, sabemos que la función F es de clase C^∞ en I. Sea ahora $q \in \mathbb{N}$ y consideremos la función $G : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$G(x) = \frac{F(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{q} c_k (x-a)^k}{(x-a)^{q+1}}, \quad G(a) = c_{q+1}.$$

Es evidente que

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{q+1+n}(x-a)^n \qquad x \in I.$$

Por tanto, la función G *es la suma de una serie de potencias* en el intervalo I y, por tanto, G es de clase C^∞ en I.

Teniendo en cuenta que

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n-1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n-2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n \qquad (-1 < x < 1)$$

Se sigue que las funciones g, f, h son de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ y la función φ es de clase C^∞ en $]-1,1[$. Pero es evidente que φ es de clase C^∞ en $]1/2,+\infty[$, luego φ es de clase C^∞ en $]-1,+\infty[$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{267}$ Prueba que la función $f :]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \frac{x}{\operatorname{sen} x - x} \log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right), \quad f(0) = 1,$$

es de clase C^∞. Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 1 - \frac{1}{12}x^2}{x^4}$.

Solución. Las funciones:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^n \qquad (|x-1| < 1)$$

son de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ y en $]0,2[$ respectivamente. Además:

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \; g(0) = 1; \qquad h(x) = \frac{\log x}{x-1}, \; h(1) = 1.$$

Como para todo $x \in]-\pi, \pi[$, $x \neq 0$ es $0 < g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$, tenemos que:

$$f(x) = \frac{\log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1} = h(g(x)), \quad f(0) = h(g(0)) = 1.$$

Concluimos que f es de clase C^∞ en $]-\pi, \pi[$ por ser composición de funciones de clase C^∞.

Pongamos:

$$g(x) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = -\frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 + \varphi(x).$$

Deducimos que:

$$f(x) = h(g(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(g(x)-1)^n = 1 - \frac{1}{2}(g(x)-1) + \frac{1}{3}(g(x)-1)^2 + \psi(x),$$

donde:

$$\psi(x) = (g(x)-1)^3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(g(x)-1)^{n-3}.$$

Observa que ψ es continua. Además, como para $x \to 0$ es $g(x) - 1 \sim \frac{-1}{3!}x^2$, se verifica que $(g(x)-1)^3 \sim \frac{-1}{(3!)^3}x^6$ y, por tanto, $\psi(x) = o(x^4)$ para $x \to 0$.

Haciendo las operaciones indicadas en la igualdad anterior, calculando solamente los términos hasta la potencia x^4, obtenemos:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{5!}x^4 + \frac{1}{3}\frac{1}{(3!)^2}x^4 + o(x^4) = 1 + \frac{1}{12}x^2 + \frac{11}{2160}x^4 + o(x^4).$$

Deducimos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 1 - \frac{1}{12}x^2}{x^4} = \frac{11}{2160}.$$

Puedes comprobar este resultado calculando el límite por L'Hôpital. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{268}$ Calcula el desarrollo en serie de potencias centrada en $a = 4$ de la función:

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 2x - 7}{x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2}.$$

La función que nos dan parece bastante impresionante, pero no es tan fiera como parece. Es una función racional y lo que se hace para obtener su desarrollo en serie de potencias es descomponerla en fracciones simples, algo que ya sabes hacer. Si el denominador solamente tiene raíces reales es muy sencillo calcular la serie de potencias que nos piden, porque en tal caso las fracciones simples van a ser, salvo constantes, de los dos tipos siguientes:

$$a)\ \frac{1}{x-\alpha}, \qquad b)\ \frac{1}{(x-\alpha)^n}.$$

Las fracciones del tipo a) pueden desarrollarse en serie de potencias centradas en el punto que queramos $a \neq \alpha$, basta escribir:

$$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{-1}{\alpha - a - (x-a)} = \frac{-1}{\alpha - a}\frac{1}{1-\frac{x-a}{\alpha-a}}.$$

Pero la última fracción es la suma de una serie geométrica de razón $\frac{x-a}{\alpha-a}$, por tanto, supuesto que $\left|\frac{x-a}{\alpha-a}\right| < 1$, se verifica que:

$$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{-1}{\alpha-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-a}{\alpha-a}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha-a)^{n+1}}(x-a)^n \qquad |x-a| < |\alpha-a|.$$

Derivando respecto a x esta igualdad obtenemos:

$$\frac{1}{(x-\alpha)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(\alpha-a)^{n+1}}(x-a)^{n-1} \qquad |x-a| < |\alpha-a|.$$

Las sucesivas derivadas nos dan el desarrollo en serie de potencias centrado en a de las fracciones del tipo b).

En nuestro caso, se calcula fácilmente la descomposición en fracciones simples:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}$$

Según acabamos de ver, las fracciones obtenidas puedes desarrollarlas en series de potencias centradas en cualquier punto que no sea una raíz del denominador. Te dejo que acabes tú el ejercicio.

Esto puede complicarse mucho cuando el denominador tiene raíces complejas, en cuyo caso solamente pueden obtenerse con facilidad algunos desarrollos centrados en puntos particulares (las partes reales de las raíces imaginarias). ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{269}}$ Calcula explícitamente el valor de a_n, n= 0,1,2,... sabiendo que se verifica la siguiente relación de recurrencia:

$$a_{n+2} = -2a_{n+1} - a_n, \quad a_0 = 1, \; a_1 = -3.$$

Solución. Usaremos el método de la función generatriz que se basa en la consideración de la función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Se supone que dicha función está definida en algún intervalo centrado en el origen. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^{n+2} = \\
&= a_0 + a_1 x + \sum_{n=0}^{\infty}\big(-2a_{n+1} - a_n\big)x^{n+2} = \\
&= a_0 + a_1 x - 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} - x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \\
&= a_0 + a_1 x - 2x\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - x^2 f(x) = a_0 + a_1 x - 2x(f(x) - a_0) - x^2 f(x).
\end{aligned}$$

De esta igualdad se obtiene que:

$$f(x)=\frac{a_0+a_1x+2xa_0}{1+2x+x^2}=\frac{1-x}{(1+x)^2}=\frac{1}{(1+x)^2}-x\frac{1}{(1+x)^2}=$$
$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{1}{1+x}\right)+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{1}{1+x}\right)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\right)+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\right)=$$
$$=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^n.$$

Obtenemos así que para todo $n\geqslant 1$ es $a_n=(-1)^n(2n+1)$. Puedes comprobar ahora que efectivamente se verifica la igualdad $a_{n+2}=-2a_{n+1}-a_n$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{270}$ Definamos $f:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$ por:

$$f(x)=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Prueba que:

a) $f(0)=\pi/4$, y $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

b) Usando un desarrollo en serie para f, prueba que f es derivable en $\mathbb{R}^+$ y:

$$f'(x)=-2x\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\,.$$

c) Justifica que para todo $x\geqslant 0$ se verifica que:

$$f(x)+\left(\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2=\frac{\pi}{4}.$$

d) Deduce de lo anterior que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Solución. a) Tenemos que.

$$f(0)=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\operatorname{arc\,tg}1-\operatorname{arc\,tg}0=\frac{\pi}{4}.$$

Además:
$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\right|\leqslant\left|\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\right|\leqslant\mathrm{e}^{-x^2}\,.$$

Desigualdades válidas para todo $t\in\mathbb{R}$, en particular para $t\in[0,1]$, lo que implica que:

$$0\leqslant f(x)\leqslant\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-x^2}\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

b) Tenemos que $\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{(1+t^2)^n}{n!} x^{2n}$. Por tanto:

$$f(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(1+t^2)^{n-1}}{n!} x^{2n}\,\mathrm{d}t\,.$$

Se trata de permutar la suma de la serie con la integral. Como la variable de la integral es $t \in [0,1]$, en lo que sigue consideramos que $x \in \mathbb{R}$ es un número fijo. Consideremos la serie de funciones $\sum\limits_{n\geqslant 0} g_n$ donde para $n = 0,1,2,\ldots$ $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ es la función dada para todo $t \in [0,1]$ por:

$$g_n(t) = (-1)^n \frac{(1+t^2)^{n-1}}{n!} x^{2n}.$$

En esta expresión debes considerar que x está fijo y la variable es $t \in [0,1]$. Probaremos que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} g_n$ converge uniformemente en $[0,1]$ lo que permitirá permutar la suma de la serie con la integral. Tenemos que para $n \geqslant 1$ es:

$$|g_n(t)| = \frac{(1+t^2)^{n-1}}{n!} x^{2n} \leqslant \frac{2^{n-1}}{n!} x^{2n} \leqslant \frac{2^{2n} x^{2n}}{n!} = \frac{(4x^2)^n}{n!}$$

Como también $|g_0(t)| \leqslant 1$, y la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(4x^2)^n}{n!}$ es convergente, podemos aplicar a la serie $\sum g_n$ el criterio de convergencia uniforme de Weierstrass y concluimos que dicha serie converge uniformemente en $[0,1]$. Por tanto:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n \frac{(1+t^2)^{n-1}}{n!} x^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 (-1)^n \frac{(1+t^2)^{n-1}}{n!}\,\mathrm{d}t \right) x^{2n}.$$

Como esta igualdad es válida para cualquier número real x hemos expresado la función f como suma de una serie de potencias convergente en todo $\mathbb{R}$. Por el teorema de derivación para series de potencias, tenemos que f es derivable y su derivada viene dada por:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 (-1)^n \frac{2n(1+t^2)^{n-1}}{n!}\,\mathrm{d}t \right) x^{2n-1} = \\
&= 2x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 (-1)^n \frac{(1+t^2)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t \right) x^{2n-2} = -2x \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n \frac{(1+t^2)^n}{n!} x^{2n}\,\mathrm{d}t = \\
&= -2x \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{(x^2)^n (1+t^2)^n}{n!} \right) \mathrm{d}t = -2x \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

c) Pongamos para todo $x \geqslant 0$:

$$h(x) = f(x) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \right)^2.$$

Tenemos que $h(0)=f(0)=\pi/4$ y h es una función derivable en el intervalo $[0,+\infty[$. Tenemos:

$$h'(x)=f'(x)+2\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\;=[t=xu]=f'(x)+2\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2u^2}\,x\,\mathrm{d}u=$$

$$=f'(x)+2x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2(1+u^2)}\,\mathrm{d}u\;=0.$$

Luego, h es constante y, por tanto, $h(x)=h(0)=\pi/4$ para todo $x\geqslant 0$.

d) Tomando límites para $x\to+\infty$ en la igualdad:

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\;=\sqrt{\frac{\pi}{4}-f(x)}$$

obtenemos que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\;=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. ☺

10.6. Los primeros desarrollos en serie

Puede afirmarse que la primera aparición de lo que entendemos en la actualidad como una serie ocurre en el trabajo de Viéte (1540 - 1603) *Variorum de rebus mathematicis responsorum. Liber VIII* (1593), en el que Viète estudia la serie geométrica obteniendo la fórmula para la suma de la misma y también aparece la expresión para π que se conoce como "fórmula de Viète".

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

Gregory de St. Vincent (1584 - 1667), en su *Opus Geometricum* (1647) fue el primero en afirmar explícitamente que una serie infinita puede representar una magnitud. También le debemos el poco afortunado término de "exhausción", la introducción de las coordenadas polares y el primer análisis de las paradojas de Zenón usando series. También descubrió que la cuadratura de la hipérbola $xy=k$ es la misma en $[a,b]$ que en $[c,d]$ cuando $a/b=c/d$, resultado fundamental para la comprensión de los logaritmos y que llevó al descubrimiento del logaritmo natural por Mercator.

En 1668, Nicholas Mercator (1620 - 1687) publicó un libro titulado *Logarithmotechnia* en el que proporcionaba un método para calcular logaritmos basado en el desarrollo en serie del logaritmo natural

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \tag{10.20}$$

el cual obtuvo usando los resultados de Gregory de St. Vincent.

A su vez, este resultado de Mercator fue mejorado por James Gregory (1638 - 1675) que obtuvo la expansión:

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\cdots$$

que converge más rápidamente que la anterior. A James Gregory se debe también la serie del arcotangente:

$$\operatorname{arctan} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots \tag{10.21}$$

Sustituyendo $x=1$ resulta

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

Mejores representaciones de π se deducen de esta serie haciendo como A. Sahrp (1651 - 1742) en 1705 $x=1/\sqrt{3}$, con lo que

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{3^2\cdot 5}-\frac{1}{3^3\cdot 7}+\cdots\right)$$

Con cuya serie calculó π con 72 cifras decimales. Una mejor aproximación de π que evita el uso de radicales y converge rápidamente, fue obtenida en 1706 por John Machin (1680 - 1752). La idea es expresar $\pi/4=\operatorname{arctan} 1$ en función de dos ángulos de tangentes racionales y cada una de ellas menor que la unidad. La serie de Machin es:

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arctan}\frac{1}{5}-\operatorname{arctan}\frac{1}{239}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}-\cdots\right)-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot 239^3}+\frac{1}{5\cdot 239^5}-\cdots\right)$$

Con ella calculó π con 100 cifras decimales.

10.6.1. Newton y las series infinitas

Los principales descubrimientos matemáticos de Newton en el campo del cálculo infinitesimal datan de los llamados *Anni Mirabiles* 1665 y 1666. La Universidad de Cambridge, en la que Newton se había graduado como *bachelor of arts* en 1664, estuvo cerrada por la peste esos dos años. Newton pasó ese tiempo en su casa de Woolsthorpe y, como él mismo reconoció cincuenta años después, ése fue el período más creativo de su vida.

A principios de 1665 descubre el teorema del binomio y el cálculo con las series infinitas. A finales de ese mismo año, el método de fluxiones, es decir, el cálculo de derivadas. En 1666 el método inverso de fluxiones y la relación entre cuadraturas y fluxiones. En esos dos años también inició las teorías de los colores y de la gravitación universal. Newton tenía 24 años, había nacido el día de Navidad de 1642.

Newton había leído la obra de Wallis *Arithmetica Infinitorum*, y siguiendo las ideas de interpolación allí expuestas, descubrió la serie del binomio que hoy lleva su nombre. Dicha serie es una generalización del desarrollo del binomio, que era bien conocido para exponentes naturales, y había sido muy usado por Pascal para resolver una gran variedad de problemas.

Newton, en su intento de calcular la cuadratura del círculo, es decir, de calcular la integral $\int_0^1(1-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x$, consideró dicha cuadratura como un problema de interpolación, relacionándola con las cuadraturas análogas $\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$ conocidas para exponentes naturales $n\in\mathbb{N}$.

Newton tuvo la ocurrencia de sustituir el límite superior de integración por un valor genérico x. De esta forma obtuvo las siguientes cuadraturas (Newton no disponía de símbolo para la integral; usamos, claro está, la notación actual).

$$\begin{aligned}
\int_0^x (1-t^2)\,\mathrm{d}t &= x-\frac{1}{3}x^3\\
\int_0^x (1-t^2)^2\,\mathrm{d}t &= x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\\
\int_0^x (1-t^2)^3\,\mathrm{d}t &= x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7\\
\int_0^x (1-t^2)^4\,\mathrm{d}t &= x-\frac{4}{3}x^3+\frac{6}{5}x^5-\frac{4}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9
\end{aligned}$$

Newton observó que el primer término de cada expresión es x, que x aumenta en potencias impares, que los signos algebraicos se van alternando, y que los segundos términos $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{2}{3}x^3$, $\frac{3}{3}x^3$, $\frac{4}{3}x^3$ estaban en progresión aritmética. Razonando por analogía, supuso que los dos primeros términos de $\int_0^x (1-t^2)^{1/2}\,\mathrm{d}t$ deberían ser

$$x-\frac{\frac{1}{2}}{3}x^3$$

De la misma manera, procediendo por analogía, pudo encontrar algunos términos más:

$$\int_0^x (1-t^2)^{1/2}\,\mathrm{d}t = x-\frac{\frac{1}{2}}{3}x^3-\frac{\frac{1}{8}}{5}x^5-\frac{\frac{1}{16}}{7}x^7-\frac{\frac{1}{128}}{9}x^9-\cdots$$

Representando para $n=0,1,2,\dots$ por $Q_n(x)$ el polinomio $\int_0^x (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t$, se tiene que

$$Q_n(x)=\int_0^x (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}$$

Donde

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k},\qquad \binom{n}{0}=1$$

Haciendo ahora en $Q_n(x)$, $n=1/2$, se obtiene

$$Q_{1/2}(x)=x-\frac{\frac{1}{2}}{3}x^3-\frac{\frac{1}{8}}{5}x^5-\frac{\frac{1}{16}}{7}x^7-\frac{\frac{1}{128}}{9}x^9-\cdots$$

Lo que llevó a Newton a concluir que

$$\int_0^x (1-t^2)^{1/2}\,\mathrm{d}t = Q_{1/2}(x)$$

Donde $Q_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ es una suma con infinitos términos. A partir de aquí, Newton dedujo el desarrollo de $(1-x^2)^{1/2}$ por derivación.

$$(1-x^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{1}{128}x^8 - \cdots$$

Newton nunca publicó su teorema binomial, ni dio una demostración general del mismo. La primera vez que apareció en un texto impreso fue en 1685 en un libro de Wallis (que reconoce la autoría de Newton), titulado *Treatise of Algebra*. Newton mismo, en una carta a Henry Oldenburg, el secretario de la Royal Society, conocida como la *Epistola Prior* (junio de 1676), expone el teorema binomial, a requerimiento de Leibniz, con estas oscuras palabras:

> Las extracciones de raíces resultan muy abreviadas por el teorema
>
> $$(P+PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \text{etc}$$
>
> donde $P+PQ$ representa una cantidad cuya raíz o potencia, o cuya raíz de una potencia se necesita calcular, siendo P el primer término de esa cantidad, Q los términos restantes divididos por el primero, y $\frac{m}{n}$ el índice numérico de las potencias de $P+PQ\ldots$ Por último $A = P^{m/n}$, $B = \frac{m}{n}AQ$, $C = \frac{m-n}{2n}BQ$ y así sucesivamente.

Newton era consciente de que su forma de razonar por analogía no era rigurosa por lo que comprobó su resultado de varias formas. Aplicó su algoritmo a diversos resultados conocidos, comprobando que las soluciones obtenidas eran siempre correctas, redescubrió la serie de Mercator para el logaritmo y obtuvo las series del arcoseno y del seno.

Newton encontró que el método de desarrollos en serie proporcionaba un algoritmo casi universal para calcular cuadraturas y resolver multitud de problemas. En su obra *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, escrita en 1669 y publicada en 1711, aunque circulaba en forma manuscrita entre los colegas y conocidos de Newton, propuso un método para cuadrar una curva consistente en tres reglas:

1. El área bajo la curva de ecuación $y = ax^{m/n}$ es $\dfrac{na}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$.
2. Si la ecuación $y = y(x)$ de la curva está dada por un número finito de términos $y_1 + y_2 + y_3 + \cdots$, el área bajo la curva y es igual a la suma de las áreas de todos los términos $y_1, y_2, y_3, \ldots$
3. Si la curva tiene una forma más complicada, entonces debe desarrollarse la ecuación de la curva en una serie del tipo $\sum a_k x^{r_k}$, donde r_k es un número racional, y aplicar las reglas 1 y 2.

Debe notarse que Newton supuso que cualquier cantidad analíticamente expresada podía desarrollarse en una serie de la forma $\sum a_k x^{r_k}$, donde r_k es un número racional, serie que puede ser cuadrada término a término usando la regla 1.

Veamos un ejemplo de esta forma de proceder. Se trata de calcular $\int_0^{1/4} \sqrt{x-x^2}\,dx$. Newton procede como sigue

$$(x-x^2)^{1/2} = x^{1/2}(1-x)^{1/2} = x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{3/2} - \frac{1}{8}x^{5/2} - \frac{1}{16}x^{7/2} - \frac{1}{128}x^{9/2} - \cdots$$

Por tanto

$$\int_0^{1/4}(x-x^2)^{1/2}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{1}{5}x^{5/2}-\frac{1}{28}x^{7/2}-\frac{1}{72}x^{9/2}-\frac{5}{704}x^{11/2}-\cdots\right]_0^{1/4}$$
$$= \frac{2}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{28\cdot 2^7}-\frac{1}{72\cdot 2^9}-\frac{5}{704\cdot 2^{11}}-\cdots \qquad (10.22)$$

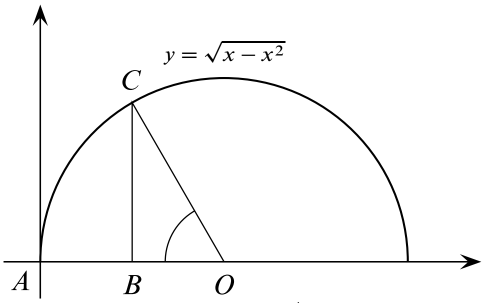


Figura 10.4. Cuadratura $\int_0^{1/4}\sqrt{x-x^2}\,dx$

En la figura 10.4 se ha representado el semicírculo de centro $(1/2,0)$ y radio $1/2$. El sector circular COA tiene amplitud $\pi/3$ por lo que su área es la tercera parte de la del semicírculo, es decir, $\pi/24$. Como $BC=\sqrt{3}/4$, el área del triángulo BOC es $\sqrt{3}/32$. Por otra parte, la integral calculada en (10.22) es el área de la región ACB. Por tanto:

$$\int_0^{1/4}(x-x^2)^{1/2}\,dx + \frac{\sqrt{3}}{32}=\frac{\pi}{24}$$

Deducimos que

$$\pi=\frac{3\sqrt{3}}{4}+24\left(\frac{2}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{28\cdot 2^7}-\frac{1}{72\cdot 2^9}-\frac{5}{704\cdot 2^{11}}-\cdots\right)$$

Y de esta forma, Newton expresa la cuadratura del círculo por medio de una serie infinita que, además, converge rápidamente.

La confianza de Newton en los procesos infinitos queda reflejada en las siguientes palabras de la citada obra *De analysi*:

> Todo lo que el análisis común [es decir, el álgebra] realiza por medio de ecuaciones con un número finito de términos, este nuevo método puede siempre conseguir lo mismo por medio de ecuaciones infinitas, de tal forma que no he tenido ninguna duda en darle asimismo el nombre de análisis. Porque el razonamiento es éste no es menos cierto que en el otro; ni las ecuaciones menos exactas; aunque nosotros los mortales, cuyo poder de razonamiento está confinado dentro de estrechos límites, no podemos expresar ni tampoco concebir todos los términos de esas ecuaciones como para conocer exactamente a partir de ellas las cantidades que deseamos... Para terminar, podemos considerar todo esto como perteneciente al *Arte Analítica*, con cuya ayuda pueden ser determinadas de una manera exacta y geométricamente las áreas, longitudes, etc., de curvas.

Es decir, Newton no sólo descubrió el teorema binomial sino que las series infinitas proporcionaban un método de análisis con la misma consistencia interna que el álgebra de ecuaciones finitas.