Capítulo 8

Integral de Riemann

8.1. Introducción

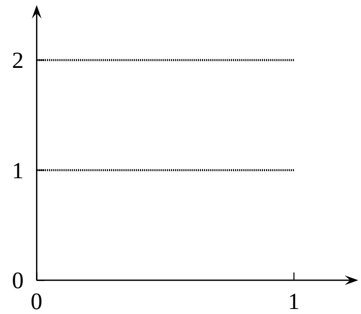
El cálculo integral tiene sus orígenes en los llamados *problemas de cuadraturas*. Inicialmente, en la antigua Grecia, dichos problemas eran geométricos y consistían en construir, siguiendo reglas precisas, un cuadrado con área igual a la de una figura plana dada. En el siglo XVII, con el descubrimiento de nuevas curvas, los aspectos geométricos de estos problemas pasaron a un segundo plano y las técnicas de cálculo ocuparon su lugar, los problemas de cuadraturas pasaron a ser simplemente problemas de cálculo de áreas y de volúmenes. Se atribuye a Eudoxo la invención del método de *exhausción*, una técnica para calcular el área de una región aproximándola por una sucesión de polígonos. Arquímedes perfeccionó este método y, entre otros resultados, calculó el área de un segmento de parábola y el volumen de un segmento de paraboloide, así como el área y el volumen de una esfera.

Sorprende que, siendo tan antiguos sus orígenes, la primera definición matemática de integral no fuera dada hasta el siglo XIX por Augustin Louis Cauchy. Una posible explicación es que, durante los siglos XVII y XVIII, la integración fue considerada como la operación inversa de la derivación; el cálculo integral consistía esencialmente en el cálculo de primitivas. Naturalmente, se conocía la utilidad de las integrales para calcular áreas y volúmenes, pero los matemáticos de la época consideraban estas nociones como dadas de forma intuitiva y no vieron la necesidad de precisar su significación matemática. Los trabajos de Joseph Fourier (1768-1830) sobre representación de funciones por series trigonométricas, hicieron que el concepto de función evolucionara, desde la idea restrictiva de función como fórmula, hasta la definición moderna de función dada por Dirichlet en 1837. Para entender el significado de la integral de estas nuevas funciones más generales se vio la necesidad de precisar matemáticamente los conceptos de área y de volumen.

La definición de la integral de Cauchy seguía la tradicional aproximación del área por rectángulos, en este sentido no era nada original; la novedad estaba en el hecho de considerar a la integral como un objeto matemático merecedor de estudio por sí mismo, y en el propósito de atribuirle un significado independiente de las técnicas que pudieran utilizarse en los cálculos. Este significado propio de la integral remite de forma inevitable a la idea de área. Ningún matemático anterior al siglo XIX había considerado necesario elaborar una teoría matemática del concepto de área; es en dicho siglo cuando el concepto de área adquiere un significado matemático preciso o, mejor dicho, varios significados matemáticos, porque dicho concepto evolucionó hasta que, en la primera década del siglo XX, adquirió esencialmente su forma actual.

Puede que a ti el concepto de área te parezca tan evidente que te resulte extraño que se dedicaran tantos esfuerzos a elaborar una teoría matemática del mismo. Es natural que pienses así. Las regiones planas y los sólidos que usualmente nos interesan para calcular su área o su volumen no son tan complicados que puedan hacernos dudar de si realmente tienen área o volumen: polígonos o poliedros, regiones limitadas por curvas o por superficies que pueden definirse por sus respectivas ecuaciones, todos ellos tiene claramente su área o su volumen y el problema real es calcularlos y no se entiende por qué hay que empeñarse en definirlos. Así pensaban también los matemáticos hasta el siglo XIX. Pero cuando empezaron a considerarse funciones cada vez más generales, las cosas cambiaron mucho. Hay funciones para las que no es evidente que su gráfica determine una región con área. El siguiente ejemplo te ayudará a entender lo que quiero decir.

8.1 Ejemplo. Considera la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ que vale 2 en los números racionales y 1 en los irracionales.



¿Te imaginas cómo es la gráfica de esa función? Parecería como la de la figura: dos segmentos de línea recta, uno de ellos $y = 1$ sobre el que tendríamos que marcar solamente los puntos irracionales del mismo, y otro $y = 2$ sobre el que tendríamos que marcar los puntos racionales. La región del plano comprendida entre el intervalo $[0,1]$ y la gráfica de f sería el conjunto formado por todos los segmentos verticales de altura 1 levantados sobre los puntos irracionales de $[0,1]$, y por todos los segmentos verticales de altura 2 levantados sobre un punto racional de $[0,1]$. ¿Tiene área este conjunto? Si decidimos que tiene área, su valor ¿es 1? ¿es 2? ¿qué significado tiene la integral $\int_0^1 f(x)\,dx$? ♦

Este ejemplo pone claramente de manifiesto que el concepto de área requiere ser precisado matemáticamente. Debes tener claro que se trata de una necesidad teórica que solamente se presenta en el estudio de la integración de funciones muy generales. Para las aplicaciones más usuales del cálculo integral puede valernos perfectamente la idea intuitiva de área o de volumen. La teoría de la integral que actualmente se considera matemáticamente satisfactoria, la llamada integral de Lebesgue, es difícil y, en mi opinión, innecesaria para los estudios de ingeniería; es una teoría imprescindible para los matemáticos y físicos teóricos, pero no lo es para la gran mayoría de los ingenieros.

En este capítulo vamos a considerar la integral desde un punto de vista esencialmente práctico. Nos interesa la integral como herramienta de cálculo y, aunque para ese propósito la integral de Cauchy sería suficiente para nosotros, estudiaremos la integral de Riemann, que es más general sin ser más complicada, y que aporta la ventaja de su gran poder heurístico como tendremos ocasión de comprobar. He reducido la teoría al mínimo indispensable para una correcta comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo cuya demostración se da con detalle, no así las de otros resultados y propiedades de la integral, de fácil comprensión conceptual, cuyas demostraciones, bastante previsibles, no me ha parecido conveniente incluir.

La integración es una de las herramientas más versátiles del Cálculo, sus aplicaciones no se limitan a calcular áreas de regiones planas o volúmenes de sólidos, también se utiliza para calcular longitudes de curvas, centros de masas, momentos de inercia, áreas de superficies, para representar magnitudes físicas como el trabajo, la fuerza ejercida por una presión, o la energía potencial en un campo de fuerzas.

8.2. Aproximaciones al área

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada. Representaremos por $G(f,a,b)$ la región del plano comprendida entre la gráfica $y=f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$. Llamaremos a dicha región el *conjunto ordenado de f entre a y b*.

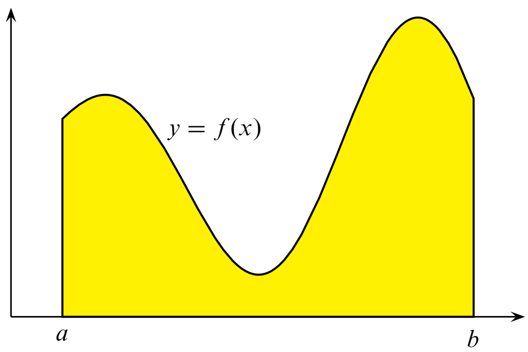


Figura 8.1. Conjunto ordenado $G(f,a,b)$ de una función

Nos proponemos calcular el área de regiones de este tipo. Puesto que, en general, $G(f,a,b)$ no puede descomponerse en triángulos o rectángulos, no hay una *fórmula* que nos permita calcular directamente su área.

En situaciones como esta, una estrategia básica consiste en obtener *soluciones aproximadas que permitan definir el valor exacto del área como límite de las mismas*. Fíjate que, al proceder así, *estamos definiendo dicho valor exacto,* es decir, *estamos dando una definición matemática del concepto intuitivo de área*[1]. Naturalmente, queremos que dicha definición sea lo más general posible, *lo que depende del tipo de soluciones aproximadas que elijamos*. Las aproximaciones consideradas en la teoría de la integral de Lebesgue conducen a un concepto de área muy general. En lo que sigue vamos a considerar las aproximaciones que conducen a la integral de Riemann.

[1]Ello trae como consecuencia inevitable que haya regiones extrañas en el plano que, según la definición dada, no tengan área.

Como los conceptos que vamos a introducir se interpretan con más facilidad cuando la función f es positiva, es conveniente tener bien presente en lo que sigue el siguiente artificio que permite representar cualquier función como diferencia de dos funciones positivas.

Cualquier función f puede escribirse como diferencia de dos funciones positivas:

$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} = \text{máx}\{f(x), 0\} \qquad f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} = \text{máx}\{-f(x), 0\}$$

Es claro que $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ y que $f^+(x) \geqslant 0$, $f^-(x) \geqslant 0$. La función f^+ se llama **parte positiva** de f, y la función f^- se llama **parte negativa** de f. Si $f(x) \geqslant 0$ se tiene que $f(x) = f^+(x)$ y $f^-(x) = 0$; mientras que si $f(x) \leqslant 0$ se tiene que $f(x) = -f^-(x)$ y $f^+(x) = 0$. Fíjate que, a pesar de su nombre y de la forma en que se simboliza, la función f^- es una función positiva. También es consecuencia de las definiciones dadas que $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.

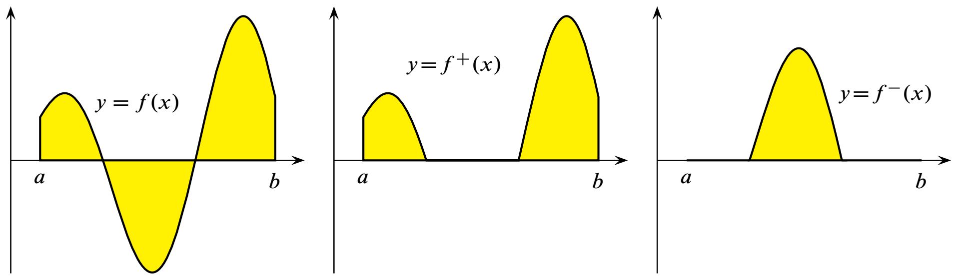


Figura 8.2. Partes positiva y negativa de una función

En la integral de Riemann el área del conjunto $G(f, a, b)$ se aproxima por rectángulos. Para ello, primero se divide el intervalo $[a, b]$ en un número finito de subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $1 \leqslant k \leqslant n$, cuyas longitudes pueden ser distintas y con la única condición de que no se solapen:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Se dice que estos puntos constituyen una **partición** de $[a, b]$. A continuación se elige en cada subintervalo un punto $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, y se forma el rectángulo cuya base es el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y altura igual a $f(t_k)$. Finalmente se forma la suma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$.

8.2 Definición. Sea $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$, y elijamos un punto $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ en cada uno de los intervalos de la misma. El número:

$$\sigma(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

se llama una **suma de Riemann** de f para la partición P.

8.3 Observaciones.

- Fíjate que, como hay libertad para elegir los puntos $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, para cada partición fijada P puede haber infinitas sumas de Riemann.

- Cuando la función f *es positiva* y suficientemente “buena”, y las longitudes de todos los subintervalos de la partición son suficientemente pequeñas, el número $\sigma(f,P)$ es una buena aproximación del área de la región $G(f,a,b)$.

- Observa que el rectángulo de altura igual a $f(t_k)$ está en el semiplano superior si $f(t_k)>0$ y en el semiplano inferior si $f(t_k)<0$. Cuando la función f toma valores positivos y negativos podemos escribir:

$$\begin{aligned}\sigma(f,P) &= \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k-x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(f^+(t_k)-f^-(t_k))(x_k-x_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} f^+(t_k)(x_k-x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f^-(t_k)(x_k-x_{k-1}) = \sigma(f^+,P)-\sigma(f^-,P)\end{aligned}$$

En este caso $\sigma(f,P)$ es una aproximación del área de $G(f^+,a,b)$ menos el área de $G(f^-,a,b)$. En la siguiente figura puede apreciarse esta aproximación.

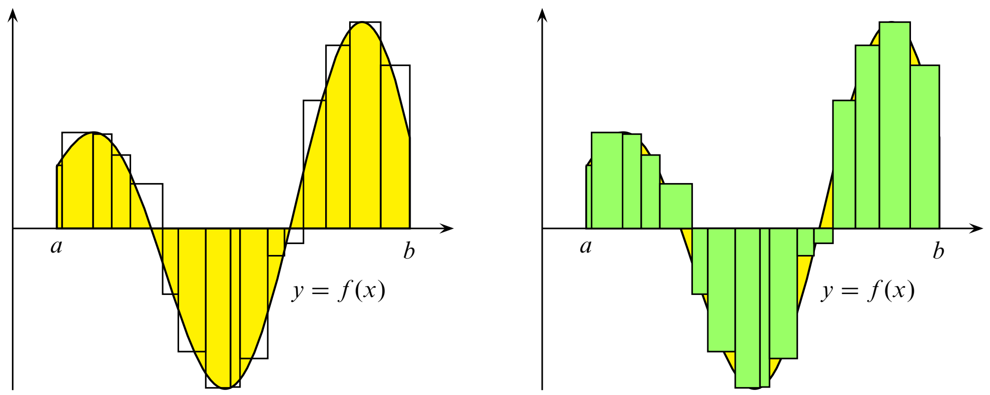


Figura 8.3. Aproximación por sumas de Riemann

8.4 Definición. Dada una partición $P=\{a=x_0,x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n=b\}$ del intervalo $[a,b]$, definamos $M_k=\sup f[x_{k-1},x_k]$, $m_k=\text{ínf}\, f[x_{k-1},x_k]$. Los números

$$S(f,P)=\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k-x_{k-1}),\qquad I(f,P)=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})$$

se llaman, respectivamente, **suma superior** y **suma inferior** de f para la partición P[2].

8.5 Observaciones.

- Puesto que para todo $t_k\in[x_{k-1},x_k]$ es $m_k\leqslant f(t_k)\leqslant M_k$, deducimos que para toda suma de Riemann, $\sigma(f,P)$, de f para la partición P es $I(f,P)\leqslant\sigma(f,P)\leqslant S(f,P)$.

- Para cada partición hay una única suma superior y otra inferior.

- Cuando f *es positiva* y suficientemente “buena”, y las longitudes de todos los subintervalos de la partición son suficientemente pequeñas, el número $S(f,P)$ es un *valor aproximado*

[2] Es para definir estas sumas para lo que se precisa que f esté acotada en $[a,b]$.

por exceso del área de la región $G(f,a,b)$, y el número $I(f,P)$ es un *valor aproximado por defecto* del área de la región $G(f,a,b)$.

- Cuando la función f toma valores positivos y negativos, el número $S(f,P)$ es un *valor aproximado por exceso* del área de $G(f^+,a,b)$ menos el área de $G(f^-,a,b)$, y el número $I(f,P)$ es un *valor aproximado por defecto* del área de $G(f^+,a,b)$ menos el área de $G(f^-,a,b)$.

En la siguiente figura pueden apreciarse estas aproximaciones.

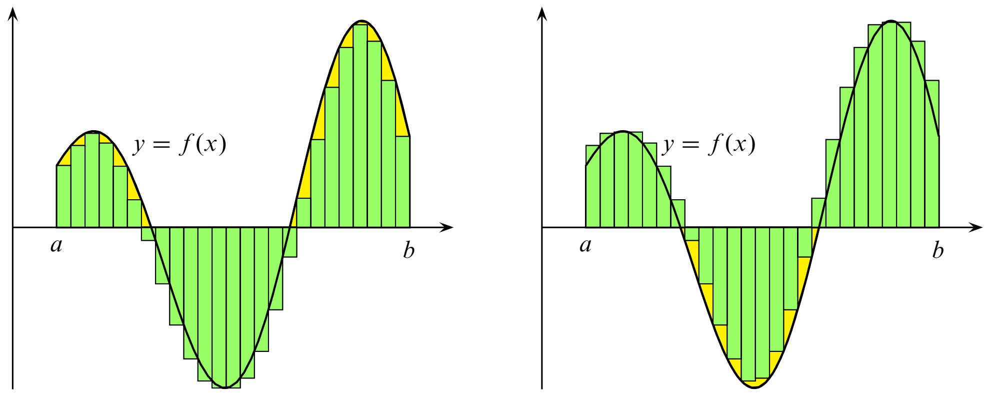


Figura 8.4. Aproximación del área por sumas inferiores y superiores

8.2.1. Definición y propiedades básicas de la integral

Supongamos que la función f es positiva en $[a,b]$. Es claro que, en tal caso, el valor exacto del área de la región $G(f,a,b)$ debe ser un número mayor o igual que toda suma inferior, $I(f,P)$, y menor o igual que toda suma superior $S(f,P)$. Tenemos, en consecuencia, ***dos*** números que son posibles candidatos para el área de $G(f,a,b)$, a saber:

$$\operatorname{ínf}\{S(f,P) : P\in\mathcal{P}[a,b]\} \quad \text{y} \quad \sup\{I(f,P) : P\in\mathcal{P}[a,b]\}.$$

Donde hemos representado por $\mathcal{P}[a,b]$ el conjunto de *todas* las particiones del intervalo $[a,b]$. Llegados aquí, podemos ya dar la definición principal de la teoría de la integral de Riemann.

8.6 Definición. Sea f una función acotada y positiva en $[a,b]$. Se dice que el conjunto $G(f,a,b)$ **tiene área** cuando

$$\operatorname{ínf}\{S(f,P) : P\in\mathcal{P}[a,b]\} = \sup\{I(f,P) : P\in\mathcal{P}[a,b]\}$$

Dicho valor común es, por definición, el valor del área y lo representaremos por $\lambda(G(f,a,b))$. Cuando esto ocurre, se dice también que la función f **es integrable Riemann** en $[a,b]$ y, por definición, la integral de f en $[a,b]$ es igual a $\lambda(G(f,a,b))$. Simbólicamente escribimos:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda(G(f,a,b))$$

En el caso general en que la función f toma valores positivos y negativos, se dice que f es integrable Riemann en $[a,b]$ cuando lo son las funciones f^+ y f^-, en cuyo caso se define la integral de f en $[a,b]$ como el número:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda(G(f^+,a,b)) - \lambda(G(f^-,a,b))$$

8.7 Observaciones.

- No te confundas con la notación. El símbolo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ representa un número. La variable x que figura en él se suele decir que es una *variable muda*. Naturalmente, la letra x no tiene ningún significado especial y puede sustituirse por la que tú quieras o no poner ninguna; por ejemplo:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad \int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s\,, \qquad \int_a^b f$$

son tres formas de escribir lo mismo. Volveremos sobre esta notación más adelante cuando estudiemos técnicas de integración.

- La definición anterior debes entenderla como una primera aproximación matemática al concepto intuitivo de área. Aunque te pueda parecer extraño, el concepto de área (y de integral) que acabamos de definir es bastante restrictivo.

- En el caso en que la función f toma valores positivos y negativos, observa que la gráfica de f^- se obtiene por simetría respecto al eje de abscisas de las partes de la gráfica de f en las que $f(x) < 0$. Como regiones simétricas respecto de una recta tienen la misma área, se sigue que:

$$\lambda(G(f,a,b)) = \lambda(G(f^+,a,b)) + \lambda(G(f^-,a,b)) = \lambda(G(f^+ + f^-,a,b)) =$$
$$= \lambda(G(|f|,a,b)) = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Seamos prácticos. ¿Cómo podemos, a partir de la definición dada, calcular $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$? Una primera idea en este sentido consiste en observar que cuanto mayor sea el número de intervalos de la partición y más pequeña la longitud de cada uno de ellos cabe esperar que la aproximación obtenida sea mejor. Para precisar esta idea, definimos **el paso de una partición** P, y lo representamos por $\Delta(P)$, como *la mayor de las longitudes de los subintervalos de dicha partición*.

8.8 Teorema (Convergencia de las sumas integrales). *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función integrable, $\{P_n\}$ una sucesión de particiones de $[a,b]$ tal que $\{\Delta(P_n)\}\to 0$ y $\sigma(f,P_n)$ una suma de Riemann de f para la partición P_n. Se verifica entonces que:*

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} I(f,P_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.1}$$

Este resultado permite en algunos casos particulares y con bastante esfuerzo e ingenio calcular ciertas integrales. Como más adelante aprenderemos a calcular integrales con facilidad, es más interesante usar dicho resultado *sensu contrario* para calcular los límites de ciertas sucesiones. Para ello se usa con frecuencia el siguiente corolario.

8.9 Corolario. *Para toda función* f *integrable en* $[0, 1]$ *se verifica que:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.2}$$

Teniendo en cuenta que cualesquiera sean las funciones f, g y los números α, β, se verifica que $\sigma(\alpha f + \beta g, P) = \alpha\sigma(f, P) + \beta\sigma(g, P)$, para toda partición P, se deduce, haciendo uso del teorema 8.8, que la integral es lineal. Esta propiedad, junto con otras propiedades básicas de las integrales se recogen en el siguiente resultado.

8.10 Proposición (Propiedades básicas de la integral).

i) ***Linealidad****. Si* f, g *son integrables en* $[a, b]$ *y* α, β *son números reales, se verifica que la función* $\alpha f + \beta g$ *también es integrable en* $[a, b]$ *y*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

ii) ***Conservación del orden****. Si* f, g *son integrables en* $[a, b]$ *y* $f(x) \leqslant g(x)$ *para todo* $x \in [a, b]$*, entonces se verifica que:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

En particular, si f *es integrable en* $[a, b]$ *y* $m \leqslant f(x) \leqslant M$ *para todo* $x \in [a, b]$*, entonces se verifica la siguiente desigualdad:*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a) \tag{8.3}$$

iii) Si f *es integrable en* $[a, b]$ *también* $|f|$ *(función valor absoluto de* f*) es integrable en* $[a, b]$ *y se verifica la desigualdad:*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \tag{8.4}$$

iv) El producto de funciones integrables Riemann también es una función integrable Riemann.

v) ***Aditividad respecto del intervalo****. Sea* $a < c < b$*. Una función* f *es integrable en* $[a, b]$ *si, y sólo si, es integrable en* $[a, c]$ *y en* $[c, b]$*, en cuyo caso se verifica la igualdad:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ha llegado el momento de preguntarse por condiciones que garanticen que una función es integrable Riemann. Nos vamos a contentar con una respuesta parcial a esta pregunta, que es suficiente para nuestros propósitos.

8.11 Teorema (Condiciones suficientes de integrabilidad Riemann). *Sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. *Cada una de las siguientes condiciones garantizan que* f *es integrable Riemann en* $[a,b]$.

i) f *está acotada en* $[a,b]$ *y tiene un número finito de discontinuidades en* $[a,b]$. *En particular, toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es integrable en dicho intervalo.*

ii) f *es monótona en* $[a,b]$.

Demostración. Según la definición dada, una función f positiva y acotada en un intervalo $[a,b]$ es integrable en $[a,b]$ cuando las aproximaciones superiores están arbitrariamente próximas de las aproximaciones inferiores al área del conjunto ordenado de f. En otros términos, una función f positiva y acotada en un intervalo $[a,b]$ es integrable en $[a,b]$ si, y sólo si, para todo $\varepsilon>0$, hay una partición P_ε de $[a,b]$ tal que $S(f,P_\varepsilon)-I(f,P_\varepsilon)\leqslant\varepsilon$[3]. Probaremos que las funciones continuas y las funciones monótonas en $[a,b]$ satisfacen esta condición.

Ses $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$, entonces sabemos que f está acotada en $[a,b]$. En particular, hay un número M tal que $f(x)\leqslant M$ para todo $x\in[a,b]$. Por tanto la función $M-f$ es continua y positiva en $[a,b]$ y, como las funciones constantes son integrables, la integrabilidad de la función $M-f$ equivale a la integrabilidad de f. Podemos, por tanto, suponer que f es positiva en $[a,b]$. En virtud del teorema 7.59 la función f es uniformemente continua en $[a,b]$. Por tanto, dado $\varepsilon>0$, hay un número $\delta>0$, tal que para todos $x,y\in[a,b]$ con $|x-y|<\delta$ se verifica que $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/(b-a)$. Sea P_ε una partición del intervalo $[a,b]$ cuyos subintervalos $I_k=[x_{k-1},x_k]$ tienen longitud menor que δ. En virtud del teorema 4.29 hay puntos $u_k, v_k\ en I_k$ en los que la función f alcanza su valor mínimo y máximo absolutos respectivamente en el intervalo I_k. Tenemos que:

$$S(f,P_\varepsilon)-I(f,P_\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}\big(f(v_n)-f(u_n)\big)(x_{k-1}-x_k)<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=0}^{n}(x_{k-1}-x_k)=\varepsilon.$$

Lo que prueba que f es integrable en $[a,b]$.

Supongamos ahora que f es continua en $]a,b[$ y acotada en $[a,b]$ pudiendo tener discontinuidades en los extremos del intervalo. Como f está acotada en $[a,b]$, podemos seguir suponiendo, por las mismas razones anteriores, que f es positiva en $[a,b]$. Sea $M>0$ tal que $f(x)\leqslant M$ para todo $x\in[a,b]$. Dado $\varepsilon>0$, consideremos un intervalo $[c,d]$ donde $a<c<d<b$ y $c-a<\varepsilon/3M$, $b-d<\varepsilon/3M$. Por la ya demostrado, como f es integrable en $[c,d]$, hay una partición Q de $[c,d]$ tal que $S(f,Q)-I(f,Q)<\varepsilon/3$. Ampliamos dicha partición a una partición del intervalo $[a,b]$ añadiéndole los puntos a y b. Llamemos a la partición de $[a,b]$ así obtenida P_ε. Tenemos que:

$$S(f,P_\varepsilon)-I(f,P_\varepsilon)\leqslant(c-a)M+S(f,Q)-I(f,Q)+(b-d)M<\varepsilon.$$

Lo que prueba que f es integrable en $[a,b]$. Si ahora se suponemos que f está acotada en $[a,b]$ y tiene un número finito de discontinuidades en $[a,b]$, llamando $d_1<d_2<\cdots<d_p$ a las

[3]Esta caracterización de la integrabilidad es válida para cualquier función acotada en $[a,b]$ sin necesidad de suponer que sea positiva.

discontinuidades de f en $[a,b]$, por la ya demostrado la función f es integrable en cada uno de los intervalos $[a,d_1]$, $[d_k,d_{k+1}]$ $(k=1,2,\dots,p-1)$, $[d_p,b]$. Por tanto f es integrable en la unión de todos ellos, es decir, en $[a,b]$.

Supongamos ahora que f es monótona en $[a,b]$. Podemos suponer que f es creciente, en cuyo caso $f(b)-f(x)\geqslant 0$ para todo $x\in[a,b]$, por lo que, al igual que hicimos antes, podemos suponer que f es creciente y positiva en $[a,b]$. Dado $\varepsilon>0$, tomemos una partición P_ε de $[a,b]$ cuyos subintervalos $I_k=[x_{k-1},x_k]$ tengan longitud menor que $\varepsilon/(f(b)-f(a))$. Tenemos que:

$$S(f,P_\varepsilon)-I(f,P_\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}\big(f(x_k)-f(x_{k-1})\big)(x_{k-1}-x_k)<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{k=0}^{n}\big(f(x_k)-f(x_{k-1})\big)=$$
$$=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(b)-f(a))=\varepsilon.$$

Lo que prueba que f es integrable en $[a,b]$. □

En relación con el punto ii) de este teorema, conviene observar que hay funciones monótonas con infinitas discontinuidades.

8.12 Ejemplo. La función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(0)=1$ y $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{E(1/x)}\frac{1}{2^n}$ para todo $x\in]0,1]$, donde $E(1/x)$ indica la parte de entera de $1/x$, es decreciente en $[0,1]$ y tiene discontinuidades en todos los puntos de la forma $\frac{1}{n+1}$ para $n=1,2,\dots$.

Observa que la función viene dada por:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}<x\leqslant 1;\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, & \frac{1}{3}<x\leqslant\frac{1}{2};\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, & \frac{1}{4}<x\leqslant\frac{1}{3};\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}, & \frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n};\\ 1, & x=0;\end{cases}$$

En la figura 8.5 puedes ver su gráfica en la que se han indicado con trazos verticales punteados las discontinuidades de salto de la función. ♦

Un tipo frecuente de funciones integrables son las que se definen a continuación.

8.13 Definición. Se dice que función f es *continua a trozos* en un intervalo $[a,b]$ si hay una partición $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ del intervalo $[a,b]$ de forma que:

- f es continua en cada intervalo $]x_{i-1},x_i[$, para $i=1,2,\dots,n$.
- f tiene límites laterales finitos en los puntos x_i, $i=0,1,\dots,n$.

Una función continua a trozos en $[a,b]$ tiene un número finito de discontinuidades y está acotada en $[a,b]$, por tanto es integrable en $[a,b]$.

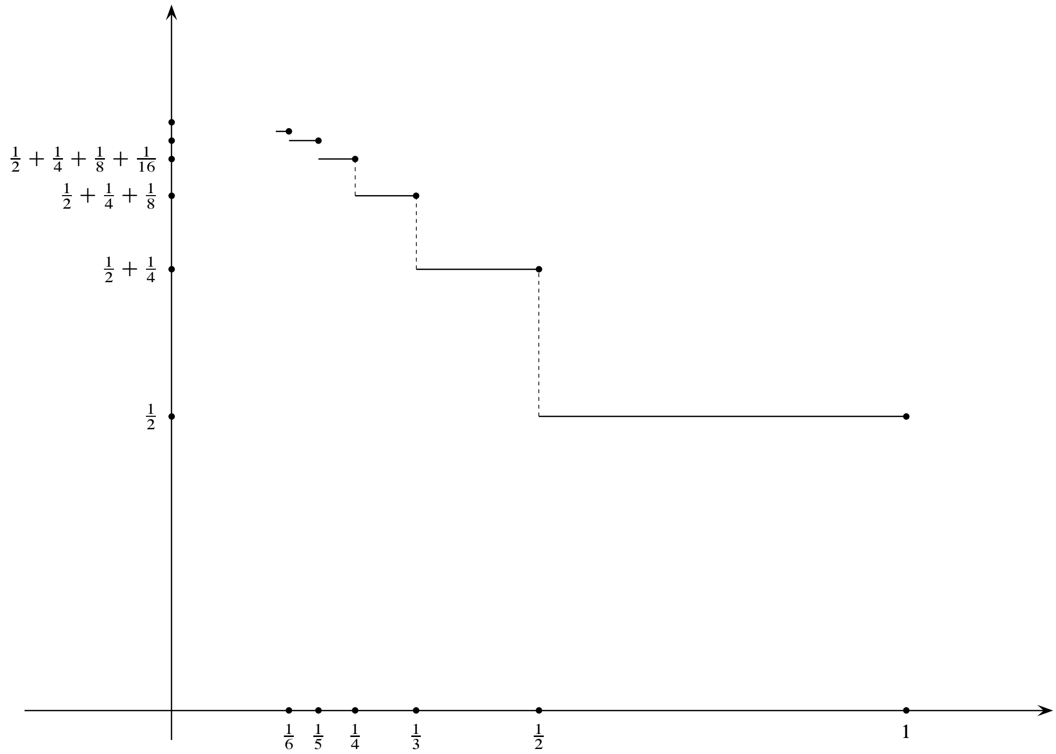


Figura 8.5. Función monótona con infinitas discontinuidades

8.14 Corolario. *Seam f y g funciones que coinciden en todos los puntos de un intervalo $[a,b]$ excepto en un número finito de ellos. Entonces se verifica que f es integrable en $[a,b]$ si, y sólo si, g es integrable en $[a,b]$, en cuyo caso se verifica que las integrales en $[a,b]$ de ambas funciones coinciden.*

Demostración. Definamos $h = f - g$. La función h es nula en todos los puntos de $[a,b]$ excepto en un conjunto finito de ellos, por tanto, h es una función continua a trozos en $[a,b]$ y, en consecuencia, h es integrable en $[a,b]$. Además, es evidente que $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 0$ (piensa que el conjunto ordenado de h entre a y b es un conjunto finito de segmentos verticales). Si, por ejemplo, f es integrable en $[a,b]$, la igualdad $g = f - h$ implica que también g es integrable en $[a,b]$ y $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. □

8.15 Observación. El resultado anterior nos dice que, para estudiar la integrabilidad de una función, podemos modificar los valores de la misma en un conjunto finito de puntos porque eso no afecta para nada a su integrabilidad ni al valor de su integral. Igualmente, si una función no está definida en un conjunto finito de puntos de un intervalo, para estudiar su integrabilidad la definimos como queramos en dichos puntos, con la seguridad de que la función resultante será o no integrable con independencia de nuestra definición. En particular, una función continua y acotada en $[a,b] \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, donde los a_j son puntos de $[a,b]$ en los que f no está definida, es integrable en $[a,b]$.

Por ejemplo, la función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ no está definida en 0. Si queremos estudiar su integrabilidad en $[0,1]$, podemos definir $f(0) = 1$ (o el valor que tú quieras); con ello, f es una función continua en $]0,1]$ y acotada en $[0,1]$, por lo que es integrable en $[0,1]$.

8.2.2. El Teorema Fundamental del Cálculo

Dada una función integrable $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, podemos definir una nueva función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ por:

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{para todo } x \in [a,b]}$$

Observa que aquí la variable es x – el límite superior de la integral. Por eso, es obligado no usar la misma letra x como variable de la función f en el integrando. $F(x)$ es la integral de la función f en el intervalo $[a,x]$.

Por definición $F(x) = \lambda(G(f^+,a,x)) - \lambda(G(f^-,a,x))$. Por supuesto, si f es positiva entonces $F(x) = \lambda(G(f,a,x))$ es el área del conjunto ordenado de f entre a y x. No debes olvidar en lo que sigue que $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ se ha definido en términos de áreas. A la función F la llamaremos *la función área de* f en $[a,b]$.

A veces hay que considerar funciones de la forma $H(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ en donde $a < c < b$ y $x \in [a,b]$; por lo que es necesario precisar lo que se entiende por $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ cuando $x < c$. El convenio que se hace es que:

$$\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_v^u f(t)\,\mathrm{d}t$$

cualesquiera sean los números u y v. La justificación de este convenio es que, con él, la igualdad:

$$\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t + \int_y^z f(t)\,\mathrm{d}t + \int_z^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{8.5}$$

se cumple cualesquiera sean los puntos x, y, z del intervalo $[a,b]$. Compruébalo.

Nuestro próximo objetivo va a consistir en invertir el proceso que nos ha llevado de f a $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Nuestro problema es: ¿Cómo podemos recuperar la función f a partir del conocimiento de la función área de f? El resultado que sigue, uno de los más útiles del Cálculo, establece una relación entre dos conceptos aparentemente lejanos entre sí: el concepto de área y el de tangente a una curva, pues dicho resultado afirma que la pendiente de "la curva área de f", $y = F(x)$, en un punto x es igual a $f(x)$.

8.16 Teorema (Teorema Fundamental del Cálculo). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y definamos $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ por:*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{8.6}$$

para todo $x \in [a,b]$. Entonces:

i) F es continua en $[a,b]$.

ii) En todo punto c de $[a,b]$ en el que f sea continua se verifica que F es derivable en dicho punto siendo $F'(c) = f(c)$. En particular, si f es continua en $[a,b]$, entonces F es derivable en $[a,b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

Demostración.

i) Como f es integrable debe estar acotada. Sea $M > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces, si $x < y$ son puntos de $[a,b]$ tenemos que

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M(y-x)$$

Por la misma razón, si suponemos que $y < x$, tendremos que $|F(y) - F(x)| \leqslant M(y-x)$. Estas dos desigualdades nos dicen que $|F(y) - F(x)| \leqslant M|y-x|$ para todo par de puntos $x, y \in [a,b]$. De esta desigualdad se sigue inmediatamente la continuidad de F en $[a,b]$.

ii) Pongamos

$$\frac{F(x)-F(c)}{x-c} - f(c) = \frac{F(x)-F(c)-(x-c)f(c)}{x-c} = \frac{\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^x f(c)\,\mathrm{d}t}{x-c} =$$
$$= \frac{\int_c^x (f(t)-f(c))\,\mathrm{d}t}{x-c}$$

Dado, $\varepsilon > 0$, la continuidad de f en c nos dice que hay un $\delta > 0$ tal que para todo $t \in [a,b]$ con $|t-c| < \delta$ se tiene que $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$. Tomemos ahora un punto cualquiera $x \in [a,b]$ tal que $|x-c| < \delta$. Entonces es claro que para todo t comprendido entre x y c se tendrá que $|t-c| < \delta$ y, por tanto, $|f(t)-f(c)| < \varepsilon$ por lo que:

$$\left| \int_c^x (f(t)-f(c))\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon |x-c|$$

Deducimos que para todo $x \in [a,b]$ tal que $|x-c| < \delta$, y $x \neq c$, se verifica que

$$\left| \frac{F(x)-F(c)}{x-c} - f(c) \right| = \frac{\left| \int_c^x (f(t)-f(c))\,\mathrm{d}t \right|}{|x-c|} \leqslant \frac{\varepsilon|x-c|}{|x-c|} = \varepsilon$$

Hemos probado que $\displaystyle\lim_{x \to c} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(c)$, esto es, F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$. □

8.2.3. Primitivas. Regla de Barrow

8.17 Definición. Dada un función $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, cualquier función $H : [a,b] \to \mathbb{R}$ que sea continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y verifique que $H'(x) = h(x)$ para todo $x \in]a,b[$, se llama una **primitiva** de f en el intervalo $[a,b]$.

Es importante advertir que no todas las funciones tienen primitivas. Por ejemplo, una *condición necesaria* que debe cumplir una función para tener primitivas es que dicha función tenga la propiedad del valor intermedio pues, como recordarás, las funciones derivadas tienen esa propiedad. También, como consecuencia del teorema del valor medio, es inmediato que *dos primitivas de una función en un mismo intervalo se diferencian en una constante*. Por ello, si conocemos una primitiva de una función en un intervalo las conocemos todas.

El siguiente resultado es una consecuencia muy importante del Teorema Fundamental del Cálculo.

8.18 Corolario. *Toda función continua en un intervalo tiene primitivas en dicho intervalo.*

Demostración. Sea f una función continua en un intervalo I. Elijamos un punto $\alpha \in I$. Cualquiera sea $x \in I$ el intervalo de extremos α y x está contenido en I y f es continua en él y por tanto es integrable en él. Podemos por ello definir la función $H : I \to \mathbb{R}$ dada para todo $x \in I$ por $H(x) = \int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Esta función es derivable en todo intervalo cerrado y acotado contenido en I. Pues si $[a,b] \subset I$, para todo $x \in [a,b]$ se tiene que:

$$H(x) = \int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Por tanto, salvo una constante aditiva, la función H coincide en el intervalo $[a,b]$ con la función área de f en $[a,b]$, es decir, con la función $F(x)$ definida por 8.6. Como f es continua en $[a,b]$ (por ser continua en I) el teorema fundamental del cálculo nos dice que F es derivable en todo punto $x \in [a,b]$ y $F'(x) = f(x)$. Deducimos que H es derivable en todo punto $x \in [a,b]$ y $H'(x) = f(x)$.

Finalmente, el hecho de que H sea derivable en todo intervalo cerrado y acotado contenido en I, implica, por la propiedad local de la derivabilidad, que H es derivable en I y su derivada en todo punto $x \in I$ viene dada por $H'(x) = f(x)$. $\square$

Es importante que aprecies que este *es un resultado de existencia*; es la definición que hemos dado de área – y por consiguiente de integral – lo que nos ha permitido *construir* la función primitiva de f. *La integración es por tanto una herramienta que permite construir una función cuya derivada es conocida*; por eso la integración es una potente herramienta para construir nuevas funciones.

8.19 Estrategia.

- Para derivar funciones de la forma $H(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ donde f es una función continua y g es una función derivable, se aplica el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena para derivar la función compuesta $H(x) = F(g(x))$, donde $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Para derivar funciones de la forma $H(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ donde f es una función continua y u, v son funciones derivables, se escribe $H(x) = \int_a^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ y se aplica lo dicho en el punto anterior.

El Teorema Fundamental del Cálculo proporciona también una técnica para calcular la integral de una *función continua* en un intervalo $[a,b]$. Para ello lo que hacemos es calcular una primitiva de f en $[a,b]$. Si h es una tal primitiva, entonces las funciones $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, y $h(x)-h(a)$ son dos primitivas de f en $[a,b]$ que coinciden en un punto, pues ambas se anulan en a. Deducimos que $F(x)=h(x)-h(a)$ para todo $x\in[a,b]$ y, por tanto, $F(b)=\int_a^b f(t)\,dt=h(b)-h(a)$. Podemos generalizar este resultado como sigue.

8.20 Teorema (Regla de Barrow). *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable y supongamos que h es una primitiva de f en $[a,b]$. Entonces:*

$$\int_a^b f(t)\,dt=h(b)-h(a)$$

Demostración. Sea $P=\{a=x_0,x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n=b\}$ una partición de $[a,b]$. Aplicando el teorema de valor medio, tenemos que:

$$h(b)-h(a)=\sum_{k=1}^{n}(h(x_k)-h(x_{k-1}))=\sum_{k=1}^{n}f(t_k)(x_k-x_{k-1})=\sigma(f,P)$$

La igualdad anterior nos dice que para toda partición P de $[a,b]$ hay *alguna* suma de Riemann de f asociada a dicha partición, $\sigma(f,P)$, que es igual a $h(b)-h(a)$. Si ahora tomamos una sucesión $\{P_n\}$ de particiones del intervalo $[a,b]$ tales que $\Delta(P_n)\to 0$, tenemos que $h(b)-h(a)=\sigma(f,P_n)$ para alguna suma de Riemann, $\sigma(f,P_n)$, de f asociada a la partición P_n. Pero sabemos que $\sigma(f,P_n)\to\int_a^b f$, por lo que obtenemos que $h(b)-h(a)=\int_a^b f$. □

Fíjate que en la regla de Barrow no se supone que f sea continua sino tan sólo que es integrable y que, además, tiene una primitiva.

8.2.4. Las funciones logaritmo y exponencial

Quiero convencerte de que muchas veces el cálculo integral proporciona la interpretación más intuitiva de una función. Considera, por ejemplo, la función logaritmo natural. Quizás sepas expresar log 2 como límite de una sucesión o algo parecido; pero, ¿puedes representar de alguna forma intuitiva el número log 2? ¿Sabrías representar gráficamente el número log 2? En la siguiente gráfica puedes *ver* el número log 2.

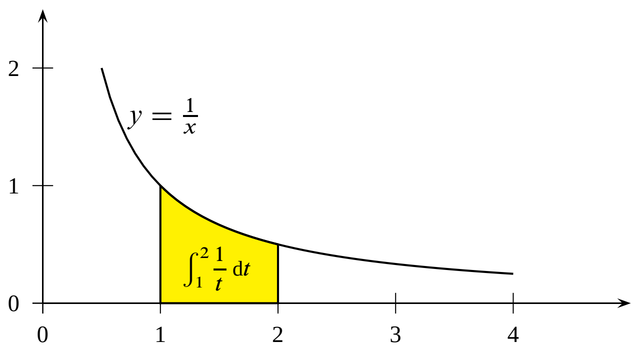


Figura 8.6. Logaritmo de 2

Espero que estés de acuerdo conmigo: la forma más fácil e intuitiva de imaginar el número $\log t$ es como el área de la región plana limitada por la curva $y = 1/x$, las rectas $x = 1$, $x = t$, y el eje de abscisas. Dicha área se considera positiva si $t > 1$ y negativa si $t < 1$. Dicho de otra forma:

$$\log t = \int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Es frecuente interpretar esta igualdad de la siguiente forma: la función $\log x$ es derivable y $\log' x = 1/x$; por tanto $\int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log t - \log 1 = \log t$. ¡Parece que hemos probado algo! Y no es así porque en este razonamiento estamos usando que la función logaritmo es derivable y eso es algo que no hemos probado. Todavía peor: ni siquiera hemos dado una definición de la función logaritmo que permita probar las propiedades de dicha función. Usualmente se define $\log x$ como el número y que verifica que $\mathrm{e}^y = x$. La *existencia* de ese número y está lejos de ser evidente. El propio número e tiene que ser definido de alguna forma apropiada.

Hago estas reflexiones para que te des cuenta de que lo que conoces de las funciones logaritmo, exponencial, trigonométricas ..., es un conocimiento descriptivo. De estas funciones conoces, porque te lo han dicho, su comportamiento; pero no creo que hayas demostrado sus propiedades. Bueno, no quiero que pienses que tus profesores de bachillerato te ocultan información, lo que ocurre es que una definición de estas funciones que permita probar su existencia y demostrar sus propiedades requiere herramientas matemáticas que no tienen cabida en las enseñanzas medias. Precisamente, el Teorema Fundamental del Cálculo permite definir estas funciones de forma fácil, elegante y correcta.

Olvida ahora todo lo que sepas de la función logaritmo natural. ¿Lo has olvidado ya? Sigamos.

8.21 Definición. La función *logaritmo natural* es la función $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida para todo $t > 0$ por:

$$\log t = \int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la función *logaritmo natural* es *derivable* (y por tanto continua) y que $\log' t = 1/t$. Como la derivada es positiva, deducimos que dicha función es *estrictamente creciente*.

Dado $a > 0$, sea $h(x) = \log(ax)$. Entonces $h'(x) = a/(ax) = 1/x$. Luego la función $h(x) - \log(x)$ tiene derivada nula en $\mathbb{R}^+$, por lo que es constante y, como para $x = 1$ es igual a $\log a$, se sigue que $h(x) - \log(x) = \log a$. Hemos probado así que $\log(ax) = \log a + \log x$ para todo $a > 0$ y para todo $x > 0$.

Observa que en poco más de tres líneas hemos obtenido ya las propiedades principales del logaritmo. Sigamos nuestro estudio.

De lo ya visto se sigue que $\log(2^n) = n \log 2$ para todo número entero n. De aquí se deduce que la función *logaritmo natural* no está mayorada ni minorada y, como es estrictamente creciente, concluimos que $\lim\limits_{x\to 0} \log x = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \log x = +\infty$. Por tanto, podemos afirmar que dicha función es una *biyección estrictamente creciente de* $\mathbb{R}^+$ *sobre* $\mathbb{R}$.

Representemos provisionalmente por $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función inversa del logaritmo. Dicha función se llama función *exponencial*. El teorema de derivación de la función inversa nos dice que φ es derivable y para todo $x \in \mathbb{R}$ es:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\log'(\varphi(x))} = \varphi(x)$$

Ahora, dados, $x, y \in \mathbb{R}$, sean $a, b, \in \mathbb{R}^+$ tales que $x = \log a$, $y = \log b$. Entonces:

$$\varphi(x+y) = \varphi(\log a + \log b) = \varphi(\log(ab)) = ab = \varphi(x)\varphi(y)$$

Hemos probado así que $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. De esta igualdad se deduce fácilmente que apara todo número racional r se verifica que $\varphi(r) = \varphi(1)^r$. El número $\varphi(1)$ se representa con la letra e, es decir, es el número definido por la igualdad $\log \mathrm{e} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 1$. Con ello para todo número racional r se tiene que $\varphi(r) = \mathrm{e}^r$, por lo que se usa la notación $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$ para representar a la función exponencial.

Fíjate con qué facilidad y elegancia hemos obtenido las propiedades principales de las funciones logaritmo natural y exponencial. Quedan así justificados todos los resultados vistos en capítulos anteriores que dependen de dichas propiedades.

Así mismo, podemos *definir* la función *arcotangente* de la forma:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\ .$$

Lo que constituye un punto de partida para definir las demás funciones trigonométricas. Este proceso está desarrollado con detalle en [16]. Veremos más adelante otro procedimiento más directo para definir las funciones trigonométricas.

8.3. Integrales impropias de Riemann

Una de las limitaciones de la teoría de la integral de Riemann que hemos desarrollado es que en ella se consideran funciones acotadas en intervalos acotados. Queremos evitar estas limitaciones y considerar funciones no acotadas o intervalos no acotados. Los siguientes ejemplos indican el camino a seguir.

8.22 Ejemplo. La función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ no está acotada en el intervalo $]0,1]$. Como $h(x) = 2\sqrt{x}$ es una primitiva de f en $[0,1]$, para todo $t \in]0,1]$ se tiene que:

$$\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = h(1) - h(t) = 2 - 2\sqrt{t} \Longrightarrow \lim_{t\to 0}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2.$$

Por tanto es natural definir:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2.$$

♦

8.23 Ejemplo. Para todo $\alpha > 0$ se tiene que:

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha t}) \quad\Longrightarrow\quad \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}.$$

Por ello es natural definir:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}.$$

♦

En el primer ejemplo hemos considerado una función no acotada, y en el segundo un intervalo no acotado.

8.24 Definición. Sea $f:[c,b[\to\mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[c,b[$, donde suponemos que $c\in\mathbb{R}$ y que b un número real mayor que c o bien $b=+\infty$. Se define la integral impropia de Riemann de f en $[c,b[$ como el límite:

$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to b}\int_c^t f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.7}$$

Supuesto, claro está, que dicho límite exista y sea un número real, en cuyo caso se dice también que la integral de f es convergente en $[c,b[$.

Sea $f:]a,c]\to\mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $]a,c]$, donde suponemos que $c\in\mathbb{R}$ y que a un número real menor que c o bien $a=-\infty$. Se define la integral impropia de Riemann de f en $]a,c]$ como el límite:

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to a}\int_t^c f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.8}$$

Supuesto, claro está, que dicho límite exista y sea un número real, en cuyo caso se dice también que la integral de f es convergente en $]a,c]$.

Cuando el límite (8.7) o (8.8) existe y es igual a $+\infty$ (resp. $-\infty$) se dice que la respectiva integral es positivamente o negativamente divergente.

Sea $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $]a,b[$, donde $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$. Sea $c\in\mathbb{R}$ con $a<c<b$. Se dice que la integral de f es convergente en $]a,b[$ cuando las integrales de f en $]a,c]$ y en $[c,b[$ son convergentes, en cuyo caso se define:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.9}$$

8.25 Observación. Como para todo $u\in]c,b[$ se verifica que:

$$\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^u f(t)\,\mathrm{d}t + \int_u^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

se sigue que la convergencia de la integral de f en $[c,b[$ equivale a la convergencia de la integral de f en $[u,b[$.

8.26 Ejemplo. Sea $a \neq 1$. Se tiene que:

$$\int_1^t \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x = \frac{t^{1-a}}{1-a} - \frac{1}{1-a}$$

Deducimos que:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{a-1} & \text{si } a > 1 \\ +\infty & \text{si } a < 1 \end{cases} \tag{8.10}$$

Análogamente:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0} \int_t^1 \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{1-a} & \text{si } a < 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases} \tag{8.11}$$

♦

8.27 Ejemplo. Sea $a \neq 1$. Usando la técnica de integración por partes, que estudiaremos más adelante, es fácil calcular una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{\log x}{x^a}$. Comprueba que:

$$F(x) = \frac{x^{1-a}(-1 + (1-a)\log x)}{(1-a)^2}$$

es una primitiva de f en $\mathbb{R}^+$. Por tanto $\int_1^t f(x)\,\mathrm{d}x = F(t) - F(1)$. En consecuencia:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^a}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-a)^2} & \text{si } a > 1 \\ +\infty & \text{si } a < 1 \end{cases} \tag{8.12}$$

Análogamente:

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x^a}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{1}{(1-a)^2} & \text{si } a < 1 \\ -\infty & \text{si } a > 1 \end{cases} \tag{8.13}$$

♦

8.3.1. Criterios de convergencia para integrales

Naturalmente, no siempre vamos a disponer de una primitiva expresable por medio de funciones elementales, bien porque no exista o porque su cálculo efectivo sea muy complicado. Por ello, interesa conocer condiciones que aseguren la convergencia de una integral sin necesidad de conocer una primitiva elemental. Lógicamente, estas condiciones no nos permitirán calcular el valor numérico de la integral; tan sólo nos dirán si es o no convergente. Consideraremos integrales definidas en intervalos del tipo $[c, b[$ donde $c < b \leqslant +\infty$. Criterios de convergencia análogos se verifican para integrales definidas en intervalos del tipo $]a, c]$ donde $-\infty \leqslant a < c$. El caso en que la función integrando es positiva es particularmente sencillo de estudiar.

8.28 Proposición (Criterio básico de convergencia). *Sea f continua y positiva en $[c, b[$. Entonces, la integral de f en $[c, b[$ es convergente si, y sólo si, la función $F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ está mayorada en $[c, b[$, en cuyo caso:*

$$\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sup\left\{\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \ : x \in [c, b[\right\}$$

En otro caso la integral de f en $[c, b[$ es positivamente divergente.

Las afirmaciones hechas son consecuencia de que, por ser f positiva en $[c, b[$, la función $F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ es creciente en $[c, b[$.

El siguiente criterio es consecuencia inmediata del anterior.

8.29 Proposición (Criterio de comparación). *Sean f y g continuas y positivas en $[c, b[$. Supongamos que la integral de g en $[c, b[$ es convergente y que $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in [c, b[$. Entonces la integral de f en $[c, b[$ también es convergente.*

De este criterio se deduce fácilmente el siguiente.

8.30 Proposición (Criterio límite de comparación). *Sean f y g continuas y positivas en $[c, b[$. Supongamos que:*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \rho \in \mathbb{R}^+.$$

Entonces las integrales de f y g en $[c, b[$ ambas convergen o ambas divergen positivamente.

Demostración. De la hipótesis hecha se deduce que existe un número $u \in]c, b[$ tal que para todo $x \in [u, b[$ se verifica que:

$$\frac{1}{2}\rho \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \frac{3}{2}\rho \quad \Longleftrightarrow \quad g(x) \leqslant 2f(x) \leqslant 3g(x).$$

De estas dos desigualdades se deduce, por el criterio de comparación anterior, que las integrales de f y de g en $[u, b[$ son ambas convergentes o ambas divergen positivamente. Basta tener ahora en cuenta la observación 8.25. □

8.31 Definición. Se dice que la integral de f es **absolutamente convergente** en un cierto intervalo cuando la integral de la función $|f|$ es convergente en dicho intervalo.

Naturalmente, los criterios de convergencia antes vistos para integrales de funciones positivas, pueden usarse para estudiar la convergencia absoluta de la integral de cualquier función. Por ello, el siguiente resultado es de gran utilidad. Para demostrarlo usaremos la siguiente caracterización de la existencia de límite.

8.32 Proposición (Condición de Cauchy para la existencia de límite). *Sea b un número real o bien $b = +\infty$, sea $c < b$ y sea $f : [c, b[\to \mathbb{R}$ una función. Equivalen las siguientes afirmaciones:*

a) La función f tiene límite finito en b, es decir, $\lim_{x \to b} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

b) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $u_\varepsilon \in]c, b[$ tal que para todos $x, y \in]u_\varepsilon, b[$ se verifica que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Demostración.

$a \Longrightarrow b)$. Por hipótesis, para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $u_\varepsilon \in]c, b[$ tal que para todo $x \in]u_\varepsilon, b[$ se verifica que $|f(x) - L| < \varepsilon/2$. Para $y \in]u_\varepsilon, b[$ también será $|f(y) - L| < \varepsilon/2$. Deducimos que:

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - L - (f(y) - L)| \leqslant |f(x) - L| + |f(y) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$b \Longrightarrow a)$. Probaremos que hay un número $L \in \mathbb{R}$ tal que para toda sucesión $\{x_n\} \to b$ se verifica que $\{f(x_n)\} \to L$. Según sabemos, por la proposición 7.41, esto equivale a que f tenga límite en b igual a L. Sea $\{x_n\} \to b$, para probar que $\{f(x_n)\}$ es convergente probaremos que dicha sucesión verifica la condición de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, por la hipótesis hecha, hay un número $u_\varepsilon \in]c, b[$ tal que para todos $x, y \in]u_\varepsilon, b[$ se verifica que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Como $\{x_n\} \to c$, existe un número natural m_ε tal que para todo $p \geqslant m_\varepsilon$ se tiene que $x_p \in]u_\varepsilon, c[$. Deducimos que si $p \geqslant m_\varepsilon$ y $q \geqslant m_\varepsilon$, entonces $|f(x_p) - f(x_q)| < \varepsilon$, lo que prueba que la sucesión $\{f(x_n)\}$ es de Cauchy y, por el teorema de completitud de $\mathbb{R}$, es convergente. Sea $L \in \mathbb{R}$ el límite de $\{f(x_n)\}$. Si ahora consideramos cualquier otra sucesión $\{y_n\} \to b$, el mismo razonamiento anterior prueba que $\{f(y_n)\}$ converge. Debemos probar que su límite también es L. Para ello, basta con observar que, como consecuencia de la hipótesis hecha, la sucesión $\{f(x_n) - f(y_n)\}$ converge a 0, pues para todo n suficientemente grande se tiene que $x_n, y_n \in]u_\varepsilon, b[$, por lo que $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$. □

La proposición anterior tiene una versión análoga para el caso de considerar un intervalo del tipo $]a, c]$ con a un número real o $a = -\infty$.

La condición del punto b) de la proposición anterior se llama *condición de Cauchy* para f en b.

8.33 Teorema. *Si la integral de f es absolutamente convergente, entonces la integral de f también es convergente.*

Demostración. Supongamos que la integral de f es absolutamente convergente en $[c, b[$. Pongamos $G(x) = \int_b^x |f(t)|\,dt$, $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$. Por la hipótesis hecha, existe el límite de G en b y es finito. En tal caso, se verifica la condición de Cauchy para G en b. Dado $\varepsilon > 0$, hay un número $u_\varepsilon \in]c, b[$ tal que para todos $x, y \in]u_\varepsilon, b[$ es $|G(x) - G(y)| < \varepsilon$. Teniendo en cuenta la desigualdad:

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_c^x f(t)\,dt - \int_c^y f(t)\,dt \right| = \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \leqslant \left| \int_x^y |f(t)|\,dt \right| = |G(x) - G(y)|,$$

se deduce que la función F verifica la condición de Cauchy en b, por lo que dicha función tiene límite finito en b, es decir, la integral de f en $[c, b[$ es convergente. □

8.4. Teoremas del valor medio para integrales

El teorema fundamental del cálculo permite traducir a integrales el teorema del valor medio. Basta observar para ello que, si f es una función continua en un intervalo I y α es un punto cualquiera de dicho intervalo, podemos aplicar el teorema del valor medio a la función derivable $F(x)=\int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t$ en el intervalo I. Según dicho teorema, para cualquier par de puntos $a,b\in I$ se verifica que hay algún punto c comprendido entre a y b tal que:

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(c).$$

Pero esta igualdad es lo mismo que:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c) \quad\Longleftrightarrow\quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

El número $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se llama *promedio integral o media integral* de f en $[a,b]$. Con poco esfuerzo podemos obtener un resultado más general.

8.34 Teorema (**Primer teorema de la media para integrales**). *Sean f una función continua en $[a,b]$ y g una función positiva e integrable en $[a,b]$. Entonces se verifica que hay algún punto $c\in[a,b]$ tal que:*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{8.14}$$

Demostración. Por el teorema de Weierstrass 4.29,la función f alcanza un valor mínimo, m, y un valor máximo, M, en $[a,b]$. Como $g(x)\geqslant 0$ para todo $x\in[a,b]$, tenemos que:

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x) \qquad \text{(para todo } x\in[a,b]).$$

La función fg es integrable en $[a,b]$ por ser producto de funciones integrables. Como la integral conserva el orden entre funciones, se sigue que:

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

De esta desigualdad se sigue que si $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=0$, entonces también es $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0$ y la igualdad del enunciado se satisface trivialmente para todo $c\in[a,b]$. En otro caso debe ser $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x>0$ y deducimos que:

$$m\leqslant\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}\leqslant M.$$

Puesto que la imagen por f del intervalo $[a,b]$ es el intervalo $[m,M]$, de la desigualdad anterior se sigue que hay algún $c\in[a,b]$ tal que:

$$f(c)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Como queríamos probar. □

8.35 Teorema (**Segundo teorema de la media para integrales).** *Sea φ una función monótona y con derivada continua en $[a,b]$, y sea f una función continua en $[a,b]$. Entonces hay algún punto $c\in[a,b]$ tal que:*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(a)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \varphi(b)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.15}$$

Demostración. Supongamos que φ es decreciente en $[a,b]$ y $\varphi(b)=0$. Definamos las funciones $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ y $H(x)=F(x)\varphi(x)$. Tenemos que $H'(x)=F'(x)\varphi(x)+F(x)\varphi'(x)=f(x)\varphi(x)+F(x)\varphi'(x)$. Por la regla de Barrow, obtenemos que:

$$\int_a^b \big(f(x)\varphi(x)+F(x)\varphi'(x)\big)\,\mathrm{d}x = H(b)-H(a)=0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b F(x)(-\varphi'(x))\,\mathrm{d}x\,.$$

Como $-\varphi'(x)\geqslant 0$ para todo $x\in[a,b]$, podemos aplicar a la última integral el primer teorema de la media que asegura que hay algún $c\in[a,b]$ tal que:

$$\int_a^b F(x)(-\varphi'(x))\,\mathrm{d}x = F(c)\int_a^b(-\varphi'(x))\,\mathrm{d}x = F(c)\varphi(a)=\varphi(a)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Hemos probado así que hay un $c\in[a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(a)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{8.16}$$

Esta igualdad es un caso particular de la igualdad del enunciado (recuerda que hemos supuesto que $\varphi(b)=0$). Consideremos ahora que φ es decreciente en $[a,b]$ (no suponemos que $\varphi(b)=0$). Podemos aplicar la igualdad 8.16 a la función $\varphi-\varphi(b)$ y obtenemos que hay algún $c\in[a,b]$ tal que:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)(\varphi(x)-\varphi(b))\,\mathrm{d}x = (\varphi(a)-\varphi(b))\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\\
&\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(a)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \varphi(b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varphi(b)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x =\\
&\qquad = \varphi(a)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \varphi(b)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Esto demuestra el teorema para φ decreciente. El caso en que φ sea creciente se reduce al anterior considerando la función $-\varphi$. □

El segundo teorema de la media para integrales es muy útil para estudiar la convergencia no absoluta de integrales impropias pues, en muchos casos, permite probar que se satisface la condición de Cauchy para la existencia de límite. El teorema suele enunciarse con hipótesis mucho más generales, pero las hipótesis con las que lo hemos probado son suficientes para nosotros.

8.5. Derivadas e integrales de funciones complejas de variable real

Una función compleja de variable real es una función de la forma $h(t)=f(t)+ig(t)$ donde f, g son funciones reales definidas en un intervalo I. Se dice que f es la parte real de h y g es la parte imaginaria, y escribimos $f=\mathrm{Re}(h)$, $g=\mathrm{Im}(h)$. Cuando las funciones f y g son derivables, se dice que h es derivable y se define su derivada por la igualdad:

$$h'(t)=f'(t)+ig'(t).$$

Cuando las funciones f y g son integrables en un intervalo $[a,b]$ se dice que h es integrable en $[a,b]$ y se define la integral de h en $[a,b]$ por la igualdad:

$$\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Naturalmente, si F y G son, respectivamente, primitivas de f y g en un intervalo $[a,b]$, entonces $H(t)=F(t)+iG(t)$ es una primitiva de h en $[a,b]$ y se verifica la regla de Barrow:

$$\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = (F(b)-F(a))+i(G(b)-G(a)) = H(b)-H(a).$$

Análogamente, si f y g son continuas en un intervalo I y elegimos un punto $a\in I$, la función:

$$H(x)=\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

es una primitiva de h en I.

8.36 Ejemplo. Sea $\alpha+i\beta$ un número complejo, la función:

$$h(t)=\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)t}=\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{e}^{i\beta t}=\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)+i\,\mathrm{e}^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$$

es derivable y su derivada viene dada por:

$$\begin{aligned} h'(t) &= \alpha\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)-\beta\,\mathrm{e}^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)+i\big(\alpha\,\mathrm{e}^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)+\beta\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)\big)= \\ &= \mathrm{e}^{\alpha t}(\alpha+i\beta)\big(\cos(\beta t)+i\operatorname{sen}(\beta t)\big)=(\alpha+i\beta)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{e}^{i\beta t}=(\alpha+i\beta)h(t). \end{aligned}$$

Como era de esperar, hemos obtenido que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)t}=(\alpha+i\beta)\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)t}\,.$$

En consecuencia:

$$\int \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+i\beta}\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)t} \tag{8.17}$$

♦

En algunos de los siguientes ejercicios deberás calcular algunas primitivas muy sencillas, es un buen momento para que repases las derivadas de las funciones elementales.

8.5.1. Ejercicios propuestos

---

365. Sea $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x \operatorname{sen} x}{x}$. Justifica que f es integrable en $[0,1]$ y se verifica la desigualdad $0 \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}-1$.

366. Sea f una función continua y positiva en $[a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Prueba que $f(x)=0$ para todo $x\in[a,b]$.

367. Justifica las desigualdades:

$$a)\ \frac{1}{6}<\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{10+x}<\frac{1}{5};\quad b)\ \frac{1}{10\sqrt{2}}<\int_0^1\frac{x^9\,\mathrm{d}x}{10+x}<\frac{1}{10};\quad c)\ \frac{1}{n+1}<\log\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}.$$

Deduce de la última desigualdad que $\mathrm{e}=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

368. Calcula la integral $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ donde $f(x)=\operatorname{sen} x+\cos x$, y calcula el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje de abscisas cuando $x\in[-\pi,\pi]$.

369. Calcula los límites de las siguientes sucesiones expresándolas como sumas de Riemann.

$$a)\ x_n=\frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}},\quad (\alpha>0)$$
$$b)\ x_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n(n+n)}}$$
$$c)\ x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$
$$d)\ x_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$$
$$e)\ x_n=\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+4}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n^2}$$

$$f)\ x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)k}{n^3}\qquad g)\ x_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\ \operatorname{sen}\left(\frac{k}{n}\frac{\pi}{2}\right)$$
$$h)\ x_n=\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}\qquad i)\ x_n=\sum_{k=np+1}^{nq}\frac{1}{k}\ \ (p,q\in\mathbb{N},\ p<q)$$

370. Considera la función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=1/x-E(1/x)$ para $0<x\leqslant 1$, y $f(0)=0$. Prueba que:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to 0}\int_t^1\left(\frac{1}{x}-E\left(\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{d}x=1-\gamma,$$

donde γ es la constante de Euler.

371. Sea f derivable en $[a,b]$ y sea $M > 0$ tal que $|f'(x)| \leqslant M$ para todo $x \in [a,b]$. Dado $n \in \mathbb{N}$ sea P la partición de $[a,b]$ definida por los puntos $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, donde $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Pongamos $\alpha = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n}$. Prueba que:

$$S(f,P) - \alpha \leqslant M\frac{(b-a)^2}{n},$$

y deduce que:

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \alpha \right| \leqslant M\frac{(b-a)^2}{n}.$$

372. Calcula las siguientes integrales.

$$a)\ \int_0^1 (x^2-1)^6 2x\,\mathrm{d}x \qquad b)\ \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} |\cos x|\,\mathrm{d}x \qquad c)\ \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$d)\ \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x \qquad e)\ \int_0^{\pi^2} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad f)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$g)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos x}\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \qquad h)\ \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + 4}\,\mathrm{d}x \qquad i)\ \int_1^2 \frac{2-x}{x^3}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia. Todas ellas son inmediatas y se calculan usando la regla de Barrow.

373. Sea f una función continua tal que $\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = \operatorname{sen} x - x\cos x$. Calcula $f(\pi/2)$ y $f'(\pi/2)$.

374. Sea Sea f una función continua y definamos $F(x) = \displaystyle\int_1^x \left(t\int_1^t f(s)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t$. Calcula $F'(1)$ y $F''(x)$.

375. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

$$a)\ G(x) = \int_0^{x^3} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \qquad b)\ G(x) = \int_{x^2}^{1} \mathrm{e}^{\operatorname{sen} t}\,\mathrm{d}t$$

$$c)\ G(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2+x} \frac{1}{2+\sqrt[3]{t^2}}\,\mathrm{d}t \qquad d)\ G(x) = \int_1^{\mathrm{e}^x} \operatorname{sen}(\log t)\,\mathrm{d}t$$

$$e)\ G(x) = \int_0^x \left(\int_1^{y^2} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y \qquad f)\ G(x) = \int_0^{\int_1^x \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,\mathrm{d}u} \frac{1}{t^2+\operatorname{sen}^4 t}\,\mathrm{d}t$$

$$g)\ G(x) = \int_{-\mathrm{e}^x}^{\operatorname{sen}^2 x} \cos(\log^2(t^2))\,\mathrm{d}t \qquad h)\ G(x) = \int_0^1 \frac{3x^2t^3}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$$

Sugerencia. Aplica la estrategia 8.19.

376. Calcula todas las funciones de clase C^1 en $\mathbb{R}$ tales que:

$$f(x)^2 = \int_0^x \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right) \mathrm{d}t \ + 2008.$$

377. Prueba que para todo $x \in [0, \pi/2]$ se verifica la igualdad:

$$\int_0^{\cos^2 x} \operatorname{arc\,cos}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t \ + \int_0^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{arc\,sen}\sqrt{t} = \frac{\pi}{4}$$

378. Sea g una función derivable en $\mathbb{R}$ y dos veces derivable en 0, siendo además $g(0) = 0$. Estudia la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(0) = g'(0), \qquad f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{g(t)}{t}\,\mathrm{d}t \quad (x \neq 0).$$

¿Es f de clase C^1?

379. Sea $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Estudia los extremos relativos y absolutos de F, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y calcula el límite de F en $+\infty$.

380. Sea f la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{si } x \leqslant 1; \\ 2 + x, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Estudia la derivabilidad de $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

381. Calcula los siguientes límites.

a) $\displaystyle \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t}{x^3}$ *b*) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t}$ *c*) $\displaystyle \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\int_0^{x^2} \left(\mathrm{e}^{-t^2} - \mathrm{e}^{-1}\right)\mathrm{d}t}{x\sqrt{x}}$

d) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\int_1^{x^2+1} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t}{x^2}$ *e*) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\,\mathrm{d}t}$ *f*) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (\operatorname{sen} t + \cos t - 1)\,\mathrm{d}t}{x^2}$

382. Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias y calcúlalas cuando sean convergentes.

a) $\displaystyle \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 + x + 1}}$ *b*) $\displaystyle \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ *c*) $\displaystyle \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle \int_0^{+\infty} \frac{1 + x^4}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x$ *e*) $\displaystyle \int_0^{1} \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x$ *f*) $\displaystyle \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Sugerencias. En *a)* hacer $x = 1/t$ y en *d)* $x = \operatorname{tg} t$.

383. Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias.

$$a) \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \quad b) \int_0^1 \frac{x}{x-\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x \quad c) \int_0^{+\infty} \frac{x+5}{x^3+x}\,\mathrm{d}x$$

$$d) \int_1^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x \quad e) \int_0^1 \log x \log(1-x)\,\mathrm{d}x \quad f) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{sen}(1/x)\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia. Los criterios de comparación pueden ser útiles.

384. Estudia la convergencia de la integral

$$I = \int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{x+\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x$$

Según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

385. Prueba que la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ es absolutamente convergente para $p > 1$, es convergente pero no absolutamente convergente para $0 < p \leqslant 1$ y no es convergente para $p \leqslant 0$.

Sugerencia. Para $0 < p \leqslant 1$ usa el segundo teorema de la media.

386. Estudia para qué valores de α y β son convergentes las integrales siguientes.

$$a) \int_1^{+\infty} x^\alpha\,\mathrm{e}^{\beta x}\,\mathrm{d}x \quad b) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)}\,\mathrm{d}x \quad c) \int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia. Utiliza el criterio límite de comparación.

387. Justifica que hay una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable cuya derivada es $f'(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ para todo $x \neq 0$, y $f'(0) = 0$.

388. Sea $f : \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(0) = 0$, $f(1) = \log 2$ y

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\log t}\,\mathrm{d}t \qquad (0 \neq x \neq 1).$$

a) Prueba que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \log 2$ y justifica que f es de clase C^1.

Aplicación. Calcula la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\log t}\,\mathrm{d}t$.

Sugerencia: Sea $g(t) = \dfrac{t-1}{\log t}$. Utiliza el primer teorema de la media para integrales para obtener que si $0 < x \neq 1$ hay algún punto $c = c(x)$ comprendido entre x y x^2 tal que:

$$f(x) = g(c)\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t\ .$$

389. Justifica, usando integrales, que para todo $x > 0$ se verifica que:

$$\frac{1}{1+x} < \log(1+x) - \log x < \frac{1}{x}.$$

Dedduce que, dado $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, se verifica que:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k} = \log p.$$

8.5.2. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto $\boxed{\mathbf{180}}$ Sea $f(x) = \dfrac{e^x \operatorname{sen} x}{x}$. Justifica que f es integrable en $[0,1]$ y se verifica la desigualdad $0 \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant e - 1$.

Solución. Como $0 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant x$ para todo $x \in [0,1]$, se sigue que $0 \leqslant f(x) \leqslant e^x \leqslant e$ para todo $x \in]0,1]$. En consecuencia la función f está acotada y es continua en $[0,1] \setminus \{0\}$. Podemos ahora apoyarnos en la observación 8.15 para concluir que f es integrable en $[0,1]$. Alternativamente, podemos definir $f(0) = 1$ con lo que cual resulta continua en todo el intervalo $[0,1]$. Finalmente, como la integral conserva el orden, tenemos que:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant e^x \quad \forall x \in [0,1] \implies 0 \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \int_0^1 e^x\,dx = e - 1$$

☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\mathbf{181}}$ Sea f una función continua y positiva en $[a,b]$ con $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Prueba que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Solución. Sea $x \in [a,b]$. Pongamos $\int_a^b f = \int_a^x f + \int_x^b f$. Como $f(t) \geqslant 0$ para todo $t \in [a,b]$, se verifica que $\int_x^b f \geqslant 0$, por lo que $0 = \int_a^b f \geqslant \int_a^x f \geqslant 0$. Deducimos que $\int_a^x f = 0$. Como f es continua en $[a,b]$, la función $F(x) = \int_a^x f$ es derivable en $[a,b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Evidentemente, F' es la función nula, luego $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Alternativamente, la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es derivable con $F'(x) = f(x) \geqslant 0$, lo que implica que F es creciente en $[a,b]$. Como $F(a) = F(b) = 0$, deducimos que $F(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$, lo que implica que f es la función nula en $[a,b]$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\mathbf{182}}$ Justifica las desigualdades:

$$a)\ \frac{1}{6} < \int_0^2 \frac{dx}{10+x} < \frac{1}{5};\quad b)\ \frac{1}{10\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^9\,dx}{10+x} < \frac{1}{10};\quad c)\ \frac{1}{n+1} < \log\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}.$$

Deduce de la última desigualdad que $\mathrm{e} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Solución. El resultado obtenido en el ejercicio anterior nos dice que si f es una función continua, positiva y no idénticamente nula en un intervalo $[a, b]$, entonces se verifica que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$. Las desigualdades propuestas son todas consecuencia de este resultado.

a) Para $0 \leqslant x \leqslant 2$ las funciones $f(x) = \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{10+x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{10+x} - \dfrac{1}{12}$ son continuas, positivas y no idénticamente nulas en $[0, 2]$, luego $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x > 0$ y $\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x > 0$. Esto prueba las desigualdades pedidas.

c) Dado $n \in \mathbb{N}$, para todo $x \in [n, n+1]$ se tiene que $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{n}$. Razonando com antes, se sigue que:

$$\frac{1}{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\,\mathrm{d}x < \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log\frac{n+1}{n} < \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}.$$

Lo que prueba la desigualdad del enunciado. Multiplicando por n dicha desigualdad se obtiene:

$$\frac{n}{n+1} < n\log\frac{n+1}{n} = \log\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < 1.$$

Por el principio de las sucesiones encajadas, deducimos que $\log\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to 1$, lo que implica, tomando exponenciales, que $\mathrm{e} = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\mathbf{183}}$ Calcula los límites de las siguientes sucesiones expresándolas como sumas de Riemann.

$$a)\ x_n = \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}, \quad (\alpha > 0)$$

$$e)\ x_n = \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+4} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n^2}$$

$$i)\ x_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}$$

Solución. Aplicaremos en cada caso el corolario 8.9.

a) Tenemos que $x_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n \left(\dfrac{k}{n}\right)^\alpha$ que es una suma de Riemann de la función $f(x) = x^\alpha$ para la partición del intervalo $[0, 1]$ dada por los puntos $x_k = \frac{k}{n}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Pues, claramente, se tiene que $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1})$. Como $\alpha > 0$, la función f es integrable en $[0, 1]$, y deducimos que:

$$\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = \int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}.$$

e) Podemos escribir:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

que es una suma de Riemann de la función $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ para la partición del intervalo $[0,1]$ dada por los puntos $x_k = \frac{k}{n}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Como la función f es integrable en $[0,1]$ y $\Delta(P_n) = \frac{1}{n} \to 0$, deducimos que:

$$\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \operatorname{arc\,tg} 1 + \frac{1}{2}\log 2 = \frac{\pi}{4} + \log\sqrt{2}.$$

i) Tomando logaritmos tenemos que:

$$\log(x_n) = \frac{1}{n}\left(\log((2n)!) - \log\left(n!n^n\right)\right) = \frac{1}{n}\left(\log\left(n!(n+1)\cdots(2n)\right) - n\log n - \log n!\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\log(n+1) + \log(n+2) + \cdots + \log(2n) - n\log n\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log\frac{n+k}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \log\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

Por tanto, la sucesión $y_n = \log(x_n)$ es una suma de Riemann de la función $\log(1+x)$ para la partición del intervalo $[0,1]$ dada por los puntos $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n$. Aplicando el corolario citado al principio, deducimos que:

$$\lim\{y_n\} = \int_0^1 \log(1+x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{matrix} u = \log(1+x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{matrix}\right] = x\log(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x = 2\log 2 - 1.$$

Luego $\{x_n\} \to \frac{4}{\mathrm{e}}$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{184}$ Considera la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x - E(1/x)$ para $0 < x \leqslant 1$, y $f(0) = 0$. Prueba que:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0} \int_t^1 \left(\frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{d}x = 1 - \gamma,$$

donde γ es la constante de Euler.

Solución. La función f es continua en todos los puntos de $[0,1]$ excepto en 0 y en los puntos de la forma $\frac{1}{n+1}$ donde $n \in \mathbb{N}$. Claramente $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Por tanto, en cada intervalo $[t, 0]$ con $t > 0$ la función f es integrable por estar acotada y tener en dicho intervalo un número finito de discontinuidades. Fijado $0 < t < 1$, sea $n = n(t) \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n+1} < t \leqslant \frac{1}{n}$. Tenemos que:

$$\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_t^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Para $\frac{1}{k+1} < x \leqslant \frac{1}{k}$ se tiene que $E(1/x) = k$. Luego, poniendo $\alpha(t) = \int_t^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x$, tenemos:

$$\begin{aligned}\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \alpha(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{x} - k\right) \mathrm{d}x = \\ &= \alpha(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\log(k+1) - \log k - k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right) = \\ &= \alpha(t) + \log n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \alpha(t) + 1 - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right)\end{aligned}$$

Puesto que para $t \to 0 \ \Rightarrow \ n(t) \to +\infty$, y $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, se sigue que:

$$0 \leqslant \alpha(t) \leqslant \left(\frac{1}{n(t)} - t\right) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0.$$

Concluimos que:

$$\lim_{t\to 0} \int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right) = 1 - \gamma.$$

☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{185}}$ Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $G(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ *b*) $G(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{1} \mathrm{e}^{\operatorname{sen} t}\,\mathrm{d}t$

c) $G(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x^2+x} \frac{1}{2+\sqrt[3]{t^2}}\,\mathrm{d}t$ *d*) $G(x) = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^x} \operatorname{sen}(\log t)\,\mathrm{d}t$

e) $G(x) = \displaystyle\int_0^{x} \left(\int_1^{y^2} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y$ *f*) $G(x) = \displaystyle\int_0^{\int_1^x \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,\mathrm{d}u} \frac{1}{t^2+\operatorname{sen}^4 t}\,\mathrm{d}t$

Solución. a) La función $G(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ puede expresarse como la composición de la función $F(x) = \displaystyle\int_0^{x} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ con la función $h(x) = x^2$. Por el teorema fundamental del cálculo, sabemos que $F'(x) = \cos(x^2)$. Por la regla de la cadena, tenemos que:

$$G'(x) = (F \circ h)'(x) = F'(h(x))h'(x) = F'(x^2)2x = 2x\cos(x^4).$$

c) Observa que en este ejercicio debes considerar que $x \geqslant 0$. Pongamos:

$$G(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2+x} \frac{1}{2+\sqrt[3]{t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{x^2+x} \frac{1}{2+\sqrt[3]{t^2}}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{2+\sqrt[3]{t^2}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Definamos $F(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{2+\sqrt[3]{t^2}}\,\mathrm{d}t$, $g(x)=\sqrt{x}$, $h(x)=x^2+x$. Tenemos que

$$G(x)=F(h(x))-F(g(x))=(F\circ h)(x)-(F\circ g)(x).$$

Como $F'(x)=\frac{1}{2+\sqrt[3]{x^2}}$, $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $h'(x)=2x+1$, deducimos, al igual que antes, que:

$$G'(x)=F'(h(x))h'(x)-F'(g(x))g'(x)=\frac{2x+1}{2+\sqrt[3]{x^4+2x^3+x^2}}-\frac{1}{2+\sqrt[3]{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

e) Definamos $H(y)=\int\limits_1^{y^2}\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,\mathrm{d}t$. Entonces $G(x)=\int\limits_0^x H(y)\,\mathrm{d}y$. Como la función $H(y)$ es continua, de hecho es derivable, se sigue que $G'(x)=H(x)$.

f) Sea $F(x)=\int\limits_0^x\frac{1}{t^2+\operatorname{sen}^4 t}\,\mathrm{d}t$, $h(x)=\int\limits_1^x\frac{\operatorname{sen} u}{u}\,\mathrm{d}u$. Tenemos que $G(x)=(F\circ h)(x)$. Como las derivadas de F y de h son conocidas podemos calcular la derivada de G. Tenemos que:

$$G'(x)=F'(h(x))h'(x)=\frac{1}{h(x)^2+\operatorname{sen}^4 h(x)}\frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{186}}$ Prueba que para todo $x\in[0,\pi/2]$ se verifica la igualdad:

$$\int\limits_0^{\cos^2 x}\operatorname{arc\,cos}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t\;+\int\limits_0^{\operatorname{sen}^2 x}\operatorname{arc\,sen}\sqrt{t}=\frac{\pi}{4}$$

Solución. Definamos $F(x)=\int\limits_0^{\cos^2 x}\operatorname{arc\,cos}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t\;+\int\limits_0^{\operatorname{sen}^2 x}\operatorname{arc\,sen}\sqrt{t}$. Tenemos que:

$$F'(x)=-2\operatorname{sen} x\cos x\operatorname{arc\,cos}(\cos x)+2\operatorname{sen} x\cos x\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)=0.$$

Donde hemos tenido en cuenta que para $x\in[0,\pi/2]$ se tiene que $\operatorname{sen} x\geqslant 0$ y $\cos x\geqslant 0$ por lo que $\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}=\operatorname{sen} x$ y $\sqrt{\cos^2 x}=\cos x$. Además, sabemos que $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)=x$ para $x\in[-\pi/2,\pi/2]$ y $\operatorname{arc\,cos}(\cos x)=x$ para $x\in[0,\pi]$. Por tanto ambas igualdades son válidas para $x\in[0,\pi/2]$. Hemos probado así que la derivada de F es nula en el intervalo $[0,\pi/2]$, lo que implica que F es constante en dicho intervalo.

Para terminar, bastará comprobar que algún valor de F es igual a $\pi/4$. Para ello, recordemos que $\operatorname{arc\,sen} x+\operatorname{arc\,cos} x=\pi/2$ para todo $x\in[-1,1]$. Como $\cos^2(\pi/4)=\operatorname{sen}^2(\pi/4)=1/2$, obtenemos fácilmente que $F(\pi/4)=\pi/4$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{187}}$ Sea g una función derivable en $\mathbb{R}$ y dos veces derivable en 0, siendo además $g(0)=0$. Estudia la derivabilidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(0)=g'(0),\qquad f(x)=\frac{1}{x}\int\limits_0^x\frac{g(t)}{t}\,\mathrm{d}t\quad(x\neq 0).$$

¿Es f de clase C^1?

Solución. Pongamos $h(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ para $x \neq 0$. Como

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0),$$

definiremos $h(0) = g'(0)$. Con ello, la función h es continua en $\mathbb{R}$. Deducimos que f es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y:

$$f'(x) = \frac{x\frac{g(x)}{x} - \int_0^x \frac{g(t)}{t}\,dt}{x^2} = \frac{g(x) - \int_0^x \frac{g(t)}{t}\,dt}{x^2}.$$

La derivada de f es claramente continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Comprobaremos que f es continua en 0 y que su derivada tiene límite en 0, en cuyo caso la proposición 6.19 nos dice que f es de clase C^1. Para calcular el límite de f en 0 podemos aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = g'(0) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

Lo que prueba que f es continua en 0 y, por tanto, f es continua en $\mathbb{R}$. Para calcular el límite de $f'(x)$ en 0, como g es derivable, podemos aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{g'(x) - \frac{g(x)}{x}}{2x} = -\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - xg'(x)}{2x^2}.$$

Este último límite no puede calcularse por la regla de L'Hôpital porque no sabemos si g' es derivable. Pensando un poquito, nos damos cuenta de que podemos calcularlo como sigue. La idea es conseguir utilizar la hipótesis de que g es dos veces derivable en 0.

$$\frac{g(x) - xg'(x)}{2x^2} = \frac{g(x) - xg'(0) + xg'(0) - xg'(x)}{2x^2} = \frac{g(x) - xg'(0)}{2x^2} - \frac{g'(x) - g'(0)}{2x}.$$

Para calcular el límite de la primera fracción en 0 podemos aplicar L'Hôpital (o el teorema de Taylor – Young) y tenemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - xg'(0)}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{4x} = \frac{1}{4}g''(0).$$

Y $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{2x} = \frac{1}{2}g''(0)$. Concluimos que $\displaystyle\lim_{x \to 0} f'(x) = \frac{1}{4}g''(0)$. Por la proposición 6.19, concluimos que f es derivable en 0 con $f'(0) = \dfrac{1}{4}g''(0)$ y, por tanto, f' es continua en 0, luego f es una función de clase C^1 en $\mathbb{R}$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{188}$ Sea $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt$. Estudia los extremos relativos y absolutos de F, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y calcula el límite de F en $+\infty$.

Solución. Observa que todo lo que se pide en este ejercicio depende del conocimiento de la función derivada de F que podemos calcular fácilmente.

Poniendo $F(x)=\int_0^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, deducimos que:

$$F'(x)=2\,\mathrm{e}^{-4x^2}-\mathrm{e}^{-x^2}=\mathrm{e}^{-x^2}\left(2\,\mathrm{e}^{-3x^2}-1\right) \qquad (x\geqslant 0)$$

El signo de F' es el mismo de $2\,\mathrm{e}^{-3x^2}-1$. Tenemos que:

$$2\,\mathrm{e}^{-3x^2}-1\geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{-3x^2}\geqslant\frac{1}{2} \iff 3x^2\leqslant \log 2 \iff |x|\leqslant\sqrt{\frac{\log 2}{3}}$$

Como consideramos que $x\geqslant 0$, obtenemos que $F'(x)\geqslant$ para $x\in[0,\sqrt{\frac{\log 2}{3}}]$ y $F'(x)\leqslant 0$ para $x\geqslant\sqrt{\frac{\log 2}{3}}$. Por tanto F es creciente en $[0,\sqrt{\frac{\log 2}{3}}]$ y es decreciente en $[\sqrt{\frac{\log 2}{3}},+\infty[$. Deducimos que en $x_0=\sqrt{\frac{\log 2}{3}}$ la función F alcanza un valor máximo absoluto en $[0,+\infty[$. No hay otros extremos relativos, además de x_0, porque la derivada solamente se anula en x_0.

Por su definición, se tiene que $F(x)>0$ para todo $x>0$, pues F es la integral de la función continua positiva e^{-t^2} en el intervalo $[x,2x]$. Como $F(0)=0$, resulta que F alcanza en 0 un valor mínimo absoluto.

Calculemos la segunda derivada.

$$F''(x)=-16x\,\mathrm{e}^{-4x^2}+2x\,\mathrm{e}^{-x^2}=2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\left(1-8\,\mathrm{e}^{-3x^2}\right) \qquad (x\geqslant 0)$$

Se obtiene fácilmente que $F''(x)\leqslant 0$ para $x\in[0,\sqrt{\log 2}]$ y $F''(x)\geqslant 0$ para $x\geqslant\sqrt{\log 2}$. Por tanto, F es cóncava en $[0,\sqrt{\log 2}]$ y convexa en $[\sqrt{\log 2},+\infty[$. Deducimos que F tiene un único punto de inflexión en $x_1=\sqrt{\log 2}$.

Finalmente, como:

$$0\leqslant F(x)=\int_x^{2x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_x^{2x}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}t=x\,\mathrm{e}^{-x^2},$$

y $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x^2}=0$, obtenemos que $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\mathbf{189}}$ Calcula los siguientes límites.

$$a)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\displaystyle\int_0^{x^2}\operatorname{sen}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t}{x^3} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\displaystyle\int_0^{x}\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^{x}\mathrm{e}^{t^2}\operatorname{sen}t\,\mathrm{d}t} \qquad c)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\displaystyle\int_0^{x^2}\left(\mathrm{e}^{-t^2}-\mathrm{e}^{-1}\right)\mathrm{d}t}{x\sqrt{x}}$$

$$d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_1^{x^2+1}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t}{x^2} \qquad e)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\displaystyle\int_0^{x}\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\displaystyle\int_0^{x}\mathrm{e}^{2t^2}\,\mathrm{d}t} \qquad f)\ \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{x}(\operatorname{sen}t+\cos t-1)\,\mathrm{d}t}{x^2}$$

Solución. Todos ellos se calculan aplicando las reglas de L'Hôpital.

a) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t}{x^3} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2x\operatorname{sen}(\sqrt{x^2})}{3x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen}(|x|)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{2}{3}.$$

Observa que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t}{x^3} = -\frac{2}{3}$, por tanto, no existe el límite en 0 de dicha función.

e) Se trata de una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\,\mathrm{d}t} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\,\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{2x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{x^2}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\,\mathrm{e}^{x^2}}{2x\,\mathrm{e}^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{190}}$ Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias y calcúlalas cuando sean convergentes.

$$a)\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2+x+1}} \qquad b)\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad c)\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x$$
$$d)\int_0^{+\infty} \frac{1+x^4}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x \qquad e)\int_0^{1} \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad f)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencias. En *a)* hacer $x = 1/t$ y en *d)* $x = \operatorname{tg} t$.

Solución. En todos los casos, salvo a) y d), podemos calcular una primitiva inmediata que se puede usar para calcular la integral y, de paso, comprobar su convergencia. Antes de hacer a) y d) estudia las técnicas de cálculo de primitivas.

c) $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to+\infty}\int_0^{u} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x = 2\lim_{u\to+\infty} \operatorname{arc\,tg}\sqrt{u} = \pi.$$

d) La función que se integra se hace infinita en los extremos del intervalo -1 y 1.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-1}\int_t^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to 1}\int_0^{t} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\lim_{t\to-1} \operatorname{arc\,sen} t + \lim_{t\to 1} \operatorname{arc\,sen} t = \pi.$$

e) $$\int_0^{1} \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0}\int_t^{1} \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x = -\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}(\log t)^2 = -\infty.$$

☺

Ejercicio resuelto $\boxed{191}$ Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias.

$$a)\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,,\quad b)\int_0^1 \frac{x}{x-\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x\quad c)\int_0^{+\infty}\frac{x+5}{x^3+x}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia. Usa los criterios de comparación.

Solución. Para hacer este ejercicio y los siguientes debes tener presentes los resultados 8.10 y 8.11.

a) Pongamos $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2\sqrt{x}}$. Se trata de estudiar la convergencia de la integral de f en $]0,1]$. La función $f(x)$ es positiva y asintóticamente equivalente a $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ para $x\to 0$. Como $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ es convergente, por ser de la forma $\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ con $\alpha=\frac{1}{2}<1$, deducimos, por el criterio límite de comparación, que la integral $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente.

c) Pongamos $f(x)=\dfrac{x+5}{x^3+x}$. Es una función positiva para $x\geqslant 0$. Se trata de estudiar la convergencia de la integral de f en $]0,+\infty[$. Para ello estudiaremos la convergencia de las integrales de f en $]0,1]$ y en $[1,+\infty[$. Tenemos las equivalencias asintóticas:

$$f(x)=\frac{x+5}{1+x^2}\frac{1}{x}\sim\frac{5}{x}\quad(x\to 0),\qquad f(x)=\frac{x+5}{x+\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}\sim\frac{1}{x^2}\quad(x\to+\infty)$$

Como la integral $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ es convergente, se sigue que la integral de f en $[1,+\infty[$ es convergente.

Como la integral $\int_0^1\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ es positivamente divergente, se sigue que la integral de f en $]0,1]$ es positivamente divergente. Por tanto la integral de f en $]0,+\infty[$ es positivamente divergente. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{192}$ Estudia la convergencia de la integral

$$I=\int_0^{+\infty}x^\alpha\frac{x+\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x$$

Según los valores de $\alpha\in\mathbb{R}$.

Solución. Pongamos $f(x)=x^\alpha\dfrac{x+\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{sen} x}$. Como $|\operatorname{sen} x|<x$ para todo $x>0$, se sigue que $f(x)>0$ para todo $x>0$. Se trata de estudiar la convergencia de la integral de f en $]0,+\infty[$. Para ello estudiaremos la convergencia de las integrales de f en $]0,1]$ y en $[1,+\infty[$. Tenemos las equivalencias asintóticas:

$$x+\operatorname{sen} x\sim 2x\quad\text{y}\quad x-\operatorname{sen} x\sim\frac{1}{3}x^3\quad(x\to 0)\Longrightarrow f(x)\sim 6x^{\alpha-2}\quad(x\to 0)$$

Como la integral $\int_0^1 x^{\alpha-2}\,\mathrm{d}x$ es convergente si, y sólo si, $\alpha-2>-1$, deducimos que la integral de f en $]0,1]$ es convergente si, y sólo si, $\alpha>1$.

Tenemos también la equivalencia asintótica $f(x)\sim x^\alpha$ para $x\to+\infty$. Como la integral $\int_1^{+\infty}x^\alpha\,\mathrm{d}x$ es convergente si, y sólo si, $\alpha<-1$, deducimos que la integral de f en $[1,+\infty[$ es convergente si, y sólo si, $\alpha<-1$. Por tanto, la integral de f en $]0,+\infty[$ no converge para ningún valor de α. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{193}$ Prueba que la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ es absolutamente convergente para $p>1$, es convergente pero no absolutamente convergente para $0<p\leqslant 1$ y no es convergente para $p\leqslant 0$.

Sugerencia. Para $0<p\leqslant 1$ usa el segundo teorema de la media.

Solución. Pongamos $f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x^p}$. Como $|f(x)|\leqslant\frac{1}{x^p}$ y, para $p>1$ la integral $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ es convergente, se sigue, por el criterio de comparación, que la integral $\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ es absolutamente convergente para $p>1$.

Supongamos que $0<p\leqslant 1$. Entonces podemos aplicar el segundo teorema de la media porque la función $\frac{1}{x^p}$ es decreciente en $[1,+\infty[$. Dados $v>u>1$, dicho teorema afirma que hay algún $c\in[u,v]$ tal que:

$$\int_u^v \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{u^p}\int_u^c \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{v^p}\int_c^v \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x\,.$$

Teniendo en cuenta que $\left|\int_a^b \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x\right| = |\cos a-\cos b|\leqslant|\cos a|+|\cos b|\leqslant 2$, deducimos que:

$$\left|\int_u^v \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{u^p}+\frac{2}{v^p}.$$

De esta desigualdad se deduce que la función $F(x)=\int_1^x \frac{\operatorname{sen} t}{t^p}\,\mathrm{d}t$ satisface la condición de Cauchy en $+\infty$. Pues, dado $\varepsilon>0$, basta tomar $u_\varepsilon>1$ tal que $\dfrac{2}{u_\varepsilon^p}<\dfrac{\varepsilon}{2}$ (lo que puede hacerse por ser $p>0$) para obtener que para todos $v>u>u_\varepsilon$ es:

$$|F(u)-F(v)| = \left|\int_u^v \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{u^p}+\frac{2}{v^p}<\varepsilon.$$

Concluimos, por la proposición 8.32, que la función $F(x)$ tiene límite finito en $+\infty$, esto es, la integral $\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ es convergente.

Para probar que la integral no es absolutamente convergente para $0<p\leqslant 1$ podemos razonar como sigue. Observa que $\operatorname{sen} x\geqslant 1/\sqrt{2}$ para $x\in[\pi/4,3\pi/4]$ y, por la periodicidad del seno, también será $\operatorname{sen} x\geqslant 1/\sqrt{2}$ para $x\in[2k\pi+\pi/4,2k\pi+3\pi/4]$, donde $k=0,1,2,\dots$. Tenemos que para todo $x\in[2k\pi+\pi/4,2k\pi+3\pi/4]$ es:

$$\frac{|\operatorname{sen} x|}{x^p}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(2k\pi+3\pi/4)^p}>\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(2k+1)^p\pi^p}>\frac{1}{2\pi^p\sqrt{2}}\frac{1}{(k+1)^p}.$$

Deducimos que:

$$\int_{2k\pi+\pi/4}^{2k\pi+3\pi/4}\frac{|\operatorname{sen} x|}{x^p}\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{\pi}{4\pi^p\sqrt{2}}\frac{1}{(k+1)^p}.$$

Tenemos que para todo $n\in\mathbb{N}$:

$$\int_1^{2n\pi+3\pi/4}\frac{|\operatorname{sen} x|}{x^p}\,\mathrm{d}x\geqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{2k\pi+\pi/4}^{2k\pi+3\pi/4}\frac{|\operatorname{sen} x|}{x^p}\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{\pi}{4\pi^p\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^p}.$$

Como $0 < p \leqslant 1$ se tiene que $(k+1)^p \leqslant k+1$, luego:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^p} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = H_{n+1} - 1$$

donde $\{H_n\} = \{1 + 1/2 + \cdots + 1/n\}$ es la serie armónica. Sabemos que $\{H_n\} \to +\infty$, por lo que de las dos desigualdades anteriores se sigue que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{1}^{2n\pi+3\pi/4} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^p}\, \mathrm{d}x = +\infty \implies \lim_{t\to+\infty} \int_{1}^{t} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^p}\, \mathrm{d}x = +\infty.$$

Luego la integral no converge absolutamente para $0 < p \leqslant 1$.

Finalmente, si $p \leqslant 0$ se comprueba que la función $F(x)$ no verifica la condición de Cauchy en $+\infty$, por lo que no existe el límite de $F(x)$ en $+\infty$, es decir, la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\, \mathrm{d}x$ no es convergente. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\mathbf{194}}$ Estudia para qué valores de α y β son convergentes las integrales siguientes.

$$a) \int_{1}^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{\beta x}\, \mathrm{d}x \qquad b) \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)}\, \mathrm{d}x \qquad c) \int_{0}^{1} x^\alpha (1-x)^\beta\, \mathrm{d}x$$

Sugerencia. Utiliza el criterio límite de comparación.

Solución. Son integrales de funciones positivas y podemos usar los criterios de comparación.

a) Sabemos que para todo $s < 0$ es $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{sx} = 0$ cualquiera sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Pongamos $f(x) = x^\alpha \mathrm{e}^{\beta x}$. Si $\beta < 0$, sea $s = \beta/2$. Tenemos que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\mathrm{e}^{sx}} = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{sx} = 0.$$

Por tanto, hay algún $u_0 > 1$ tal que para todo $x \geqslant u_0$ se verifica que $\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^{sx}} \leqslant 1$, esto es, $f(x) \leqslant \mathrm{e}^{sx}$. Como $s < 0$ la integral $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{sx}\, \mathrm{d}x$ es convergente y, por el criterio de comparación, deducimos que la integral $\int_1^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{\beta x}\, \mathrm{d}x$ también es convergente.

Si $\beta > 0$ un razonamiento parecido al anterior, prueba que la integral es positivamente divergente para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Finalmente, si $\beta = 0$ sabemos que la integral converge si, y sólo si, $\alpha < -1$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\mathbf{195}}$ Justifica que hay una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable cuya derivada es $f'(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ para todo $x \neq 0$, y $f'(0) = 0$.

Solución. Como la función $h(x) = \operatorname{sen}(1/x)$, $h(0) = 0$ es continua y acotada en $\mathbb{R}^*$ y tiene una única discontinuidad en 0, el Teorema Fundamental del Cálculo implica que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \int_{0}^{x} \operatorname{sen}(1/t)\, \mathrm{d}t$$

es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en todo punto $x \neq 0$ con derivada $f'(x) = \operatorname{sen}(1/x)$. Queda probar que f es derivable en 0 con $f'(0) = 0$. La derivada de f en 0 viene dada por el límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen}(1/t)\,\mathrm{d}t}{x}.$$

Dicho límite es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ (siempre es así cuando calculamos la derivada de una función continua). No puede aplicarse L'Hôpital para calcular dicho límite porque el cociente de las derivadas es justamente $\operatorname{sen}(1/x)$ que no tiene límite en 0. Como queremos probar que dicho límite es 0 el camino obligado es tratar de acotar la integral. Para ello, vamos a hacer primero un cambio de variable. Suponemos en lo que sigue que $x > 0$.

$$\int_0^x \operatorname{sen}(1/t)\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{c} t = 1/s,\ \ \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}s}{s^2} \\ t = x,\ s = 1/x,\ t = 0,\ s = +\infty \end{array}\right] = \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} s}{s^2}\,\mathrm{d}s = \lim_{u\to+\infty} \int_{\frac{1}{x}}^{u} \frac{\operatorname{sen} s}{s^2}\,\mathrm{d}s$$

Sea $u > 1/x$. Podemos aplicar el segundo teorema de la media para obtener que hay algún punto $c \in [1/x, u]$ tal que:

$$\int_{\frac{1}{x}}^{u} \frac{\operatorname{sen} s}{s^2}\,\mathrm{d}s = x^2 \int_{\frac{1}{x}}^{c} \operatorname{sen} s\,\mathrm{d}s + \frac{1}{u^2} \int_{c}^{u} \operatorname{sen} s\,\mathrm{d}s\,.$$

Teniendo ahora en cuenta que $\left|\int_a^b \operatorname{sen} s\,\mathrm{d}s\right| = |\cos b - \cos a| \leqslant 2$, deducimos que para todo $u > 1/x$ se verifica que:

$$\left|\int_{\frac{1}{x}}^{u} \frac{\operatorname{sen} s}{s^2}\,\mathrm{d}s\right| \leqslant 2x^2 + \frac{2}{u^2} \Longrightarrow \left|\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} s}{s^2}\,\mathrm{d}s\right| = \lim_{u\to+\infty} \left|\int_{\frac{1}{x}}^{u} \frac{\operatorname{sen} s}{s^2}\,\mathrm{d}s\right| \leqslant 2x^2 \Longrightarrow$$

$$\left|\frac{\int_0^x \operatorname{sen}(1/t)\,\mathrm{d}t}{x}\right| \leqslant 2x \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\int_0^x \operatorname{sen}(1/t)\,\mathrm{d}t}{x} = 0.$$

Hemos probado así que f es derivable por la derecha en 0 con derivada por la derecha en 0 igual a 0. El mismo razonamiento prueba que f es derivable por la izquierda en 0 con derivada por la izquierda en 0 igual a 0 (alternativamente, puedes usar que f es una función par). Por tanto, f es derivable en 0 y $f'(0) = 0$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\mathbf{196}}$ Sea $f : \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(0) = 0$, $f(1) = \log 2$ y

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\log t}\,\mathrm{d}t \qquad (0 \neq x \neq 1).$$

a) Prueba que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \log 2$ y justifica que f es de clase C^1.

Aplicación. Calcula la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\log t}\,\mathrm{d}t$.

Sugerencia: Sea $g(t)=\dfrac{t-1}{\log t}$. Utiliza el primer teorema de la media para integrales para obtener que si $0<x\neq 1$ hay algún punto $c=c(x)$ comprendido entre x y x^2 tal que:

$$f(x)=g(c)\int_x^{x^2}\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

Solución. Definamos $g(1)=1$. Con ello, la función g es continua en $\mathbb{R}_o^+$. Puesto que:

$$f(x)=\int_x^{x^2} g(t)\frac{\mathrm{d}t}{t-1},$$

el primer teorema de la media implica que hay algún punto $c=c(x)$ comprendido entre x y x^2 tal que:

$$f(x)=g(c)\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{t-1}=g(c)(\log|x^2-1|-\log|x-1|)=g(c)\log\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right|=g(c)\log(x+1).$$

Puesto que, claramente se verifica que $x\to 1 \;\Rightarrow\; c=c(x)\to 1 \;\Rightarrow\; g(c)\to g(1)=1$, de la igualdad anterior deducimos que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\log 2$. Por otra parte es claro que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$ (observa que podemos definir la función $t\mapsto \frac{1}{\log t}$ igual a 0 para $t=0$, con lo que es continua en 0). Resulta así que f es continua en $\mathbb{R}_o^+$. Tenemos también que para $0\neq x\neq 1$ es:

$$f(x)=-\int_0^x\frac{1}{\log t}\,\mathrm{d}t+\int_0^{x^2}\frac{1}{\log t}\,\mathrm{d}t \Longrightarrow f'(x)=-\frac{1}{\log x}+\frac{2x}{\log(x^2)}=\frac{x-1}{\log x}=g(x).$$

Como $\lim_{x\to 0} f'(x)=0$ y $\lim_{x\to 1} f'(x)=g(1)=1$, deducimos por la proposición 6.19 que f es derivable en todo $\mathbb{R}_o^+$, con $f'(0)=0$, $f'(1)=1$ y f' es continua en $\mathbb{R}_o^+$, es decir, f es de clase C^1.

Finalmente, como f ha resultado ser una primitiva de g en $\mathbb{R}_o^+$, tenemos que:

$$\int_0^1\frac{t-1}{\log t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t=f(1)-f(0)=\log 2.$$

☺

8.6. Técnicas de cálculo de Primitivas

8.6.1. Calcular una primitiva...¿Para qué?

Para calcular $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ donde f es una función continua, hay que calcular una primitiva de f, evaluarla en a y en b y hacer la diferencia. Pero, ¿para qué calcular una primitiva? ¿no sabemos ya que una primitiva de f es la función $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$? Y, naturalmente, cualquier otra será de la forma $F(x)+C$ donde C es una constante. ¿Qué interés tiene entonces el cálculo de primitivas de funciones continuas? Respuesta: desde un punto de vista teórico ninguno. Ahora, si lo que queremos es aplicar la regla de Barrow para calcular el número $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, entonces la primitiva $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ no nos sirve para nada porque si la evaluamos en a y en b y hacemos la diferencia obtenemos una identidad perfectamente inútil para nuestros propósitos. Lo que necesitamos es conocer una primitiva de f que sea realmente evaluable, es decir que al evaluarla en a y en b proporcione valores numéricos.

En otros términos, *el problema del cálculo de primitivas consiste en tratar de expresar la* "primitiva trivial" $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *por medio de funciones elementales*[4] *que permitan una evaluación efectiva de la integral*. Para eso sirven las técnicas de cálculo de primitivas.

Pero no hay que olvidar que, si bien la derivada de una función elemental también es una función elemental, es frecuente que una función elemental no tenga primitivas que puedan expresarse por medio de funciones elementales. Esto ocurre, por ejemplo, con las funciones e^{-x^2}, $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, $\operatorname{sen}(x^2)$, $\sqrt{x^3+1}$, y muchas más. En tales casos la forma más sencilla de representar una primitiva de f es justamente mediante la función $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ y, para obtener valores concretos de dicha función hay que recurrir a métodos numéricos de cálculo de integrales.

En lo que sigue vamos a considerar algunos tipos de funciones elementales cuyas primitivas también pueden expresarse por medio de funciones elementales y pueden calcularse con procedimientos más o menos sistemáticos.

Para leer lo que sigue necesitas tener papel y un bolígrafo a mano para ir haciendo los ejercicios que se proponen. A calcular primitivas se aprende practicando; la imprescindible agilidad en los cálculos la lograrás haciendo decenas de ejercicios. Fíjate que, en la mayoría de los casos, se trata de ejercicios en los que tan sólo tienes que aplicar una técnica general a un caso particular. Esto es tan *"fácil"* que lo saben hacer los programas de cálculo simbólico, como *Mathematica*, *Derive*, *Mapple* y otros. Cuando se logre fabricar una calculadora de bolsillo que pueda ejecutar estos programas quizás ya no sea imprescindible aprender a calcular primitivas, pero hasta que llegue ese momento sigue siendo necesario que aprendas a calcular primitivas con agilidad. Sería lamentable que, por no saber calcular una primitiva, no puedas resolver una sencilla ecuación diferencial, ni calcular una probabilidad, ni el área de una superficie, ... Las aplicaciones del cálculo integral son tan variadas, que el tiempo que dediques a la práctica del cálculo de primitivas será más rentable de lo que ahora puedas imaginar.

Con cada técnica de cálculo de primitivas, se incluyen ejemplos y se proponen ejercicios sencillos para que compruebes si sabes aplicarla. Encontrarás al final una sección de ejercicios resueltos de cálculo de primitivas en la que se dan soluciones detalladas de algunos de los

[4]Las funciones que se obtienen por medio de sumas, productos, cocientes y composiciones a partir de las funciones racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y sus inversas, se llaman funciones elementales.

ejercicios propuestos y de otros nuevos.

8.6.2. Observaciones sobre la notación y terminología usuales

Para representar una primitiva de una función f, suele usarse la notación $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Así, por ejemplo, se escribe $\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \log|x-a|$. Esta notación es algo imprecisa porque no especifica el intervalo en que se considera definida f. En el ejemplo anterior hay que interpretar que la función $\frac{1}{x-a}$ está definida en uno de los intervalos $]-\infty, a[$ o $]a, +\infty[$ y elegir la primitiva correspondiente. Estos pequeños inconvenientes están compensados por la comodidad en los cálculos que proporciona esta notación. Es frecuente también, aunque no lo haremos en lo que sigue (pero mira el ejercicio (392)), añadir una constante arbitraria, C, y escribir $\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \log|x-a| + C$.

La integral de una función en un intervalo, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, se llama a veces *"integral definida"* de f (y es un número), y al símbolo $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ se le llama *"integral indefinida"* o, simplemente, *"integral"* de f (y representa una primitiva cualquiera de f). Aunque esto puede ser confuso, no olvides que, *cuando hablamos de calcular la integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ lo que realmente queremos decir es que queremos calcular una primitiva de f.*

Como ya sabes, en los símbolos $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ o $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ la letra "x" puede sustituirse por cualquier otra y el símbolo "$\mathrm{d}x$" (que se lee *"diferencial x"*) sirve para indicar la variable de integración. Esto es muy útil si la función f contiene parámetros. Por ejemplo, son muy diferentes las integrales $\int x^y\,\mathrm{d}x$ y $\int x^y\,dy$.

Te recuerdo también que, si $y = y(x)$ es una función de x, suele usarse la notación $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$ que es útil para mecanizar algunos cálculos pero que no tiene ningún significado especial: es una forma de indicar que y' es la derivada de y respecto a x.

Finalmente, si φ es una función, usamos la notación $\varphi(x)\big|_{x=c}^{x=d}$ o simplemente, $\varphi(x)\big|_c^d$ para indicar el número $\varphi(d) - \varphi(c)$, y la notación $\varphi(x)\big|_{x\to a}^{x\to b}$ para indicar $\lim\limits_{x\to b}\varphi(x) - \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$. Esta notación es cómoda para las integrales impropias.

8.6.3. Primitivas inmediatas

Para calcular primitivas debes ser capaz de reconocer inmediatamente las siguientes primitivas inmediatas. Como ya se ha indicado antes, se omite, por brevedad, la constante de integración. Te recuerdo que:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\operatorname{senh} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$$

$$\operatorname{argsenh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad \operatorname{argcosh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad \operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

En la siguiente lista de primitivas inmediatas se supone que $a > 0$ y que las raíces cuadradas toman valores reales, es decir, las funciones radicando son positivas.

Tabla de primitivas inmediatas

$$\int f(x)^{\alpha} f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha\in\mathbb{R}, \alpha\neq -1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} \log(f(x)), & \text{si } f(x)>0; \\ \log(-f(x)), & \text{si } f(x)<0. \end{array}\right\} = \log(|f(x)|)$$

$$\int \mathrm{e}^{f(x)} f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{f(x)}$$

$$\int \operatorname{sen}(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(f(x))$$

$$\int \cos(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen}(f(x))$$

$$\int \sec(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \log\big|\sec(f(x))+\operatorname{tg}(f(x))\big|$$

$$\int \operatorname{cosec}(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \log\big|\operatorname{cosec}(f(x))-\operatorname{cotg}(f(x))\big|$$

$$\int \sec^2(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg}(f(x))$$

$$\int \operatorname{cosec}^2(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg}(f(x))$$

$$\int \operatorname{tg}^2(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg}(f(x))-f(x)$$

$$\int \operatorname{cotg}^2(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg}(f(x))-f(x)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{f(x)}{a}$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-f(x)^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arc\,sen}\frac{f(x)}{a}$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = \log\left(f(x)+\sqrt{f(x)^2+a^2}\right)$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \log\left(f(x)+\sqrt{f(x)^2-a^2}\right)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{f(x)^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{a}\sqrt{f(x)^2-a^2}\right)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{a^2-f(x)^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\log\left(\frac{a+\sqrt{a^2-f(x)^2}}{f(x)}\right)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{f(x)^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\log\left(\frac{a+\sqrt{a^2+f(x)^2}}{f(x)}\right)$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{argsenh}\frac{x}{a}$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

8.6.4. Integración por partes

Si u y v son funciones con derivada primera continua en un intervalo, por la regla de derivación para un producto sabemos que: $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Deducimos que la función producto uv es una primitiva de la función $u'v + v'u$, es decir:

$$\int (u'(x)v(x)+u(x)v'(x))\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) \Longrightarrow \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Lo que suele escribirse en la forma:

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u\,. \tag{8.18}$$

Por supuesto, esta igualdad podemos usarla para calcular integrales definidas:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{8.19}$$

Finalmente, si u y v están definidas en un intervalo abierto de extremos $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ *y existen los límites* $\lim\limits_{x\to a} u(x)v(x)$ y $\lim\limits_{x\to b} u(x)v(x)$, entonces la igualdad (8.19) nos dice que las integrales $\int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$ y $\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ ambas convergen o ninguna converge y, cuando son convergentes se verifica que:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_{x\to a}^{x\to b} - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.20}$$

Naturalmente, si queremos usar este método para calcular una integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ lo primero que hay que hacer es expresar $f(x) = u(x)w(x)$ de forma que el cálculo de $v(x)$ por la condición, $v'(x) = w(x)$, es decir la integral $v(x) = \int w(x)\,\mathrm{d}x$, sea inmediata. Tenemos entonces

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int u(x)w(x)\,\mathrm{d}x = \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.21}$$

Veamos algunas situaciones en las que este método puede aplicarse con éxito.

- Cuando la integral $\int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$ es inmediata. Por ejemplo, para calcular una integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ en la que la derivada de $f(x)$ es más sencilla que la propia función, como es el caso de $\log x$, $\operatorname{arc\,sen} x$, $\operatorname{arc\,tg} x$. Entonces conviene tomar $u(x) = f(x)$ y $v'(x) = w(x) = 1$ en (8.21), con ello resulta que:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = xf(x) - \int xf'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

8.37 Ejemplo.

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arc\,tg} x \to \mathrm{d}u = \dfrac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \to v = x \end{array}\right] = x\operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$x\operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

♦

• Cuando la integral $\int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$ es del mismo tipo que la integral de partida, pero más sencilla, de manera que reiterando el proceso se llega a una integral inmediata. Este es el caso cuando $f(x)$ es de la forma $P(x)\,\mathrm{e}^{ax}$, $P(x)\,\mathrm{sen}(ax)$, $P(x)\cos(ax)$, donde $P(x)$ es una función polinómica. En todos los casos se elige $u(x)=P(x)$, y $v'(x)=\mathrm{e}^{ax}$, $v'(x)=\mathrm{sen}(ax)$, $v'(x)=\cos(ax)$.

8.38 Ejemplo.

$$\int P(x)\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} u=P(x)\to\ \mathrm{d}u\ = P'(x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v\ = \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x\ \to v=\dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{a}\end{array}\right] = P(x)\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a}-\frac{1}{a}\int P'(x)e^{ax}\,\mathrm{d}x$$

La última integral es *del mismo tipo que la primera pero con el grado del polinomio rebajado en una unidad*. El proceso se repite tantas veces como sea necesario. ♦

• Cuando la integral $\int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$ es parecida a la de partida, de forma que al volver a aplicar el proceso la integral de partida se repite y es posible despejarla de la igualdad obtenida.

8.39 Ejemplo.

$$\int\cos(\log x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} u=\cos(\log x)\to\ \mathrm{d}u\ = -\dfrac{1}{x}\,\mathrm{sen}(\log x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v\ =\ \mathrm{d}x\ \to v=x\end{array}\right]=$$

$$= x\cos(\log x)+\int\mathrm{sen}(\log x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} u=\mathrm{sen}(\log x)\to\ \mathrm{d}u\ = \dfrac{1}{x}\cos(\log x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v\ =\ \mathrm{d}x\ \to v=x\end{array}\right]=$$

$$= x\cos(\log x)+x\,\mathrm{sen}(\log x)-\int\cos(\log x)\,\mathrm{d}x$$

deducimos que $\displaystyle\int\cos(\log x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\big(\cos(\log x)+\mathrm{sen}(\log x)\big)$. ♦

8.6.4.1. Integración por recurrencia

La técnica de integración por partes permite en algunas ocasiones relacionar una integral de la forma $I_n=\int f(x,n)\,\mathrm{d}x$ en la que interviene un parámetro n (con frecuencia un número natural) con otra del mismo tipo en la que el parámetro ha disminuido en una o en dos unidades. Las expresiones así obtenidas se llaman fórmulas de reducción o de recurrencia y permiten el cálculo efectivo de la integral cuando se particularizan valores del parámetro. Los siguientes ejemplos son ilustrativos de esta forma de proceder.

8.40 Ejemplo.

$$\int(\log x)^n\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} u=(\log x)^n\to\ \mathrm{d}u\ = n\dfrac{(\log x)^{n-1}}{x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v\ =\ \mathrm{d}x\ \to v=x\end{array}\right] = x(\log x)^n - n\int(\log x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

♦

8.41 Ejemplo.

$$I_n = \int x^n \, \mathrm{e}^{ax} \, \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u = x^n \to \mathrm{d}u = nx^{n-1} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{ax} \, \mathrm{d}x \to v = \dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{a} \, \mathrm{d}x \end{array} \right] = \frac{1}{a}(x^n \, \mathrm{e}^{ax} - nI_{n-1})$$

♦

8.42 Ejemplo (Fórmulas de Wallis y de Stirling).

$$J_n = \int \operatorname{sen}^n x \, \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{sen}^{n-1} x \to \mathrm{d}u = (n-1) \operatorname{sen}^{n-2} x \cos x \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x \to v = -\cos x \end{array} \right] =$$
$$= -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x \, \mathrm{d}x =$$
$$= -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, \mathrm{d}x - (n-1) J_n$$

Y deducimos fácilmente que $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{n} \cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, \mathrm{d}x$. En particular:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x \, \mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x \, \mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Como $I_0 = \pi/2$ e $I_1 = 1$, se deducen fácilmente las igualdades:

$$I_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}, \quad I_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8.22}$$

Como la sucesión $\{I_n\}$ es decreciente, tenemos que $I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$, de donde:

$$1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$$

Por el principio del as sucesiones encajadas, deducimos que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$. Puesto que:

$$1 \sim \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} =$$
$$= \pi \frac{2n+1}{2} \left(\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right)^2 \sim \pi n \left(\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right)^2$$

Deducimos la llamada fórmula de Wallis:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)} \right)^2. \tag{8.23}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{(n!)^2 2^{2n}}{\sqrt{n}(2n)!} = \frac{\big(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)\big)^2}{\sqrt{n}\big(2 \cdot 4 \cdots (2n)\big)\big(3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\big)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)},$$

deducimos que:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{\sqrt{n}(2n)!}. \tag{8.24}$$

Definamos:

$$a_n = \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}.$$

Es de comprobación inmediata que:

$$\frac{(n!)^2 2^{2n}}{\sqrt{n}(2n)!} = \frac{a_n^2}{\sqrt{2}a_{2n}}$$

Supongamos que la sucesión $\{a_n\}$ converge a un número $L > 0$ (lo que probaremos después). Entonces también será $\{a_{2n}\} \to L$ y de la igualdad anterior y la (8.24) se deduce que:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} = \frac{a_n^2}{\sqrt{2}a_{2n}} = \frac{L^2}{\sqrt{2}L} = \frac{L}{\sqrt{2}}.$$

Por tanto $L = \sqrt{2\pi}$. Obtenemos así la fórmula de Stirling:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}.$$

Que suele escribirse en la forma:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\, n^n\,\mathrm{e}^{-n}} = 1. \tag{8.25}$$

Se trata de un límite muy útil porque proporciona la equivalencia asintótica para el factorial:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n\,\mathrm{e}^{-n} = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \tag{8.26}$$

Nos que probar que la sucesión $\{a_n\}$ converge a un número positivo. Probaremos que es decreciente.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}\,\frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{(n+1)!\,\mathrm{e}^{n+1}} = \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

Tomando logaritmos:

$$\log\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1.$$

Usaremos ahora el teorema de Taylor Young. El polinomio de Taylor de orden 3 de la función $\log(1+x)$ en 0 es $x - x^2/2 + x^3/3$. Por tanto.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3). \tag{8.27}$$

Te recuerdo que usamos la notación de Landau $o(x^3)$ simplemente para indicar que:

$$\lim \frac{o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{x^3} = 0.$$

En particular, si $\{x_n\} \to 0$ se verificará que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o(x_n)}{x_n^3} = 0. \tag{8.28}$$

Usando la igualdad (8.27), deducimos que:

$$\log \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o(n^{-3})\right) - 1 =$$
$$= \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{6n^3} + no(n^{-3}) + \frac{1}{2}o(n^{-3}) = \frac{1}{12n^2} + o(n^{-2}).$$

Teniendo en cuenta (8.28), deducimos que:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \log \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{12} + \lim_{n\to\infty} \frac{o(n^{-2})}{n^{-2}} = \frac{1}{12}.$$

Por tanto, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geqslant n_0$ se verifica que:

$$0 < k^2 \log \frac{a_k}{a_{k+1}} < \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \Longrightarrow 0 < \log \frac{a_k}{a_{k+1}} < \frac{1}{6k^2}.$$

Sumando estas desigualdades desde $k = n_0$ hasta $k = n - 1 > n_0$ obtenemos que:

$$\log(a_{n_0}) - \log(a_n) = \sum_{k=n_0}^{n-1} \log \frac{a_k}{a_{k+1}} < \frac{1}{6}\sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}.$$

La sucesión $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ está mayorada porque:

$$1 - \frac{1}{n} = \int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

De donde se sigue que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2$. En consecuencia:

$$\log(a_n) > \log(a_{n_0}) - \frac{1}{3} \Longrightarrow a_n > \frac{a_{n_0}}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}.$$

El número $\frac{a_{n_0}}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}$ es una constante positiva independiente de n, y esta desigualdad es válida para todo $n \geqslant n_0$. Por otra parte, teniendo en cuenta que para $k \geqslant n_0$ se tiene que:

$$0 < \log \frac{a_k}{a_{k+1}} = \log(a_k) - \log(a_{k+1})$$

lo que nos dice que la sucesión $\{\log(a_{n+n_0})\}$ es decreciente y, por tanto, también es decreciente la sucesión $\{a_{n+n_0}\}$, concluimos que esta sucesión, y por tanto también $\{a_n\}$, converge a un número positivo. ♦

8.6.5. Ejercicios propuestos

390. Calcula las integrales:

$$\int_1^2 \log x \,\mathrm{d}x\,, \ \int s^2\,\mathrm{e}^{2s}\ \mathrm{d}s\,, \qquad \int \operatorname{arc\,sen} x\,\mathrm{d}x\,, \ \int_1^4 \sqrt{t}\log t\,\mathrm{d}t\,, \ \int_1^{\mathrm{e}} (\log x)^2\,\mathrm{d}x$$

$$\int x^3 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\,, \ \int \log(x^2+1)\,\mathrm{d}x\,, \ \int_0^{\pi/4} \frac{\vartheta}{\cos^2\vartheta}d\vartheta, \ \int x^2 \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x\,, \ \int_1^{\mathrm{e}} \cos^2(\log x)\,\mathrm{d}x$$

En los ejercicios de cálculo de primitivas es una buena práctica comprobar los resultados. Además es muy sencillo: basta derivar la primitiva que has obtenido.

391. Calcula las primitivas $\int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$, y $\int \mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,\mathrm{d}x$. Supuesto que $a>0$, calcula el valor de las integrales $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$ y $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\operatorname{sen}(bx)\,\mathrm{d}x$.

392. Explica la aparente contradicción

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{cotg} x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{cotg} x\operatorname{tg}' x\,\mathrm{d}x = \operatorname{cotg} x\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\operatorname{cotg}' x\,\mathrm{d}x$$
$$= 1 + \int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen}^2 x}\,\mathrm{d}x = 1 + \int \frac{1}{\operatorname{sen} x\cos x}\,\mathrm{d}x\,.$$

393. Calcula, haciendo uso de los resultados anteriores, las integrales

$$\int (\log x)^3\,\mathrm{d}x\,, \quad \int x^4\,\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x\,, \quad \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\,\mathrm{d}x\,, \quad \int \operatorname{sen}^5 x\,\mathrm{d}x$$

393. Prueba las siguientes relaciones de recurrencia

a) $I_n = \int \cos^n x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\big(\cos^{n-1} x\operatorname{sen} x + (n-1)I_{n-2}\big)$.

b) $I_n = \int \operatorname{tg}^n x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1} x - I_{n-2}$.

394. Prueba la igualdad:

$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} \tag{8.29}$$

Sugerencias: $I_n = \int \frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$. Ahora:

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{lcl} u = x & \to & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{x}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x & \to & v = \dfrac{1}{2(n-1)}\dfrac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \end{array}\right] = \cdots$$

395. Estudia la convergencia de la integral

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{(n+3)}}\,\mathrm{d}x \qquad (n \geqslant 1)$$

Prueba que para $n \geqslant 2$ es $I_n = \dfrac{n-1}{n+2} I_{n-1}$. Calcula I_1, I_2 e I_3.

8.6.6. Integración por sustitución o cambio de variable

Sean $g : J \to \mathbb{R}$ una función con derivada primera continua en un intervalo J y que toma valores en un intervalo I, y f una función continua en I. Sea F una primitiva de f en I, y pongamos $H = F \circ g$. Tenemos, por la regla de la cadena, que $H'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$, es decir, la función H es una primitiva en J de la función $h(t) = f(g(t))g'(t)$. Si c, d son puntos de J, deducimos que:

$$\int_c^d f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t = H(d) - H(c) = F(g(d)) - F(g(c)) = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Esta igualdad se conoce con el nombre de *"fórmula de integración por sustitución o cambio de variable"*. En ella se supone que queremos calcular, por ejemplo, la integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ y lo que hacemos es la sustitución $x = g(t)$, con lo que $\mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t$ y se eligen c y d por la condición de que $g(c) = a$, $g(d) = b$. Naturalmente, esto tiene interés cuando la función $f(g(t))g'(t)$ es más fácil de integrar que la función f. Simbólicamente este proceso suele representarse en la forma:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = g(t), \ \mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t \\ a = g(c), \ b = g(d) \end{bmatrix} = \int_c^d f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t \tag{8.30}$$

Para el caso de integrales indefinidas este proceso de sustitución de representa de forma menos precisa y se escribe simplemente

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = g(t) \\ \mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t$$

En este contexto, es frecuente calcular $\int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t = H(t)$, y escribir $\int f(x)\,\mathrm{d}x = H(t)$, igualdad que no tiene mucho sentido si no se especifica también la relación entre las variables t y x, escribiendo "$\int f(x)\,\mathrm{d}x = H(t)$ *donde* $x = g(t)$". Desde luego, el conocimiento de $H(t)$ y de la relación $x = g(t)$ es suficiente para calcular integrales definidas de f, pero también podemos *"deshacer el cambio"* para obtener una primitiva de f. Para eso la función g debe ser una biyección de J sobre I con derivada no nula. En tal caso, la función $F(x) = H(g^{-1}(x))$ es una primitiva de f en I. En efecto:

$$F'(x) = H'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x) = f(g(g^{-1}(x)))g'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x) =$$
$$= f(x)g'(g^{-1}(x))\frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = f(x).$$

No olvides que la fórmula del cambio de variables puede usarse en un sentido (de izquierda a derecha) o en otro (de derecha a izquierda) según convenga.

Puede ocurrir que al hacer un cambio de variable en una integral corriente obtengamos una integral impropia. No hay que preocuparse porque *para estudiar la convergencia de una integral pueden hacerse cambios de variable* biyectivos*: ello no altera la eventual convergencia de la integral ni su valor*.

8.43 Ejemplo. Con frecuencia se hacen cambios de variable para quitar radicales.

$$\int_{2/\sqrt{3}}^{2} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} x = 2\operatorname{tg} t,\ \mathrm{d}x = \dfrac{2}{\cos^2 t} \\ 2/\sqrt{3} = 2\operatorname{tg}(\pi/6),\ 2 = 2\operatorname{tg}(\pi/4) \end{array}\right] = \frac{1}{4}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{-1}{\operatorname{sen} t}\right]_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

♦

8.44 Ejemplo. Un cambio de variable en una integral impropia. Consideremos la integral:

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}x$$

Suponemos que $a < b$. El cambio que hacemos consiste en llevar el intervalo $]-1,1[$ al $]a,b[$ por una biyección del tipo $g(t) = \alpha t + \beta$. Las condiciones $g(-1) = a$, $g(1) = b$ nos dan que $\alpha = (b-a)/2$, $\beta = (b+a)/2$. Con ello:

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} x = g(t),\ \mathrm{d}x = \dfrac{b-a}{2} \\ a = g(-1),\ b = g(1) \end{array}\right] = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \pi$$

♦

8.6.7. Ejercicios propuestos

396. Calcula las siguientes integrales utilizando el cambio de variable indicado.

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x \quad x = \arccos t; \quad \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x \quad x = \operatorname{arc\,tg} t; \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + 1} \quad x = \log t$$

397. Calcula las integrales:

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^4} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\log x}}, \quad \int_1^4 \frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int \frac{\mathrm{e}^x + 3\,\mathrm{e}^{2x}}{2+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$$

398. Sea $a > 0$. Prueba que si f es impar, es decir, $f(-x) = -f(x)$, entonces $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Y si f es una función par, es decir, $f(-x) = f(x)$, entonces $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

8.6.8. Integración de funciones racionales

Dadas dos funciones polinómicas $P(x)$ y $Q(x)$, queremos calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$. Si el grado de P es mayor o igual que el de Q, podemos dividir los dos polinomios obteniendo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{G(x)}{Q(x)},$$

donde $H(x)$ y $G(x)$ son polinomios y el grado de G es menor que el grado de Q. Por tanto, *supondremos siempre que el grado de P es menor que el grado de Q. Supondremos también que el coeficiente líder del polinomio Q es* 1. La técnica para calcular la integral consiste en descomponer la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en otras más sencillas llamadas *"fracciones simples"*. Estudiaremos dos formas de hacerlo: el método de los coeficientes indeterminados y una variante del mismo conocida como Método de Hermite.

Paso 1. Descomposición del denominador en factores irreducibles

Descomponemos el denominador, $Q(x)$, como producto de factores de grado uno y de factores de grado dos irreducibles:

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m} \tag{8.31}$$

8.45 Observaciones.

- Esto se dice muy pronto, pero puede ser muy difícil de hacer si no imposible. Afortunadamente, en los casos prácticos esta descomposición o se conoce o es muy fácil de realizar.

- En la descomposición (8.31) cada a_j es una raíz real de orden α_j del polinomio Q, y los factores cuadráticos del tipo $(x^2+b_jx+c_j)^{\beta_j}$ corresponden a raíces complejas conjugadas de orden β_j. Tales factores cuadráticos son irreducibles, es decir, su discriminante es negativo o, lo que es igual, $x^2+b_jx+c_j > 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Paso 2. Descomposición en fracciones

8.6.8.1. Método de los coeficientes indeterminados

Escribimos el cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones de la siguiente forma:

- Por cada raíz real a_j de orden α_j escribimos α_j fracciones cuyos numeradores son constantes A_{k_j} que hay que determinar, y los denominadores son de la forma $(x-a_j)^{k_j}$ donde k_j toma valores de 1 hasta α_j.
- Por cada factor cuadrático irreducible $(x^2+b_jx+c_j)^{\beta_j}$ escribimos β_j fracciones cuyos numeradores son de la forma $B_{k_j}x+C_{k_j}$ siendo B_{k_j} y C_{k_j} constantes que hay que determinar, y los denominadores son de la forma $(x^2+b_jx+c_j)^{k_j}$ donde k_j toma valores de 1 hasta β_j.
- La descomposición es de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k_j=1}^{\alpha_j}\frac{A_{k_j}}{(x-a_j)^{k_j}}\right] + \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{k_j=1}^{\beta_j}\frac{B_{k_j}x+C_{k_j}}{(x^2+b_jx+c_j)^{k_j}}\right] \tag{8.32}$$

8.6.8.2. Método de Hermite

Escribimos el cociente $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x-a_1}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+b_1x+c_1}+\cdots+\frac{B_mx+C_m}{x^2+b_mx+c_m}+\\ &+\frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\frac{F(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n-1}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1-1}\cdots(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m-1}}\right)\end{aligned} \tag{8.33}$$

donde $A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_m,C_1,\dots,C_m$ son coeficientes que tenemos que determinar y, en la fracción que aparece con una derivada, $F(x)$ es un polinomio genérico de grado uno menos que el denominador. En resumen, se trata de escribir $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones simples, una por cada factor de $Q(x)$, más la derivada de un cociente que tiene por denominador $Q(x)$ con sus factores disminuidos en una unidad y como numerador un polinomio genérico con coeficientes indeterminados de grado uno menos que el denominador. Observa que *en ambos métodos hay que calcular tantos coeficientes como el grado de Q.*

Paso 3. Determinación de los coeficientes

Tanto en un caso como en otro, se reducen todas las fracciones a común denominador (que será $Q(x)$), y se iguala a $P(x)$ el numerador resultante. Esto nos producirá un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son los coeficientes A_j, B_j, C_j (y en el método de Hermite también los coeficientes de $F(x)$), cuya resolución nos dará el valor de todos ellos. Naturalmente, en el método de Hermite hay que efectuar la derivada antes de reducir a común denominador.

8.46 Observaciones.

- En ambos métodos tenemos que calcular el mismo número de coeficientes pero en el método de Hermite la obtención del sistema de ecuaciones es más trabajosa debido a la presencia de la derivada.
- A pesar de lo dicho en el punto anterior, cuando hay raíces imaginarias múltiples, lo que da lugar a factores cuadráticos de orden elevado, puede ser interesante aplicar el método de Hermite porque las fracciones simples que aparecen en dicho método son muy fáciles de integrar.

Paso 4. Integración de las fracciones simples

En el método de Hermite, una vez escrita la función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ de la forma 8.33, es fácil calcular su integral:

$$\begin{aligned}\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x &= \int\frac{A_1}{x-a_1}\,\mathrm{d}x+\cdots+\int\frac{B_1x+C_1}{x^2+b_1x+c_1}\,\mathrm{d}x+\cdots+\\ &+\frac{F(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n-1}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1-1}\cdots(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m-1}}\end{aligned}$$

Sólo nos queda calcular las integrales de las fracciones simples.

- $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A\log|x-a|.$
- $\displaystyle \boldsymbol{I} = \int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}\,\mathrm{d}x\,.$

Donde se supone que el trinomio x^2+bx+c no tiene raíces reales. En general, esta integral es igual a un logaritmo más un arcotangente aunque, dependiendo de los valores de los parámetros, puede reducirse a uno de ellos. Si $B \neq 0$, lo primero que debemos hacer es lograr que en el numerador figure la derivada del denominador. Para ello, basta poner $Bx+C = \frac{B}{2}(2x+b)+C-\frac{B}{2}b$. Con lo que, llamando $K = C-\frac{B}{2}b$, tenemos:

$$\boldsymbol{I} = \frac{B}{2}\log(x^2+bx+c) + K\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,\mathrm{d}x\,.$$

La integral que nos queda es un arcotangente. Para calcularla escribimos el trinomio x^2+bx+c en la forma $x^2+bx+c = (x-\alpha)^2+\beta^2$. Esto es muy fácil de hacer, pues la elección de α es obligada ya que debe ser $\alpha = -b/2$, de donde se sigue que $\beta = \sqrt{4c-b^2}/2$. En otros términos, $\alpha \pm i\beta$ son las raíces complejas del trinomio x^2+bx+c. Tenemos que:

$$\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\beta}\int \frac{\frac{1}{\beta}}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = $$
$$= \frac{1}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right).$$

Por tanto:

$$\mathbf{I} = \frac{B}{2}\log(x^2+bx+c) + \frac{2C-Bb}{\sqrt{4c-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right).$$

En el método de los coeficientes indeterminados aparecen también, cuando hay raíces múltiples, otros dos tipos de fracciones elementales:

- Fracciones del tipo $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ donde $k \in \mathbb{N}$ y $k \geqslant 2$, correspondientes a raíces reales múltiples, las cuales no ofrecen dificultad pues:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,\mathrm{d}x = -\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}.$$

- Fracciones del tipo $\dfrac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k}$ donde $k \in \mathbb{N}$ y $k \geqslant 2$, correspondientes a raíces imaginarias múltiples. La integración de de estas fracciones puede hacerse usando la fórmula de reducción 8.29. Previamente debe hacerse un pequeño ajuste. Escribamos el trinomio x^2+bx+c en la forma $x^2+bx+c = (x-\alpha)^2+\beta^2$.

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k}\,\mathrm{d}x = \int \frac{Bx+C}{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^k}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x-\alpha = \beta t \\ \mathrm{d}x = \beta\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\beta^{2k}}\int \frac{B\beta t + B\alpha + C}{(1+t^2)^k}\beta\,\mathrm{d}t = \frac{B\alpha+C}{\beta^{2k-1}}\int \frac{1}{(1+t^2)^k}\,\mathrm{d}t +$$
$$+ \frac{B}{2\beta^{2k-2}}\frac{1}{1-k}\frac{1}{(1+t^2)^{k-1}}.$$

Ahora ya podemos usar la fórmula de reducción 8.29 para calcular la integral $\int \frac{1}{(1+t^2)^k}\,\mathrm{d}t$.

8.47 Ejemplo. Se trata de calcular $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$. Como hay raíces imaginarias múltiples aplicaremos el método de Hermite.

$$\frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2(x^2+1)}\right)$$

Realizando la derivada y reduciendo a común denominador, obtenemos un sistema de ecuaciones cuya solución es

$$a=0, \qquad b=5/2, \qquad c=0, \qquad d=1, \qquad A=5, \qquad B=-5, \qquad C=0;$$

por lo tanto

$$\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{(5/2)x^2+1}{x^2(x^2+1)} + 5\log x - \frac{5}{2}\log(x^2+1).$$

♦

8.48 Ejemplo. Queremos calcular la integral impropia $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{x+1}{x(x-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$.

Pongamos $f(x) = \dfrac{x+1}{x(x-1)(x^2+1)}$, Observa que $f(x) > 0$ para todo $x \geqslant 2$. Además, se verifica la equivalencia asintótica:

$$f(x) \sim \frac{1}{x^3} \quad (x \to +\infty).$$

Como la integral $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$ es convergente, se sigue, por el criterio límite de comparación, que la integral $\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ también es convergente.

Para calcular la integral hallaremos una primitiva de $f(x)$ aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

$$\frac{x+1}{x(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Reduciendo a común denominador obtenemos:

$$\frac{x+1}{x(x-1)(x^2+1)} = \frac{-A+(A+B-D)x+(-A-C+D)x^2+(A+B+C)x^3}{x(x-1)(x^2+1)}.$$

Identificando coeficientes resulta el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rl} A+B+C & =0 \\ -A-C+D & =0 \\ A+B-D & =1 \\ -A & =1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} A=-1 & B=1 \\ C=0 & D=-1 \end{array}\right.$$

Deducimos que:

$$\int_2^t \frac{x+1}{x(x-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int_2^t \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \int_2^t \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_2^t \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \log\left(2\frac{t-1}{t}\right) - \operatorname{arc\,tg} t + \operatorname{arc\,tg} 2.$$

Por tanto:

$$\int_2^{+\infty} \frac{x+1}{x(x-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \log 2 - \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg} 2.$$

♦

8.49 Observación. Cuando se calculan integrales impropias convergentes de funciones racionales, hay que escribir la primitiva obtenida de forma conveniente para que el límite pueda calcularse fácilmente. Observa cómo hemos escrito la primitiva en el ejemplo anterior: hemos agrupado los logaritmos de forma apropiada para calcular el límite. No da igual escribir $\log\left(2\frac{t-1}{t}\right)$, que escribir $\log(t-1)+\log 2-\log t$. En el primer caso, el límite para $t \to +\infty$ resulta inmediato, mientras que, en el segundo caso, puedes equivocarte y creer que dicho límite no existe. Este tipo de ajustes hay que hacerlos con frecuencia.

8.6.9. Ejercicios propuestos

399. Calcular las siguientes integrales

$a)$ $\displaystyle\int \frac{2-x^2}{x^3-3x^2}\,\mathrm{d}x$, $b)$ $\displaystyle\int \frac{x^4+6x^3-7x^2-4x-3}{x^3-2x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$, $c)$ $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$

$d)$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}\,\mathrm{d}x$, $e)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$, $f)$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$

$g)$ $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^4-1)^2}\,\mathrm{d}x$, $h)$ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^4)}$, $i)$ $\displaystyle\int \frac{3x^2+30}{x^4+2x^2-8}\,\mathrm{d}x$

8.6.10. Integración por racionalización

Acabamos de ver que la primitiva de una función racional siempre puede expresarse mediante funciones elementales. Nos vamos a ocupar ahora de algunos tipos de funciones no racionales cuyas integrales se pueden transformar, por medio de un cambio de variable, en integrales de funciones racionales. Se dice entonces que la integral de partida se ha *racionalizado* y esta técnica se conoce como *"integración por racionalización"*. Conviene advertir que los cambios de variable que siguen son los que la práctica ha confirmado como más útiles en general, pero que en muchas ocasiones la forma concreta de la función que queremos integrar sugiere un cambio de variable específico que puede ser más eficaz.

En lo que sigue, representaremos por $R = R(x,y)$ una función racional de dos variables, es decir, un cociente de funciones polinómicas de dos variables. Te recuerdo que una función polinómica de dos variables es una función de la forma $P(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}c_{ij}x^i y^j$.

8.6.10.1. Integración de funciones del tipo $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$

Las integrales del tipo $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ donde $R=R(x,y)$ una función racional de dos variables, se racionalizan con el cambio de variable $t=\operatorname{tg}(x/2)$. Con lo que:

$$\operatorname{sen} x=\frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \tag{8.34}$$

Con ello resulta:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,\mathrm{d}x=\Big[t=\operatorname{tg}(x/2)\Big]=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

8.50 Ejemplo.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen} x-\operatorname{tg} x}=\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\operatorname{sen} x\cos x-\operatorname{sen} x}=\Big[\operatorname{tg} x/2=t\Big]=\cdots=\int\frac{t^2-1}{2t^3}\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{4t^2}+\frac{\log t}{2}=\frac{1}{4\operatorname{tg}^2(x/2)}+\frac{1}{2}\log|\operatorname{tg}(x/2)|.$$

♦

Casos particulares

• Cuando $R(-\operatorname{sen} x,-\cos x)=R(\operatorname{sen} x,\cos x)$ se dice que *"R es par en seno y coseno"*. En este caso es preferible el cambio $\operatorname{tg} x=t$. Con lo que

$$\operatorname{sen} x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

En el caso particular de tratarse de una integral del tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x\cos^m x\,\mathrm{d}x\,,$$

con n y m números enteros *pares*, es preferible simplificar la integral usando las identidades

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}.$$

• Cuando $R(-\operatorname{sen} x,\cos x)=-R(\operatorname{sen} x,\cos x)$ se dice que *"R es impar en seno"* y el cambio $\cos x=t$ suele ser eficaz.

• Cuando $R(\operatorname{sen} x,-\cos x)=-R(\operatorname{sen} x,\cos x)$ se dice que *"R es impar en coseno"* y el cambio $\operatorname{sen} x=t$ suele ser eficaz.

8.51 Ejemplo. Calcular $\mathbf{I}=\int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$. Tenemos:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x - \int \cos^4 x\,\mathrm{d}x = \\
&= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x - \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \\
&= \frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}-\frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{x+\operatorname{sen} 2x}{4}-\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\frac{1+\cos 4x}{2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{x+\operatorname{sen} 2x}{4}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}-\frac{x}{8}-\frac{\operatorname{sen} 4x}{32}=\frac{1}{8}\left(x-\frac{\operatorname{sen} 4x}{4}\right)
\end{aligned}
$$

♦

8.52 Ejemplo.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x}{\operatorname{sen}^2 x} = \left[\begin{array}{l} t=\operatorname{sen} x \\ \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x \end{array}\right] = \int \frac{1-t^2}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{-1}{t}-t=\frac{-1}{\operatorname{sen} t}-\operatorname{sen} t.
\end{aligned}
$$

♦

8.53 Ejemplo. Sea $\mathbf{I}=\int \frac{\operatorname{sen}^2 x\cos x}{\operatorname{sen} x+\cos x}\,\mathrm{d}x$. Se trata de una función par en seno y en coseno. Haciendo $t=\operatorname{tg} x$, obtenemos:

$$
\mathbf{I}=\int \frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t
$$

Aplicando el método de Hermite escribimos:

$$
\frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2}=\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2+1}+\frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\alpha t+\beta}{t^2+1}\right)
$$

Haciendo la derivada y reduciendo a común denominador obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&\frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2}= \\
&=\frac{A+C+\beta+(B+C-2\alpha+\beta)t+(2A+B+C-2\alpha-\beta)t^2+(B+C-\beta)t^3+(A+B)t^4}{(t+1)(t^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

Identificando coeficientes resulta el sistema de ecuaciones lineales:

$$
\left.\begin{array}{rl}
A+C+\beta & =0 \\
B+C-2\alpha+\beta & =0 \\
2A+B+C-2\alpha-\beta & =1 \\
B+C-\beta & =0 \\
A+B & =0
\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll}
A=1/4 & B=-1/4 \\
C=0 & D=-1 \\
\alpha=-1/4 & \beta=-1/4
\end{array}\right.
$$

Deducimos que:

$$\mathbf{I} = \frac{1}{4}\log|t+1| - \frac{1}{8}\log(t^2+1) - \frac{1}{4}\frac{1+t}{1+t^2} = \frac{1}{4}\log|\operatorname{sen} x + \cos x| - \frac{1}{4}\cos x(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

♦

- Cuando la función $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ sea de la forma:

$$\operatorname{sen}(ax+b)\operatorname{sen}(cx+d), \quad \operatorname{sen}(ax+b)\cos(cx+d), \quad \cos(ax+b)\cos(cx+d)$$

puede resolverse la integral usando las fórmulas:

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2}, \quad \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{2}$$

8.54 Ejemplo.

$$\int \operatorname{sen}(3x)\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(5x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{10}\cos(5x) - \frac{1}{2}\cos x$$

♦

- Integrales de la forma $\int \operatorname{tg}^n x\,\mathrm{d}x$ o $\int \operatorname{cotg}^n x\,\mathrm{d}x$. Se reducen a una con grado inferior separando $\operatorname{tg}^2 x$ o $\operatorname{cotg}^2 x$ y sustituyéndola por $\sec^2 x - 1$ o $\operatorname{cosec}^2 x - 1$.

8.55 Ejemplo.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{tg}^5 x\,\mathrm{d}x &= \int \operatorname{tg}^3 x\operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{tg}^3 x(\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{tg}^3 x\sec^2 x\,\mathrm{d}x - \int \operatorname{tg}^3 x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg}^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x\operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x(\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x\sec^2 x\,\mathrm{d}x + \int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \log|\cos x|
\end{aligned}$$

♦

8.6.10.2. Integrales del tipo $\int R\big(x, [L(x)]^r, [L(x)]^s, \dots\big)\,\mathrm{d}x$

Donde $L(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ con $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ y $r, s, \dots$ son números racionales.

Se racionalizan con el cambio $t^q = L(x)$ donde q es el mínimo común denominador de las fracciones $r, s, \dots$. Pues entonces tenemos que:

$$x = \frac{\delta t^q - \beta}{\alpha - \gamma t^q} = r(t) \tag{8.35}$$

y la integral se transforma en

$$\int R(r(t), t^{rq}, t^{sq}, \dots)r'(t)\,\mathrm{d}t$$

en la que el integrando es una función racional de t.

8.56 Ejemplo. Sea $\mathbf{I} = \int \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{1/3} \dfrac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$. El cambio de variable $\dfrac{x+1}{x-1} = t^3$ racionaliza la integral pues se tiene que $x = \dfrac{t^3+1}{t^3-1}$, con lo que:

$$\mathbf{I} = -3\int \frac{1}{t^3-1}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{t+2}{t^2+t+1} - \frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\log\left(\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}\right) + \sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$$

donde $t = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$. ♦

8.6.10.3. Integrales binomias

Se llaman así las de la forma

$$\int x^{\alpha}(a+bx^{\beta})^{\gamma}\,\mathrm{d}x$$

donde α, β, γ son números racionales y a, b números reales todos ellos distintos de cero. Haciendo la sustitución

$$x^{\beta} = t, \quad x = t^{\frac{1}{\beta}}, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{\beta}t^{\frac{1}{\beta}-1}$$

la integral se transforma en

$$\frac{1}{\beta}\int t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}(a+bt)^{\gamma}\,\mathrm{d}t$$

que es de la forma $\int t^r(a+bt)^{\gamma}\,\mathrm{d}t$ donde $r = \dfrac{\alpha+1}{\beta} - 1$. Esta integral es del tipo de las consideradas en el apartado anterior cuando el número:

- γ es entero, pues es de la forma $\int R(t, t^r)\,\mathrm{d}t$
- r es entero, pues es de la forma $\int R\big(t, (a+bt)^{\gamma}\big)\,\mathrm{d}t$
- $\gamma + r$ es entero, pues es de la forma $\int \left(\dfrac{a+bt}{t}\right)^{\gamma} t^{\gamma+r}\,\mathrm{d}t$

El matemático P.L. Chebyshev probó que si no se da ninguna de estas circunstancias la integral no puede expresarse por medio de funciones elementales.

8.57 Ejemplo. Sea $\mathbf{I} = \int x\sqrt{x^{2/3}+2}\,\mathrm{d}x$. En este caso es $\alpha = 1$, $\beta = 2/3$, $\gamma = 1/2$ y $\dfrac{\alpha+1}{\beta} = 3$. Deducimos que la primitiva buscada puede expresarse por funciones elementales. Haciendo $x^{2/3} = t$ obtenemos $\mathbf{I} = \dfrac{3}{2}\int t^2\sqrt{t+2}\,\mathrm{d}t$, la cual se racionaliza haciendo $t+2 = s^2$ $(s > 0)$, con lo que $\mathbf{I} = 3\int (s^2-2)^2 s\,\mathrm{d}s$ que es inmediata. ♦

8.6.10.4. Integrales del tipo $\int R(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$

Se racionalizan con el cambio $x = \log t$. Un caso particular de este es el de las integrales de la forma $\int R(\cosh x, \operatorname{senh} x)\,\mathrm{d}x$ que también admiten un tratamiento parecido al de las trigonométricas.

8.58 Ejemplo. Sea $\mathbf{I}=\displaystyle\int \frac{2}{\operatorname{senh} x+\operatorname{tgh} x}\,\mathrm{d}x$. Desarrolla los cálculos para comprobar que

$$\mathbf{I}=[x=\log t]=\int \frac{2(1+t^2)}{(t-1)(1+t)^3}\,\mathrm{d}t\;=\log\left(\operatorname{tgh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)-\frac{1}{1+\cosh x}$$

Por otra parte, como la función $\dfrac{2}{\operatorname{senh} x+\operatorname{tgh} x}$ es impar en $\operatorname{senh} x$, también podemos proceder como sigue

$$\mathbf{I}=[t=\cosh x]=\int \frac{2t}{(-1+t)(1+t)^2}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{1+\cosh x}+\frac{1}{2}\log(-1+\cosh x)-\frac{1}{2}\log(1+\cosh x)$$

Por supuesto, puedes comprobar que las dos primitivas encontradas son de hecho iguales. ♦

8.6.10.5. Integración de funciones del tipo $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$

Una integral de la forma $\displaystyle\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\,)\,\mathrm{d}x$ puede racionalizarse por medio de las sustituciones siguientes.

• Si el trinomio ax^2+bx+c tiene dos raíces reales α y β distintas, entonces se hace:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}\;=[a(x-\alpha)(x-\beta)]^{1/2}=(x-\alpha)\left[\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}\right]^{1/2}$$

Donde, por comodidad, hemos supuesto que $x-\alpha>0$. Deducimos que la sustitución:

$$\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}=t^2\quad(t>0),\qquad x=\frac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a}=r(t),\tag{8.36}$$

transforma la integral en $\displaystyle\int R\big(r(t),(r(t)-\alpha)t\big)r'(t)\,\mathrm{d}t$ donde el integrando es una función racional de t.

• Si el trinomio ax^2+bx+c no tiene raíces reales, entonces debe ser $ax^2+bx+c>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, en particular $c>0$. La sustitución:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}\;=tx+\sqrt{c},\qquad x=\frac{b-2t\sqrt{c}}{t^2-a}=g(t),\tag{8.37}$$

transforma la integral en $\displaystyle\int R\big(g(t),tg(t)+\sqrt{c}\big)g'(t)\,\mathrm{d}t$ donde el integrando es una función racional de t.

Las sustituciones anteriores se conocen como *sustituciones de Euler*.

8.59 Ejemplo. Calcula $\displaystyle\int \frac{x}{(7x-10-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$. Observa que, si $R(x,y)=\dfrac{x}{y^3}$, la integral que nos piden es $\int R(x,\sqrt{7x-10-x^2})\,\mathrm{d}x$ del tipo que acabamos de considerar.

Como $7x-10-x^2=(x-2)(5-x)$, tenemos que

$$\int \frac{x}{(7x-10-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\;=\left[x=\frac{5+2t^2}{1+t^2}\right]=-\frac{6}{27}\int\frac{5+2t^2}{t^2}\,\mathrm{d}t\;=-\frac{2}{9}\left(-\frac{5}{t}+2t\right)$$

donde $t=\dfrac{(7x-10-x^2)^{1/2}}{x-2}$. ♦

8.60 Ejemplo. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Haciendo la sustitución $\sqrt{1+x+x^2}=x+t$, es decir $x=\dfrac{t^2-1}{1-2t}$ tenemos:

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}x = \left[x=\frac{t^2-1}{1-2t}\right] = \int \frac{2}{t^2-2t}\,\mathrm{d}t = \int\left(\frac{-1}{t}+\frac{1}{t-2}\right)\mathrm{d}t =$$
$$= -\log t + \log|t-2|.$$

Donde $t=\sqrt{1+x+x^2}-x$. ♦

También es posible transformar una integral del tipo $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$ en otra de la forma $\int F(\operatorname{sen}x,\cos x)\,\mathrm{d}x$ donde F es una función racional de dos variables las cuales ya hemos estudiado. Para ello se sigue el siguiente procedimiento.

• Con un primer cambio de variable, de la forma $x=\alpha t+\beta$ que después explicaremos, se transforma la integral $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$ en otra de alguna de las formas:

$$\textbf{a)}\ \int G(t,\sqrt{t^2-1})\,\mathrm{d}t\,,\quad \textbf{b)}\ \int G(t,\sqrt{1-t^2})\,\mathrm{d}t\,,\quad \textbf{c)}\ \int G(t,\sqrt{1+t^2})\,\mathrm{d}t$$

donde G es una función racional de dos variables. Los cambios de variable respectivos

$$\textbf{a)}\ x=\sec u,\quad \textbf{b)}\ x=\operatorname{sen}u,\quad \textbf{c)}\ x=\operatorname{tg}u$$

convierten las integrales anteriores en otras de la forma $\int F(\operatorname{sen}x,\cos x)\,\mathrm{d}x$ donde F es una función racional de dos variables.

Alternativamente, en el caso **a)** puede hacerse también $x=\cosh u$, y en el caso **c)** $x=\operatorname{senh}u$, lo que transforma dichas integrales en otras del tipo $\int T(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$ donde T es una función racional de una variable, que ya han sido estudiadas.

Nos queda por explicar cómo se hace el primer cambio de variable.

• Si el trinomio $h(x)=ax^2+bx+c$ tiene dos raíces reales $\alpha<\beta$, lo que se hace es transformar dicho trinomio en otro que tenga como raíces -1 y 1. Para ello llevamos -1 a α y 1 a β mediante una función de la forma $\varphi(t)=\lambda t+\mu$. Las condiciones $\varphi(-1)=\alpha$, $\varphi(1)=\beta$, determinan que $\lambda=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$, $\mu=\dfrac{\beta+\alpha}{2}$. Con el cambio

$$x=\varphi(t)=\frac{\beta-\alpha}{2}t+\frac{\beta+\alpha}{2}$$

tenemos que $h(\varphi(t))=a\dfrac{(\beta-\alpha)^2}{4}(t^2-1)$. Ahora, si $a>0$, deducimos que:

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x = [x=\varphi(t)] = \int R\left(\varphi(t),\sqrt{a}\frac{(\beta-\alpha)}{2}\sqrt{t^2-1}\right)\frac{\beta-\alpha}{2}\,\mathrm{d}t$$

que es del tipo **a)** anterior. Si $a<0$, entonces:

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x = [x=\varphi(t)] = \int R\left(\varphi(t),\sqrt{-a}\frac{(\beta-\alpha)}{2}\sqrt{1-t^2}\right)\frac{\beta-\alpha}{2}\,\mathrm{d}t$$

que es del tipo **b)** anterior.

• Si el trinomio $ax^2 + bx + c$ no tiene raíces reales, entonces debe ser $d = 4ac - b^2 > 0$ y también $a > 0$. Poniendo $\gamma = \dfrac{\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}$, podemos escribir:

$$ax^2 + bx + c = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \gamma^2 =$$
$$= \gamma^2\left[\left(\frac{\sqrt{a}}{\gamma}x + \frac{b}{2\sqrt{a}\gamma}\right)^2 + 1\right] = \gamma^2\left[\left(\frac{2a}{\sqrt{d}}x + \frac{b}{\sqrt{d}}\right)^2 + 1\right].$$

El cambio

$$\frac{2a}{\sqrt{d}}x + \frac{b}{\sqrt{d}} = t, \text{ esto es }, \ x = \frac{\sqrt{d}t - b}{2a} = \phi(t)$$

transforma la integral en

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\,)\,\mathrm{d}x = [x = \phi(t)] = \int R\big(\phi(t), \gamma\sqrt{t^2 + 1}\big)\frac{\sqrt{d}}{2a}\,\mathrm{d}t$$

que es del tipo **c)** anterior.

Casos particulares

• Las integrales de la forma $\displaystyle\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,\mathrm{d}x$ donde $P(x)$ es una función polinómica pueden resolverse con facilidad por el *método de reducción*. Se procede de la siguiente forma. Escribimos:

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{d}{\mathrm{d}x}\left(Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c}\right) + \frac{C}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

donde $Q(x)$ es un polinomio, cuyos coeficientes hay que calcular, de grado una unidad menos que el polinomio $P(x)$ y C es una constante que también hay que calcular. Observa que la igualdad anterior puede escribirse:

$$P(x) = Q'(x)(ax^2 + bx + c) + \frac{1}{2}Q(x)(2ax + b) + C$$

y a la derecha queda un polinomio de igual grado que $P(x)$ lo que permite identificar coeficientes. Una vez calculados el polinomio Q y la constante C tenemos que:

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,\mathrm{d}x = Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + C\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,\mathrm{d}x$$

con lo que todo se reduce a calcular una integral de la forma $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,\mathrm{d}x$. Haciendo uso de los cambios antes visto, esta integral, salvo constantes, puede escribirse de alguna de las formas:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\,\mathrm{d}t = \operatorname{arc\,sen}(t), \quad \int \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\,\mathrm{d}t = \operatorname{argsenh}(t), \quad \int \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}\,\mathrm{d}t = \operatorname{argcosh}(t)$$

• Finalmente, las integrales de la forma
$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$$
se reducen a las del tipo anterior con el cambio $x-\alpha=\dfrac{1}{t}$.

8.6.11. Ejercicios propuestos

400. Calcula las integrales:
$$\int \frac{1}{a+b\cos x}\,\mathrm{d}x\,,\qquad \int_0^{\pi} \frac{1}{\cos x+2\operatorname{sen} x+3}\,\mathrm{d}x\,,\qquad \int \frac{1-2\cos x}{5-4\cos x}\,\mathrm{d}x$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x},\qquad \int \frac{1}{\operatorname{sen} x\cos x}\,\mathrm{d}x\qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(3x+4)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(x+2)}}\,\mathrm{d}x\,,\qquad \int \frac{1}{(1+\operatorname{sen} x)\cos x}\,\mathrm{d}x\,,\qquad \int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$$

401. Calcula, suponiendo que p y q son números enteros, las integrales:
$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} px\cos qx\,\mathrm{d}x\,,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} px\operatorname{sen} qx\,\mathrm{d}x\,,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos px\cos qx\,\mathrm{d}x\,.$$

402. Para $x\in\mathbb{R}$, y $n\in\mathbb{N}$, definamos $F(x)=\dfrac{a_o}{2}+\displaystyle\sum_{\substack{k=-n\\ k\neq 0}}^{n}(a_k\cos kx+b_k\operatorname{sen} kx)$. Prueba que para $-n\leqslant p\leqslant n$ se verifica que:
$$a_p=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos px\,\mathrm{d}x\quad \text{y}\quad b_p=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\operatorname{sen} px\,\mathrm{d}x$$

403. Calcula la primitivas:
$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x\,,\qquad \int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x\,,\qquad \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x$$
$$\int \sqrt{2ax-x^2}\,\mathrm{d}x\,,\qquad \int \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x\,,\qquad \int \frac{1}{x^2\sqrt[3]{(4+x^3)^5}}\,\mathrm{d}x$$
$$\int x^{7/2}(1-x^3)^{-2}\,\mathrm{d}x\,,\qquad \int \frac{\sqrt{x^2+9x}}{x^2}\,\mathrm{d}x\,,\qquad \int \frac{1}{2\operatorname{senh} x-\cosh x}\,\mathrm{d}x$$
$$\int \sqrt[3]{x}(1+\sqrt{x})^{-2}\,\mathrm{d}x\,,\qquad \int \frac{\sqrt{5-8x-4x^2}}{x+5/2}\,\mathrm{d}x\,,\qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}}$$

8.6.12. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{197}}$ Calcula las integrales:

$$
\begin{array}{lll}
a)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,\mathrm{d}x\,, & b)\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{3+x^4}\,\mathrm{d}x & c)\ \displaystyle\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \\
d)\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+y^2} & e)\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+y)(1+yx^2)} & f)\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{(1+y)(1+yx^2)} \\
g)\ \displaystyle\int x^{\alpha}(\log x)^n\,\mathrm{d}x & h)\ \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}\,\mathrm{d}x & i)\ \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{20+8x-x^2}} \\
j)\ \displaystyle\int \cos^2(\log x)\,\mathrm{d}x & k)\ \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{20+8x+x^2}} & l)\ \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^{\rho}} \\
m)\ \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x+1}} & n)\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} & p)\ \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+x+1)}
\end{array}
$$

En *c)* se supone que $a>0$, en *e)* que $y>0$, en *f)* que $x>1$, en *g)* que $\alpha\in\mathbb{R}$ y $n\in\mathbb{N}$, en *l)* que $\rho>1$.

Solución. *a)* Esta primitiva es inmediata como puedes comprobar haciendo la sustitución $x^3=t$. Pero debes reconocerla sin necesidad de efectuar dicha sustitución.

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,sen}(x^3)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{6}.$$

☺

b) Esta primitiva es inmediata como puedes comprobar haciendo la sustitución $x^2=t$. Pero debes reconocerla sin necesidad de efectuar dicha sustitución.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{3+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^{+\infty} \frac{\frac{2x}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2}{\sqrt{3}}\Bigg|_{x=0}^{x\to+\infty} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}.$$

☺

c) Se hace con el cambio de variable $x=a\operatorname{sen} t$. Tenemos que:

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} x=a\operatorname{sen}t,\ \ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t \\ -a=a\operatorname{sen}\dfrac{-\pi}{2},\ a=a\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right] = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\operatorname{sen}^2 t}\;a\cos t\,\mathrm{d}t =$$

$$= a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,\mathrm{d}t = a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\cos t\,\mathrm{d}t = \big(-\pi/2\leqslant x\leqslant \pi/2 \Rightarrow \cos t\geqslant 0\big) =$$

$$= a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = a^2\frac{\pi}{2}.$$

8.61 Observación. Al realizar un cambio de variable es importante elegir de forma apropiada el nuevo intervalo de integración. Con frecuencia, hay varias posibilidades. Por ejemplo, en la integral anterior podríamos haber procedido como sigue:

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = a \operatorname{sen} t, & \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t \\ -a = a\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}, & a = a\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2 t}\; a\cos t\,\mathrm{d}t =$$

$$= a^2 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,\mathrm{d}t = a^2 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\cos t\,\mathrm{d}t = \big(\pi/2 \leqslant x \leqslant 3\pi/2 \Rightarrow \cos t \leqslant 0\big) =$$

$$= -a^2 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = a^2\frac{\pi}{2}.$$

Si en los cálculos anteriores te olvidas de que $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$, y pones $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$ el resultado que hubiéramos obtenido es el siguiente:

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = a^2 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = -a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = -a^2\frac{\pi}{2}.$$

Evidente disparate, porque la integral de una función positiva $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ no puede ser un número negativo.

☺

d) Pongamos $\alpha = \sqrt{1+y^2}$. Tenemos que:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+y^2} = \int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}\int_{0}^{+\infty} \frac{\frac{1}{\alpha}}{1+\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\alpha}\Big|_{x=0}^{x\to+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}.$$

e) En esta integral la variable de integración es x, por lo que tratamos a y como un parámetro (una constante que puede tomar distintos valores). Tenemos:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+y)(1+yx^2)} = \frac{1}{(1+y)\sqrt{y}} \int_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{y}}{1+(\sqrt{y}x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2(1+y)\sqrt{y}}.$$

☺

f) En esta integral la variable de integración es y, por lo que tratamos a x como un parámetro. Es la integral de una función racional en y. La descomposición en fracciones simples corresponde a dos raíces reales simples:

$$\frac{1}{(1+y)(1+yx^2)} = \frac{A}{1+y}\frac{B}{1+yx^2} = \frac{A(1+yx^2)+B(1+y)}{(1+y)(1+yx^2)}.$$

Por tanto debe verificarse la identidad:

$$1 = A(1+yx^2) + B(1+y).$$

• Haciendo $y=-1$, obtenemos $1=A(1-x^2)\Longrightarrow A=\dfrac{1}{1-x^2}$.

• Igualando términos independientes, obtenemos $A+B=1\Longrightarrow B=-\dfrac{x^2}{1-x^2}$.

Tenemos para $t>0$:

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}y}{(1+y)(1+yx^2)}=\frac{1}{1-x^2}\int_0^t\frac{\mathrm{d}y}{1+y}-\frac{x^2}{1-x^2}\int_0^t\frac{\mathrm{d}y}{1+yx^2}=$$
$$=\frac{1}{1-x^2}\log(1+t)-\frac{1}{1-x^2}\log(1+tx^2)=\frac{1}{1-x^2}\log\frac{1+t}{1+tx^2}.$$

Por tanto:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{(1+y)(1+yx^2)}=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{\mathrm{d}y}{(1+y)(1+yx^2)}=\frac{2\log x}{x^2-1}.$$

☺

g) Pongamos $I(\alpha,n)=\int x^\alpha(\log x)^n\,\mathrm{d}x$. Si $\alpha=-1$ entonces:

$$I(-1,n)=\int\frac{1}{x}(\log x)^n\,\mathrm{d}x\ =\frac{1}{n+1}(\log x)^{n+1}.$$

Supondremos que $\alpha\neq-1$. Para calcular esta primitiva lo que haremos será obtener una fórmula de recurrencia que permita calcular dicha primitiva para valores concretos de α y de n. Tenemos que:

$$I(\alpha,n)=\left[\begin{array}{l} u=(\log x)^n\to\ \mathrm{d}u=n\dfrac{(\log x)^{n-1}}{x}\,\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=x^\alpha\,\mathrm{d}x\to v=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\end{array}\right]=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\log x)^n-\frac{n}{\alpha+1}\int x^\alpha(\log x)^{n-1}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\log x)^n-\frac{n}{\alpha+1}I(\alpha,n-1).$$

Esta relación de recurrencia permite calcular $I(\alpha,n)$ en n pasos, pues $I(\alpha,0)$ es conocido. ☺

h) Para calcular la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}\,\mathrm{d}x$ usaremos la regla de Barrow. Para ello, debemos obtener una primitiva de la función $\dfrac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}$. Se trata de una función racional. Una raíz del denominador es $x=-1$. Dividiendo el denominador por $x+1$ tenemos que $x^3-3x^2+x+5=(x+1)(x^2-4x+5)$. Como el trinomio x^2-4x+5 no tiene raíces reales, la descomposición en fracciones simples es de la forma:

$$\frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-4x+5}\Longrightarrow x-1=A(x^2-4x+5)+(Bx+C)(x+1)$$

• Haciendo $x=-1$ obtenemos que $-2=10A$, luego $A=-\frac{1}{5}$.

• Igualando coeficientes en x^2 obtenemos que $A+B=0$, luego $B=\frac{1}{5}$.

• Igualando términos independientes obtenemos $-1 = 5A + C = -1 + C$, luego $C = 0$.

$$\int_0^t \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\int_0^t \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\int_0^t \frac{x}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{5}\log(1+t) + \frac{1}{5}\int_0^t \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{5}\log(1+t) + \frac{1}{10}\int_0^t \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{5}\int_0^t \frac{1}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{5}\log(1+t) + \frac{1}{10}\log(t^2-4t+5) - \frac{1}{10}\log 5 + \frac{2}{5}\int_0^t \frac{1}{(x-2)^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{5}\log\frac{\sqrt{t^2-4t+5}}{1+t} - \frac{1}{10}\log 5 + \frac{2}{5}\operatorname{arc\,tg}(t-2) - \frac{2}{5}\operatorname{arc\,tg}(-1) =$$

$$= \frac{1}{5}\log\frac{\sqrt{t^2-4t+5}}{1+t} - \frac{1}{10}\log 5 + \frac{2}{5}\operatorname{arc\,tg}(t-2) + \frac{\pi}{10}.$$

Deducimos que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{10}\log 5 + \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{10} =$$

$$= \frac{1}{10}(3\pi - \log 5).$$

Observa la forma de escribir la primitiva, introduciendo una raíz cuadrada en el logaritmo con la finalidad de poder calcular el límite fácilmente. Sabemos, de entrada, que dicho límite tiene que existir y ser finito porque se trata de una integral impropia convergente. En efecto, poniendo $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}$, se tiene que f es continua en $[0,+\infty[$. Para todo $x > 1$ se tiene que $f(x) > 0$ y se verifica la equivalencia asintótica $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ para $x \to +\infty$. Como la integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ es convergente, también lo es $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, es decir, la integral $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente. ☺

i) Pongamos $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{20+8x-x^2}}$. El trinomio $20+8x-x^2$ tiene raíces reales que son las soluciones de $x^2-8x-20=0$, las cuales son -2 y 10, por tanto:

$$x^2-8x-20 = (x-10)(x+2) \Longrightarrow 20+8x-x^2 = (10-x)(x+2).$$

Deducimos que $20+8x-x^2 > 0 \Longleftrightarrow -2 < x < 10$. Podemos optar por racionalizar la integral con la sustitución de Euler 8.36 en la que $a=-1$, $\alpha=-2$, $\beta=10$. Con ello, dicha sustitución viene dada por:

$$x = r(t) = \frac{-2t^2+10}{t^2+1} \qquad (t > 0).$$

Tenemos que:

$$r'(t) = -\frac{24t}{(1+t^2)^2}, \; r(t) = 0 \Rightarrow t = \sqrt{5}, \; r(t) = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{19}{5}}$$

Haciendo los cálculos, se obtiene:

$$I = \left[\begin{array}{l} x = r(t), \; \mathrm{d}x = r'(t)\,\mathrm{d}t \\ r(\sqrt{5}) = 0, \; r(\sqrt{19/5}) = 1/2 \end{array}\right] = -2\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{\frac{19}{5}}} \frac{t^2}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t = 2\int_{\sqrt{\frac{19}{5}}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{5}) - 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{19}{5}}$$

Otra forma de calcular esta integral, quizás más sencilla, se basa en una idea vista en el ejemplo 8.44. Hagamos un cambio de variable de la forma $x = \lambda t + \mu$ por la condición de que dicho cambio lleve el intervalo $[-2, 10]$ al $[-1, 1]$. Deberá ser $-2 = -\lambda + \mu$, $10 = \lambda + \mu$. Deducimos que el cambio buscado es $x = 6t + 4$. Tenemos que:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(10-x)(x+2)}} = \left[\begin{array}{l} x = 6t+4, \; \mathrm{d}x = 6\,\mathrm{d}t, \; (10-x)(x+2) = 36(1-t^2) \\ x = 0 \Rightarrow t = -\frac{2}{3}, \; x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = -\frac{7}{12} \end{array}\right] =$$

$$= \int_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{7}{12}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \operatorname{arc\,sen}\frac{2}{3} - \operatorname{arc\,sen}\frac{7}{12}.$$

No te quepa duda de que se trata en ambos casos del mismo resultado expresado de diferente forma.

8.62 Observación. Un error frecuente en este tipo de ejercicios consiste en cambiar el trinomio por su opuesto. Las ecuaciones $20 + 8x - x^2 = 0$ y $-20 - 8x + x^2 = 0$, son la misma ecuación, pero las funciones $\sqrt{20 + 8x - x^2}$ y $\sqrt{-20 - 8x + x^2}$ no son la misma función.

☺

j) Esta primitiva es de las que se calculan integrando por partes, procurando que la integral se repita. Tenemos que:

$$\int \cos^2(\log x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u = \cos^2(\log x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \to v = x \end{array}\right] = x\cos^2(\log x) + \int 2\cos(\log x)\operatorname{sen}(\log x)\mathrm{d}x =$$

$$= x\cos^2(\log x) + \int \operatorname{sen}(2\log x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u = \operatorname{sen}(2\log x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \to v = x \end{array}\right] =$$

$$= x\cos^2(\log x) + x\operatorname{sen}(2\log x) - 2\int \cos(2\log x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= x\cos^2(\log x) + x\operatorname{sen}(2\log x) - 4\int \cos^2(\log x)\,\mathrm{d}x + 2x.$$

Donde hemos usado la igualdad $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$. Deducimos que:

$$\int \cos^2(\log x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\big(x\cos^2(\log x) + x\operatorname{sen}(2\log x) + 2x\big)$$

☺

k) Pongamos $I = \int\limits_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{20+8x+x^2}}$. El trinomio $20+8x+x^2$ no tiene raíces reales. Tenemos que:

$$20+8x+x^2 = (x+4)^2+4 = 4\left(\left(\frac{x+4}{2}\right)^2+1\right).$$

Por tanto:

$$I = \int\limits_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{20+8x+x^2}} = \int\limits_0^{1/2} \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{x+4}{2}\right)^2+1}} = \operatorname{argsenh} \frac{x+4}{2}\bigg|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} = \operatorname{argsenh} \frac{9}{4}.$$

☺

l) Pongamos $I(\rho) = \int\limits_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\log x)^\rho}$. Como $\rho \neq -1$, la función $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^\rho} = \frac{1}{x}(\log x)^{-\rho}$, tiene como primitiva $F(x) = \frac{1}{1-\rho}(\log x)^{1-\rho}$. La función $f(x)$ es positiva y continua en $[\mathrm{e}, +\infty[$. Tenemos que

$$I(\rho) = \int\limits_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\log x)^\rho} = F(x)\Big|_{x=\mathrm{e}}^{x\to+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(\mathrm{e}) = \frac{1}{\rho-1}.$$

☺

m) Pongamos $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x+1}}$. Esta integral se racionaliza con el cambio 8.35, esto es, haciendo $2x+1=t^2$, $(t>0)$. Tenemos:

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x+1}} = \begin{bmatrix} 2x+1=t^2 \\ \mathrm{d}x\ = t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)t} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} =$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \log \frac{t-1}{t+1} = \log \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}.$$

☺

n) Pongamos $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$. Esta integral se racionaliza con el cambio $t = \operatorname{tg}(x/2)$ (8.34). Para aplicar la regla de Barrow, calcularemos primero una primitiva de $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \begin{bmatrix} t = \operatorname{tg}(x/2) \\ \mathrm{d}x\ = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

Llamemos $F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)$ a la primitiva calculada. Tenemos que:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = F(x)\Big|_{x=0}^{x=2\pi} = F(2\pi) - F(0) = 0.$$

Resultado claramente erróneo porque la integral de una función continua y positiva debe ser un número positivo. ¿Dónde está el error? Pues en que la primitiva que hemos calculado no está definida en todo el intervalo $[0, 2\pi]$ pues el valor de $F(x)$ para $x = \pi$ no está, en principio, definido. De hecho, se tiene que:

$$\lim_{\substack{x\to\pi \\ 0<x<\pi}} F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \qquad \lim_{\substack{x\to\pi \\ \pi<x<2\pi}} F(x) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Por tanto, la función F tiene una discontinuidad de salto en π, lo que implica que no es derivable en π. Es decir, la función $F(x)$ no es una primitiva de $f(x)$ en $[0, 2\pi]$. Pero $F(x)$ sí es una primitiva de $f(x)$ en $[0, \pi]$ y en $[\pi, 2\pi]$ (definiendo en cada caso F en π como el correspondiente límite lateral para que F resulte continua en cada uno de dichos intervalos). Luego:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = F(x)\Big|_{x=0}^{x\to\pi^-} + F(x)\Big|_{x\to\pi^+}^{x=2\pi} =$$
$$= \lim_{\substack{x\to\pi \\ 0<x<\pi}} F(x) - \lim_{\substack{x\to\pi \\ \pi<x<2\pi}} F(x) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

8.63 Observaciones. Al hacer un cambio de variable para calcular una integral definida hay que tener presente la correspondencia entre intervalos. La función que realiza el cambio de variable debe ser continua en su intervalo. En el ejemplo anterior, el cambio realizado es $t = \operatorname{tg}(x/2)$, pero la función $x \mapsto \operatorname{tg}(x/2)$ no está definida en todo el intervalo $[0, 2\pi]$. Cuando x recorre $[0, 2\pi]$, $x/2$ recorre $[0, \pi]$ y la tangente no está definida en $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$.

También se evitan errores siguiendo el procedimiento usual para realizar cambios de variable en integrales definidas. En el ejemplo anterior debemos calcular los valores de t que corresponden a $x = 0$ y a $x = 2\pi$ lo que nos daría los nuevos límites de integración c y d. Así obtendríamos que para $x = 0$ es $c = \operatorname{tg} 0 = 0$, y para $x = 2\pi$ es $d = \operatorname{tg}(\pi) = 0$. Ya vemos que aquí hay algo que no va bien.

Estos errores están propiciados porque la notación que usamos para las integrales indefinidas (las primitivas) no tiene en cuenta el intervalo en que trabajamos, y ese es un dato muy importante que no se debe olvidar cuando calculamos integrales definidas.

Para calcular integrales de funciones trigonométricas puede ser útil tener en cuenta que dichas funciones son periódicas. Supongamos que $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y periódica con período α, es decir, $h(x+\alpha) = h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces se verifica que la integral de h en cualquier intervalo de longitud α es la misma. Es decir, para todo $x \in \mathbb{R}$ es $\int_x^{x+\alpha} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\alpha} h(t)\,\mathrm{d}t$. La comprobación de esta igualdad es inmediata porque la función $H(x) = \int_x^{x+\alpha} h(t)\,\mathrm{d}t$ es derivable con derivada $H'(x) = h(x+\alpha) - h(x) = 0$, luego H es una función constante.

Aplicando esto en el ejemplo anterior, y teniendo en cuenta que el coseno tiene período 2π y es una función par, tenemos que:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \int_{-\pi}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} + \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = 2\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$$

Esta última integral sí puede calcularse directamente con el cambio $t = \operatorname{tg}(x/2)$. Aunque dicho cambio convierte la integral en otra integral impropia porque el intervalo $[0, \pi]$ se transforma biyectivamente, por la función $x \mapsto \operatorname{tg}(x/2)$, en el intervalo $[0, +\infty[$. Tenemos que:

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = [t = \operatorname{tg}(x/2)] = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

☺

p) Para calcular la integral $\displaystyle\int_1^t \frac{1}{x(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x$ usaremos la regla de Barrow. Para ello, debemos obtener una primitiva de la función $\dfrac{1}{x(x^2+x+1)}$. Se trata de una función racional. Como el polinomio x^2+x+1 no tiene raíces reales, la descomposición en fracciones simples es de la forma:

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Multiplicando e identificando numeradores:

$$1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)x$$

Haciendo $x=0$ obtenemos $A=1$. Igualando coeficientes de x^2 se tiene $A+B=0$, por lo que $B=-1$. Igualando coeficientes de x se tiene $A+C=0$, luego $C=-1$.

$$\begin{aligned}
&\int_1^t \frac{1}{x(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x = \int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int_1^t \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \\
&= \log t - \frac{1}{2}\int_1^t \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_1^t \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \\
&= \log t - \frac{1}{2}\log(t^2+t+1) + \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{2}\int_1^t \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}\,\mathrm{d}x = \\
&= \log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+t+1}}\right) + \frac{\log 3}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\int_1^t \frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \\
&= \log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+t+1}}\right) + \frac{\log 3}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} = \\
&= \frac{\log 3}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3} + \log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+t+1}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

Como:

$$\lim_{t\to+\infty} \log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+t+1}}\right) = 0 \qquad \lim_{t\to+\infty} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Concluimos que:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{\log 3}{2} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{\log 3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{18}\pi.$$

☺

Ejercicio resuelto $\boxed{198}$ Calcula las primitivas $\int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$, y $\int \mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,\mathrm{d}x$. Supuesto que $a<0$, calcula las integrales $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$ y $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,\mathrm{d}x$.

Solución. Pongamos $F(x)=\int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$ y $G(x)=\int \mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,\mathrm{d}x$. Integrando por partes se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= \begin{bmatrix} u=\cos(bx) \\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a}G(x) \\ G(x) &= \begin{bmatrix} u=\operatorname{sen}(bx) \\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen}(bx) - \frac{b}{a}F(x) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$F(x) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen}(bx) - \frac{b^2}{a^2}F(x) \quad \Longrightarrow$$

$$F(x) = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}\big(a\cos(bx)+b\operatorname{sen}(bx)\big)$$

$$G(x) = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}\big(-b\cos(bx)+a\operatorname{sen}(bx)\big)$$

Como $|\mathrm{e}^{ax}\cos(bx)| \leqslant \mathrm{e}^{ax}$, $|\mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen}(bx)| \leqslant \mathrm{e}^{ax}$ y, para $a<0$, la integral impropia $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$ es convergente, se sigue, por el criterio de comparación que las integrales $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$ y $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,\mathrm{d}x$ son absolutamente convergentes. Sus valores viene dados por:

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{x=0}^{x\to+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x)-F(0) = -F(0) = -\frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,\mathrm{d}x = G(x)\Big|_{x=0}^{x\to+\infty} = \lim_{x\to+\infty} G(x)-G(0) = -G(0) = \frac{b}{a^2+b^2}$$

Otra forma de calcular las primitivas F y G es usando la exponencial compleja como sigue:

$$\begin{aligned} F(x)+iG(x) &= \int \mathrm{e}^{ax}\big(\cos(bx)+i\operatorname{sen}(bx)\big)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{(a+ib)x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{a+ib}\mathrm{e}^{(a+ib)x} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}\big(\cos(bx)+i\operatorname{sen}(bx)\big) = \\ &= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}\Big(a\cos(bx)+b\operatorname{sen}(bx)+i\big(-b\cos(bx)+a\operatorname{sen}(bx)\big)\Big). \end{aligned}$$

E igualando partes real e imaginaria volvemos a obtener el mismo resultado anterior. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{199}}$ Estudia la convergencia de la integral

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{(n+3)}}\,\mathrm{d}x \qquad (n\in\mathbb{N})$$

Prueba que para $n \geqslant 2$ es $I_n = \dfrac{n-1}{n+2} I_{n-1}$. Calcula I_1, I_2 e I_3.

Solución. Pongamos $f(x) = \dfrac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{(n+3)}}$. La función f es continua y positiva en $[0,+\infty[$. Además, como f es un cociente de dos polinomios de grados $2n-1$ y $2n+6$ con coeficiente líder iguales a 1, se verifica la equivalencia asintótica $f(x) \sim \frac{1}{x^5}$ para $x \to +\infty$. Como la integral impropia $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5}\,\mathrm{d}x$ es convergente, deducimos por el criterio límite de comparación, que I_n es convergente para todo $n\in\mathbb{N}$.

Para obtener la fórmula de recurrencia del enunciado debemos hacer una integración por partes. La elección de las funciones u y v es obligada:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{(n+3)}}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u = x^{2n-2} \rightarrow\ \mathrm{d}u = (2n-2)x^{2n-3} \\ \mathrm{d}v = \frac{x}{(1+x^2)^{n+3}} \rightarrow v = -\frac{1}{n+2}\frac{1}{2}(1+x^2)^{-n-2} \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{1}{2n+4}\frac{x^{2n-2}}{(1+x^2)^{n+2}}\Bigg|_{x=0}^{x\to+\infty} + \frac{n-1}{n+2}I_{n-1} = \frac{n-1}{n+2}I_{n-1}.$$

Tenemos que:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^4}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}(1+x^2)^{-3}\Big|_{x=0}^{x\to+\infty} = \frac{1}{6}.$$

Con ello:

$$I_2 = \frac{1}{4}I_1 = \frac{1}{24}, \qquad I_3 = \frac{2}{5}I_2 = \frac{1}{60}.$$

☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{200}}$ Sea f continua en un intervalo I y sea $a\in I$. Prueba que para todo $x\in I$ se verifica la igualdad:

$$\int_a^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \left(\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t$$

Solución. Pongamos:

$$F(x) = \int_a^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = x\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x t f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$G(x) = \int_a^x \left(\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t\,.$$

Como f es continua, las funciones F y G son derivables en I y sus derivadas están dadas por:

$$F'(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + xf(x) - xf(x) = \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s = G'(x).$$

Como, además $F(a) = G(a) = 0$, concluimos que F y G coinciden en todo punto de I. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{201}$ Sea $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1, estrictamente creciente y tal que $f(0) = 0$. Sea $g = f^{-1}$ la función inversa de f y sea $a > 0$.

a) Prueba que:

$$\int_0^{f(a)} g(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^a xf'(x)\,\mathrm{d}x = af(a) - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

b) Sea $J = f(\mathbb{R}_0^+)$ el intervalo imagen de f. Prueba que la función $h : J \to \mathbb{R}$ dada para todo $t \in J$ por:

$$h(t) = at - \int_0^t g(y)\,\mathrm{d}y\,,$$

alcanza un máximo absoluto en J y deduce que para todo $b \in J$ se verifica:

$$ab \leqslant \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b g(y)\,\mathrm{d}y$$

¿Cuándo se da la igualdad?

Solución. a) Haciendo primero un cambio de variable y después integrando por partes:

$$\int_0^{f(a)} g(y)\,\mathrm{d}y = \left[\begin{array}{c} y = f(x),\ \ \mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ 0 = f(0),\ \ f(a) = f(a) \end{array}\right] = \int_0^a g(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a xf'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\begin{array}{c} u = x,\ \ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x\,,\ v = f(x) \end{array}\right] = xf(x)\Big|_{x=0}^{x=a} - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = af(a) - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

b) Tenemos que $h'(t) = a - g(t)$. La función g es estrictamente creciente en $J = f(\mathbb{R}_0^+)$. Sea $c = f(a) > 0$. Entonces $c \in J$ y $g(c) = a$. Deducimos que $h'(x) > 0$ para $0 \leqslant x < c$ y $h'(x) < 0$ para $c < x$. Por tanto h es estrictamente creciente en $[0, c]$ y estrictamente decreciente en $[c, +\infty[$, luego $h(t) < h(c)$ para todo $t \in J \setminus \{c\}$, y h alcanza en $c = f(a)$ un máximo absoluto en J. Deducimos que para todo $b \in J$ es $h(b) \leqslant h(f(a))$, es decir:

$$ab - \int_0^b g(y)\,\mathrm{d}y \leqslant af(a) - \int_0^{f(a)} g(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \Longrightarrow ab \leqslant \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b g(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

La igualdad se da si, y sólo si, $b = f(a)$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\mathbf{202}}$ Estudia para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ es convergente la integral

$$I(\alpha) = \int_0^1 x^\alpha \operatorname{arc\,tg} x \,\mathrm{d}x \,.$$

Calcula su valor para $\alpha = -3/2$.

Solución. Pongamos $f(x) = x^\alpha \operatorname{arc\,tg} x$. La función f es continua y positiva en $]0,1]$. Como $\operatorname{arc\,tg} x \sim x$ para $x \to 0$, se sigue que $f(x) \sim x^{\alpha+1}$ para $x \to 0$. Como la integral $\int_0^1 x^s \,\mathrm{d}x$ converge si, y sólo si, $s > -1$, deducimos, por el criterio límite de comparación, que la integral $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si, y sólo si, $\alpha+1 > -1$, o sea, $\alpha > -2$. Para calcular $I(-3/2)$ integramos por partes para eliminar la función $\operatorname{arc\,tg} x$ y después hacemos un cambio de variable.

$$\begin{aligned}
I(-3/2) &= \int_0^1 x^{-\frac{3}{2}} \operatorname{arc\,tg} x \,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arc\,tg} x \to \ \mathrm{d}u \ \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ \mathrm{d}v = x^{-\frac{3}{2}} \to v = -\dfrac{2}{\sqrt{x}} \end{bmatrix} = \\
&= -2\,\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt{x}}\Bigg|_{x\to 0}^{x=1} + \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x^2)} = \\
&= -\frac{\pi}{2} + \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x^2)} = \left[x = t^2, t > 0\right] = -\frac{\pi}{2} + 4\int_0^1 \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t \,.
\end{aligned}$$

Para calcular la integral $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ lo primero es calcular las raíces del denominador que, evidentemente, son todas complejas e iguales a las raíces complejas cuartas de la unidad. Como $-1 = \mathrm{e}^{i\pi}$, dichas raíces son los números:

$$x_k = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{4}} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{2}} \qquad k = 0,1,2,3.$$

Sabemos que dichas raíces vienen en pares de complejos conjugados. Luego deben ser $x_0, \overline{x_0}$ y $x_1, \overline{x_1}$, donde:

$$x_0 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_1 = x_0\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = i\,x_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Luego:

$$\begin{aligned}
&x^4 + 1 = (x - x_0)(x - \overline{x_0})(x - x_1)(x - \overline{x_1}) = |x - x_0|^2\,|x - x_1|^2 = \\
&= \big((x - 1/\sqrt{2})^2 + 1/2\big)\big((x + 1/\sqrt{2})^2 + 1/2\big) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).
\end{aligned}$$

Si no sabes calcular las raíces complejas cuartas de -1 (lo que sería bastante lamentable), puedes obtener la anterior descomposición utilizando el hecho de que corresponde a dos factores cuadráticos irreducibles y, por tanto, debe ser de la forma (los coeficientes de x^2 deben ser, claramente, iguales a 1):

$$x^4 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

Desarrollando esta igualdad e identificando coeficientes se vuelve a obtener la descomposición anterior.

La descomposición en fracciones simples es de la forma:

$$\frac{1}{1+x^4}=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1} \iff$$
$$1=(Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1) \iff$$
$$1=B+D+(A+\sqrt{2}B+C-\sqrt{2}D)x+(\sqrt{2}A+B-\sqrt{2}C+D)x^2+(A+C)x^3$$

Identificando coeficientes resulta el sistema de ecuaciones:

$$B+D=1,\ A+\sqrt{2}B+C-\sqrt{2}D=0,\ \sqrt{2}A+B-\sqrt{2}C+D=0,\ A+C=0$$

que se resuelve con mucha facilidad resultando $A=-C=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $B=C=\frac{1}{2}$. Ahora solamente queda calcular las correspondientes primitivas. Esto lo dejo para que lo completes tú. Es algo que ya debes saber hacer y que se hizo en general al estudiar la integración de funciones racionales. El resultado final es:

$$\int_0^1 x^{-\frac{3}{2}}\operatorname{arc\,tg} x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi+\log(3+2\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$$

8.7. Aplicaciones de la integral

Con una integral puedes calcular magnitudes tan diversas como áreas, volúmenes, longitudes de curvas, el trabajo realizado por una fuerza, la masa de un sólido, momentos de inercia, el campo eléctrico, el flujo de un fluido a través de una superficie y muchas más. Es notable, sin embargo, que la forma de proceder sea casi siempre la misma, y consiste en expresar el valor exacto de la magnitud que se quiere calcular como un límite de sumas de Riemann, para deducir, a partir de ellas, la integral cuyo cálculo proporciona la solución del problema. Podrás comprobar en lo que sigue que esta técnica es bastante sencilla e intuitiva. Con un poco de práctica tú mismo podrás aplicarla con éxito en situaciones distintas de las que aquí se consideran.

8.7.1. Cálculo de áreas planas

Te recuerdo que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función continua, representamos por $G(f,a,b)$ la región del plano comprendida entre la curva $y=f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=a$, $x=b$. Como sabes, el área de dicha región viene dada por

$$\lambda(G(f,a,b))=\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Es interesante interpretar la integral que proporciona el área de la siguiente forma. Observa que $|f(x)|$ es la *longitud* del segmento intersección de $G(f,a,b)$ con la recta vertical que pasa por $(x,0)$, es decir, $|f(x)|$ es la longitud de la *sección vertical* de $G(f,a,b)$ por el punto $(x,0)$, y *el área de la región $G(f,a,b)$ es igual a la integral de las longitudes de sus secciones*.

Intuitivamente: integrando longitudes obtenemos áreas. Como el área es invariante por rotaciones, este resultado es también válido si consideramos secciones por rectas paralelas a una recta cualquiera dada. Deducimos así el siguiente resultado.

8.64 Teorema (Principio de Cavalieri)**.** *El área de una región plana es igual a la integral de las longitudes de sus secciones por rectas paralelas a una recta dada.*

Veamos cómo se aplica este principio en algunos casos concretos.

8.7.1.1. Regiones de tipo I

Supongamos que f, g son funciones continuas y llamemos Ω a la región del plano comprendida entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Se dice que Ω es una región de tipo I. Es evidente que las longitudes de las secciones verticales de Ω son iguales a $|f(x) - g(x)|$ por lo que su área viene dada por

$$\lambda(\Omega) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x \tag{8.38}$$

Observa que esta integral expresa el área de Ω como límite de las sumas de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - g(t_k)| \, (x_k - x_{k-1})$$

lo que tiene una sencilla interpretación que puedes ver en la siguiente figura.

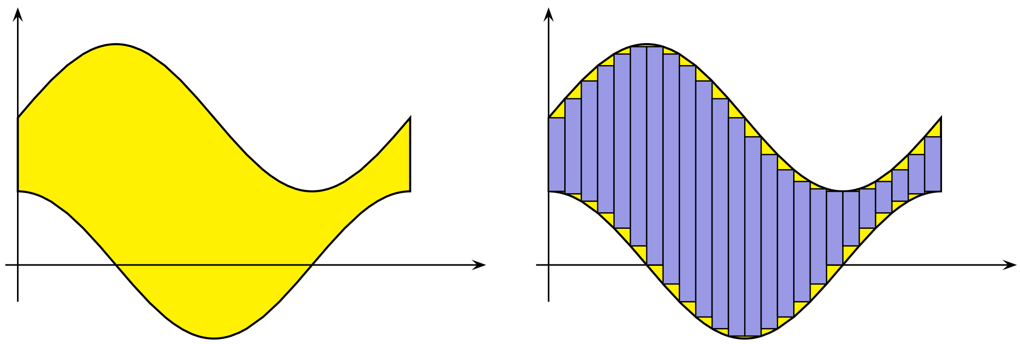


Figura 8.7. Aproximación al área de una región de tipo I

Cuando la función $f - g$ no tiene signo constante en el intervalo $[a, b]$, para calcular la integral (8.38) se descompone dicho intervalo en intervalos en los que la función $f - g$ es siempre positiva o siempre negativa, lo que permite quitar el valor absoluto en el integrando.

A veces interesa expresar una región de tipo I como unión de dos o más regiones de tipo I disjuntas y más sencillas, entonces su área es la suma de las áreas de cada una de dichas regiones.

8.65 Ejemplo. Vamos a calcular el área de la región Ω comprendida entre la parábola $y^2 = x$ y la recta $y = x - 2$.

Calculamos los puntos de corte de la recta y la parábola resolviendo la ecuación $x=(x-2)^2$, cuyas soluciones son $a = 1$, $b = 4$. Puedes ver representada la región Ω en amarillo en la siguiente figura.

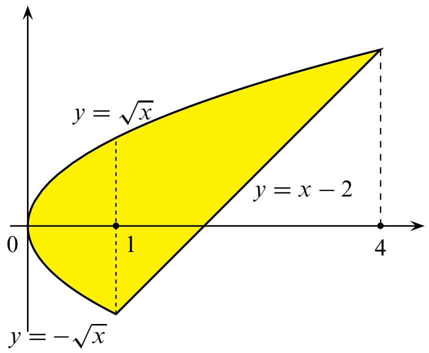


Figura 8.8. Ejemplo de región de tipo I

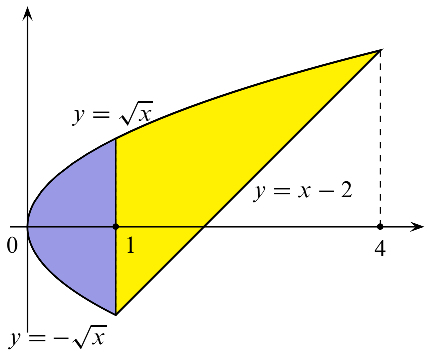
Podemos considerar Ω como una región de tipo I. La función cuya gráfica limita a Ω por arriba es $g(x) = \sqrt{x}$. La función cuya gráfica limita a Ω por abajo viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x - 2 & 1 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$$

En consecuencia

$$\lambda(\Omega) = \int_0^4 |g(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (\sqrt{x} - (\sqrt{x}))\,\mathrm{d}x + \int_1^4 (\sqrt{x} - (x-2))\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}$$

Observa que podemos ver Ω como unión de dos regiones de tipo I como se indica en la siguiente figura.



Y lo que hemos hecho antes ha sido calcular el área de cada una de estas dos regiones. ◆

8.7.1.2. Regiones de tipo II

Supongamos que f, g son funciones continuas y llamemos Ω a la región del plano comprendida entre las curvas $x = f(y)$ y $x = g(y)$ para $a \leqslant y \leqslant b$. Se dice que Ω es una región de tipo II. Es evidente que las longitudes de las secciones horizontales de Ω son iguales a $|f(y)-g(y)|$ por lo que su área viene dada por

$$\int_a^b |f(y)-g(y)|\,\mathrm{d}y \tag{8.39}$$

lo que tiene una sencilla interpretación que puedes ver en la figura 8.9.

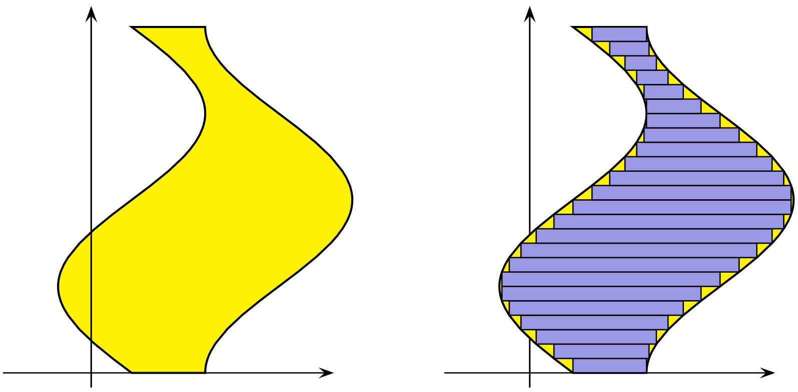


Figura 8.9. Aproximación al área de una región de tipo II

Es importante advertir que la distinción entre regiones de tipo I y de tipo II es tan sólo una cuestión de conveniencia. No son conjuntos de distinta naturaleza sino formas distintas de describir un conjunto. En la práctica te vas a encontrar con regiones que puedes considerar tanto de tipo I como de tipo II y deberás elegir la descripción que más facilite el cálculo de la correspondiente integral.

De todas formas, no debes olvidar que basta cambiar la variable x por la variable y para convertir una región de tipo II en otra de tipo I. Geométricamente, lo que hacemos es una simetría respecto a la recta $y=x$, lo que deja invariante el área. Por tanto, si en un ejercicio resulta conveniente considerar la región cuya área quieres calcular como una región de tipo II y te encuentras más cómodo trabajando con regiones de tipo I, basta con que cambies los nombres de las variables.

Salvo por factores de escala, las figuras (8.7) y (8.9) son simétricas respecto de la recta $y=x$.

8.66 Ejemplo. La región del ejemplo (8.8) puedes considerarla como una región de tipo II.

La curva que limita esta región por la derecha es la gráfica de la recta $x=y+2$ y la curva que limita esta región por la izquierda es la gráfica de la parábola $x=y^2$. La variable y está comprendida entre -1 y 2.

$$\Omega=\left\{(x,y): y^2\leqslant x\leqslant y+2,\ -1\leqslant y\leqslant 2\right\}$$

También puedes transformar directamente Ω en una región de tipo I más sencilla que la anteriormente considerada en la figura 8.8 mediante una simetría respecto de la recta $y=x$, tal

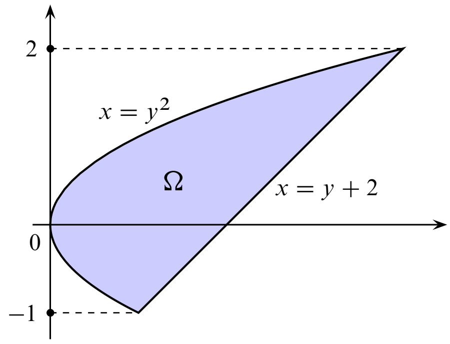


Figura 8.10. Ejemplo de región de tipo II

Tenemos que:

$$\lambda(\Omega) = \int_{-1}^{2} (y + 2 - y^2)\, dy = \frac{9}{2}$$

como se muestra en la figura 8.11. Aunque la región así obtenida, Ω_s, no es la misma Ω tiene, sin embargo, igual área que Ω.

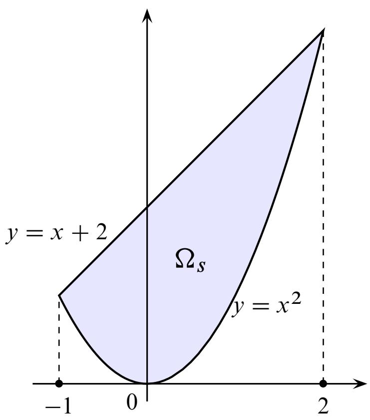


Figura 8.11. Simétrica de la figura 8.8

$$\lambda(\Omega_s) = \lambda(\Omega) = \int_{1}^{2} (x + 2 - x^2)\, dx = \frac{9}{2}.$$

♦

8.7.2. Ejercicios propuestos

404. Calcula el área de las dos partes en que la parábola $y^2 = 4x$ divide al círculo $x^2 + y^2 = 8$.

405. Calcula para qué valor de λ la curva $y = \lambda \cos x$ divide en dos partes de igual área la región limitada por la curva $y = \operatorname{sen} x$ y el eje de abscisas cuando $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$.

406. Calcula el área encerrada por el bucle de la curva $y^2 = x(x - 1)^2$.

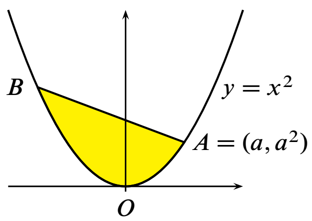
407. a) Calcula $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(xt)\, e^{-x}\, dx$.

b) Calcula el área limitada por la gráfica de f y el eje OX.

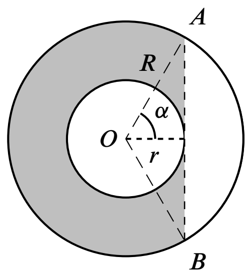
408. Calcula el área de las regiones del plano limitadas por las siguientes curvas.

1. $y = x(x-1)(x-2)$ y el eje OX.
2. $x = 12y^2 - 12y^3, \quad x = 2y^2 - 2y$.
3. $y = -x^2 - 2x, \quad y = x^2 - 4, \quad -3 \leqslant x \leqslant 1$.
4. $y = x^2, \quad x + y = 2, \quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$.
5. $x + y^2 = 3, \quad 4x + y^2 = 4$.
6. $y = \sec^2 x, \quad y = \operatorname{tg}^2 x, \quad -\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/4$.
7. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a > 0,\ b > 0$.
8. $(y-x)^2 = x - 3, \quad x = 7$.
9. $y = (\log x)^2, \quad 0 < x \leqslant \mathrm{e}$.
10. $y^2 = \dfrac{1-x}{1+x}, \quad x = -1$.
11. $y = x\,\mathrm{e}^{-x}, \quad y = x^2\,\mathrm{e}^{-x}, \quad x \geqslant 0$.

409. Calcula $a > 0$ por la condición de que el sector parabólico OAB de la figura de la derecha tenga área mínima. El punto B es la intersección de la parábola $y = x^2$ con su normal en el punto $A = (a, a^2)$.



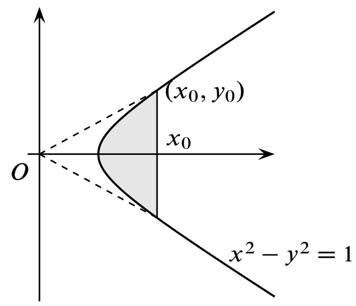
410. Con un disco de radio R queremos hacer, recortando un disco concéntrico de radio r, una arandela como la de la figura de la derecha. Se pide calcular el radio r por la condición de que el área de la parte de la arandela que queda a la izquierda de la recta $x = r$ (sombreada en gris) sea máxima. Sugerencia. Tomar α como variable.



411. Una corona circular de radio interior $\sqrt{2}$ y radio exterior $\sqrt{6}$ se corta con la parábola de ecuación $x = y^2$. Calcula el área de cada una de las dos regiones resultantes.

412. Se considera la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 1$ y un punto (x_0, y_0) de la misma $(x_0 > 1)$. Se pide calcular el área, ω_0, de la región sombreada en gris en la figura, y deducir que:

$$x_0 = \cosh(\omega_0), \quad y_0 = \operatorname{senh}(\omega_0).$$



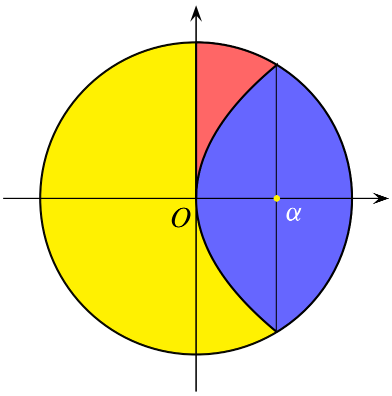
8.7.3. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{203}}$ Calcula el área de las dos partes en que la parábola $y^2 = 4x$ divide al círculo $x^2 + y^2 = 8$.

Solución.

Hay que calcular los puntos de intersección de la parábola y de la circunferencia. Para ello calculamos la raíz positiva de la ecuación $x^2 + 4x - 8 = 0$ que es $\alpha = -2 + 2\sqrt{3}$. Los puntos de intersección son, por tanto, $(\alpha, 2\sqrt{\alpha})$ y $(\alpha, -2\sqrt{\alpha})$. Teniendo en cuenta la simetría, para calcular el área de la parte azul del círculo es suficiente calcular el área de la región comprendida entre la circunferencia y la parábola cuando $x \in [0, \alpha]$, es decir, el área de la región coloreada en rojo. Se trata de una región de tipo I cuya área viene dada por:



$$\int_0^{\alpha} \left(\sqrt{8-x^2} - 2\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x = \int_0^{\alpha} \sqrt{8-x^2}\, \mathrm{d}x - \int_0^{\alpha} 2x^{1/2}\, \mathrm{d}x = \int_0^{\alpha} \sqrt{8-x^2}\, \mathrm{d}x - \frac{4}{3}\alpha^{3/2}.$$

Calculemos la integral que falta.

$$\int_0^{\alpha} \sqrt{8-x^2}\, \mathrm{d}x = \left[x = \sqrt{8}\operatorname{sen} t\right] = \sqrt{8} \int_0^{\operatorname{arc\,sen}(\frac{\alpha}{\sqrt{8}})} \cos^2 t\, \mathrm{d}t = 2\sqrt{2} \int_0^{\operatorname{arc\,sen}(\frac{\alpha}{\sqrt{8}})} \frac{1+\cos(2t)}{2}\, \mathrm{d}t =$$

$$= \sqrt{2}\operatorname{arc\,sen}\left(\alpha/\sqrt{8}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arc\,sen}(\alpha/\sqrt{8})\right).$$

Por tanto, el área, S, de la región en rojo es igual a:

$$S = \sqrt{2}\operatorname{arc\,sen}\left(\alpha/\sqrt{8}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arc\,sen}(\alpha/\sqrt{8})\right) - \frac{4}{3}\alpha^{3/2}$$

La solución obtenida puede simplificarse más usando que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x$ pero, tal como está, puede considerarse correcta.

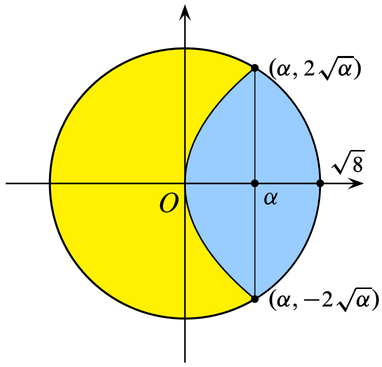
El área de la parte del círculo interior a la parábola (coloreada en azul) es igual $4\pi - 2S$, y el área de la parte del círculo exterior a la parábola (zonas amarilla y roja) es igual a $4\pi + 2S$.

Otras formas de hacer este ejercicio son las siguientes.

Teniendo en cuenta la simetría, el área de la parte azul del círculo es igual a:

$$2\int_0^{\alpha} 2\sqrt{x} + 2\int_{\alpha}^{\sqrt{8}} \sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x$$

que se calcula como antes.

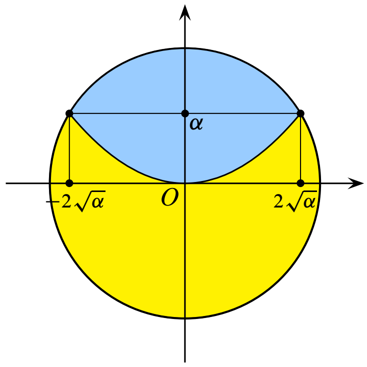


También puedes hacer este ejercicio cambiando los ejes (convirtiendo una región de tipo II en otra de tipo I) como en la siguiente figura obtenida simetrizando la anterior respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

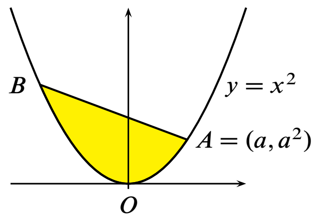
El área de la parte azul del disco es igual a:

$$\int_{-2\sqrt{\alpha}}^{2\sqrt{\alpha}} \left(\sqrt{8-x^2} - x^2/4\right)\,\mathrm{d}x$$

que se calcula igual que antes. ☺



Ejercicio resuelto $\boxed{204}$ Calcula $a>0$ por la condición de que el sector parabólico OAB de la figura de la derecha tenga área mínima. El punto B es la intersección de la parábola $y=x^2$ con su normal en el punto $A=(a,a^2)$.



Solución.

Sabemos que la normal a una curva de ecuación $y=f(x)$ en un punto $(a,f(a))$ es la recta de ecuación $y=f(a)-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$. En nuestro caso la curva es la parábola $y=x^2$ cuya normal en el punto (a,a^2) es la recta $y=a^2-\dfrac{1}{2a}(x-a)$. La intersección de dicha recta con la parábola se obtiene resolviendo la ecuación $x^2=a^2-\dfrac{1}{2a}(x-a)$, esto es, $2ax^2+x-a-2a^3=0$, cuyas soluciones son:

$$\frac{-1\pm\sqrt{1+4(a+2a^3)2a}}{4a}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8a^2+16a^4}}{4a}=\frac{-1\pm\sqrt{(1+4a^2)^2}}{4a}=$$

$$=\frac{-1\pm(1+4a^2)}{4a}=\begin{cases} a \\ -\dfrac{1+2a^2}{2a}\end{cases}$$

Pongamos $x_0 = -\dfrac{1+2a^2}{2a}$. Tenemos que $B = (x_0, x_0^2)$. El área del sector parabólico de la figura viene dada por

$$G(a) = \int_{x_0}^{a} \left(a^2 - \frac{1}{2a}(x-a) - x^2\right) \mathrm{d}x = \left[a^2x - \frac{1}{4a}(x-a)^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=x_0}^{x=a} =$$
$$\frac{4}{3}a^3 + a + \frac{1}{4a} + \frac{1}{48a^3}$$

Para calcular el mínimo de esta función se procede de la forma usual. Calculemos los ceros de la derivada.

$$G'(a) = 4a^2 + 1 - \frac{1}{4a^2} - \frac{1}{16a^4} = 0 \Longleftrightarrow 4a^2 + 1 = \frac{1}{4a^2}\left(1 + \frac{1}{4a^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{16a^4}(4a^2+1) \Longleftrightarrow 16a^4 = 1 \Longleftrightarrow a^4 = \frac{1}{16}$$

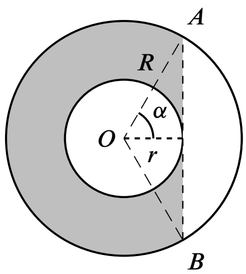
Como $a > 0$, la única solución es $a = 1/2$. Teniendo en cuenta que para todo $a > 0$:

$$G''(a) = 8a + \frac{1}{2a^3} + \frac{1}{4a^5} > 0,$$

y que $\lim\limits_{a\to 0} G'(a) = -\infty$, $\lim\limits_{a\to+\infty} G'(a) = +\infty$, deducimos que para $0 < a < \dfrac{1}{2}$ es $G'(a) < 0$, y para $\dfrac{1}{2} < a$ es $G'(a) > 0$. De aquí se sigue que G decrece en $]0, 1/2]$ y crece en $[1/2, +\infty[$, por lo que alcanza un mínimo absoluto en $a = 1/2$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{205}$

Con un disco de radio R queremos hacer, recortando un disco concéntrico de radio r, una arandela como la de la figura de la derecha. Se pide calcular el radio r por la condición de que el área de la parte de la arandela que queda a la izquierda de la recta $x = r$ (sombreada en gris) sea máxima.
Sugerencia. Tomar α como variable.



Solución.

Todo lo que hay que hacer es calcular el área de la parte sombreada de la arandela. Podemos hacer esto de forma completamente elemental introduciendo como variable la medida en radianes, θ, del ángulo indicado en la figura.

Con ello tenemos que $r = R\cos\theta$. El área buscada es igual al área del disco grande (πR^2) menos el área del disco pequeño ($\pi(R\cos\theta)^2$), menos el área del sector circular OBA (θR^2) más el área del triángulo OAB ($R\cos\theta R\operatorname{sen}\theta$). Por tanto, la función a maximizar es:

$$f(\theta) = \pi R^2 - \pi(R\cos\theta)^2 - \theta R^2 + R\cos\theta R\operatorname{sen}\theta = R^2\big(\pi - \theta - \pi\cos^2\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta\big) =$$
$$= R^2\big(\pi\operatorname{sen}^2\theta - \theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta\big),$$

definida para $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Calculamos la derivada:

$$f'(\theta) = 2R^2 \operatorname{sen}\theta(\pi\cos\theta - \operatorname{sen}\theta).$$

Se sigue que el único cero de la derivada en el intervalo donde está definida f es es $\theta_0 = \operatorname{arc\,tg}\pi \in]0, \pi/2[$. Como $\operatorname{sen}\theta \geqslant 0$, el signo de la derivada es igual al signo de $\pi\cos\theta - \operatorname{sen}\theta$. Deducimos que $f'(\theta) > 0$ para $0 < \theta < \theta_0$ y $f'(\theta) < 0$ para $\theta_0 \leqslant \theta < \pi/2$. En consecuencia, f es creciente en $[0, \theta_0]$ y decreciente en $[\theta_0, \pi/2]$. Por tanto el valor máximo absoluto de f en $[0, \pi/2]$ se alcanza en θ_0. El valor de r correspondiente es:

$$r = R\cos\theta_0 = \frac{R}{\sqrt{1+\pi^2}}.$$

Alternativamente, podemos calcular directamente, en función de r, el área del segmento circular determinado por la cuerda $\overline{AB}$, que viene dado por:

$$2\int_r^R \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

En consecuencia, el área de la parte sombreada de la arandela viene dada por:

$$g(r) = \pi R^2 - \pi r^2 - 2\int_r^R \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

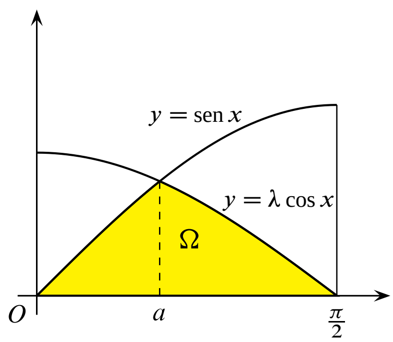
donde $0 \leqslant r \leqslant R$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo, la derivada de g viene dada por

$$g'(r) = -2\pi r + 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

Cuyo único cero es $r_0 = \dfrac{R}{\sqrt{1+\pi^2}}$. Se justifica fácilmente que dicho valor corresponde al máximo absoluto de g en $[0, R]$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{206}}$

Calcula para qué valor de λ la curva $y = \lambda\cos x$ divide en dos partes de igual área la región limitada por la curva $y = \operatorname{sen} x$ y el eje de abscisas cuando $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$.



Solución.

El área limitada por la función seno entre $x = 0$ y $x = \pi/2$, es igual $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = 1$. Por tanto, debemos calcular λ por la condición de que el área de la región Ω, en amarillo en la figura de la derecha, sea igual a $1/2$. Llamando a al único punto de corte de las gráficas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \lambda\cos x$ en el intervalo $[0, \pi/2]$, el cual viene dado por la igualdad $\lambda\cos a = \operatorname{sen} a$, dicha área es igual a:

$$\int_0^a \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x + \int_a^{\frac{\pi}{2}} \lambda \cos x \, \mathrm{d}x = 1 + \lambda - \cos a - \lambda \operatorname{sen} a.$$

Deberá verificarse que $1 + \lambda - \cos a - \lambda \operatorname{sen} a = 1/2$. Teniendo en cuenta que:

$$\lambda \cos a = \operatorname{sen} a \Rightarrow \operatorname{tg} a = \lambda \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \lambda^2 \Rightarrow \cos a = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}},$$

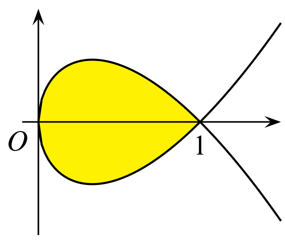
donde hemos tenido en cuenta que como $0 < a < \pi/2$, $\cos a > 0$. Sustituyendo ahora en la igualdad anterior y teniendo en cuenta que debe ser $\lambda > 0$, obtenemos:

$$1 + \lambda - \cos a - \lambda \operatorname{sen} a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + 2\lambda = 2\cos a + 2\lambda \operatorname{sen} a = 2(1+\lambda^2)\cos a \Leftrightarrow$$
$$1 + 2\lambda = 2(1+\lambda^2)\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} = 2\sqrt{1+\lambda^2} \Leftrightarrow (1+2\lambda)^2 = 4(1+\lambda^2) \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{4}.$$

☺

Ejercicio resuelto $\boxed{207}$ Calcula el área encerrada por el bucle de la curva $y^2 = x(x-1)^2$.

Solución. En problemas de cálculo de areas debemos hacer, siempre que no sea complicado, una representación gráfica para visualizar la región del plano cuya área queremos calcular, de esta forma se evitan posibles errores. La curva de ecuación $y^2 = x(x-1)^2$ es simétrica respecto al eje de abscisas, pues para cada valor de x tenemos dos valores opuestos de y, que vienen dados por $y = \sqrt{x}|x-1|$, $y = -\sqrt{x}|x-1|$. Observa que esta curva está definida para $x \geqslant 0$. Los puntos de corte de la curva con el eje OX son $x = 0$ y $x = 1$. El bucle del enunciado debe estar comprendido entre ellos dos. Para $0 \leqslant x \leqslant 1$ la parte de arriba de la curva es $y = \sqrt{x}(1-x)$. Tenemos que $y' = \dfrac{1-3x}{2\sqrt{x}}$. Deducimos que es creciente para $0 \leqslant x \leqslant 1/3$ y decreciente para $1/3 \leqslant x \leqslant 1$. Además, la derivada segunda es negativa, por lo que se trata de una curva cóncava (la parte de arriba del bucle). Con estos datos ya podemos representar la curva.



Teniendo en cuenta la simetría, el área pedida viene dada por:

$$2\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{15}$$

☺

Ejercicio resuelto $\boxed{208}$ Calcula el área de una elipse de semiejes a y b.

Solución. Por medio de un giro y de una traslación (que son movimientos del plano que conservan el área), la ecuación de la elipse puede escribirse de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longleftrightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

El área pedida viene dada por la integral:

$$\frac{b}{a}\int_{-a}^{a} 2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \;=\pi ab.$$

Donde, para evaluar la integral hemos usado la tabla de primitivas inmediatas. Para el caso en que $a=b=r$, es decir, la elipse es un círculo de radio r, obtenemos la conocida fórmula πr^2 para el área de un círculo. ☺

8.7.4. Curvas en el plano

Seguramente te imaginas una curva en el plano como una línea continua que puede dibujarse de un trazo, sin levantar el lápiz del papel. Esa idea es esencialmente correcta. Las circunferencias, las elipses, las cardioides son todas ellas curvas. Faltaría más. Ninguna de ellas puedes representarla por una igualdad de la forma $y=f(x)$. Las curvas que pueden representarse por una ecuación cartesiana del tipo $y=f(x)$ son curvas muy particulares pues son gráficas de funciones. No olvides que cuando dices "sea la curva dada por la ecuación $y=f(x)$" te estás refiriendo a la curva cuya imagen es el conjunto de puntos del plano $\{(x,y): x\in[a,b], y=f(x)\}$ es decir, a la gráfica de f.

Si lo piensas un momento, verás que muy pocas curvas son gráficas. Para que una curva sea una gráfica es necesario que cualquier recta vertical la corte a lo más en un solo punto; ninguna curva cerrada cumple esta condición. Precisamente entre las curvas cerradas se encuentran algunas de las curvas más interesantes, a ellas pertenecen los distintos tipos de óvalos y lemniscatas, las astroides, las cardioides y muchas más.

Vamos a ver ahora una forma de representar curvas planas mucho más general que las ecuaciones cartesianas del tipo $y=f(x)$ que sólo sirven para representar curvas que también son gráficas. Para empezar, consideremos una curva que viene dada por una ecuación cartesiana de la forma $y=f(x)$ donde $x\in[a,b]$. Nuestra curva es, por tanto, la imagen de la aplicación $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(x)=(x,f(x))$ para todo $x\in[a,b]$. Intuitivamente, cuando x recorre el intervalo $[a,b]$, el punto $(x,f(x))$ recorre la curva. Es fácil generalizar esta situación sin perder la idea intuitiva de curva. Lo esencial es que podamos describir las coordenadas de los puntos de la curva como funciones continuas de un parámetro. En la situación que estamos considerando se tiene que $y=f(x)$, es decir, la segunda coordenada es función continua de la primera. La generalización consiste en que ambas coordenadas sean funciones continuas de un parámetro. Llegamos así a la definición siguiente.

8.67 Definición. Una curva en el plano es una aplicación continua $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$.

Si $\gamma(t)=(x(t),y(t))$, decimos que $x=x(t)$, $y=y(t)$ son las **ecuaciones paramétricas** de la curva. El punto $\gamma(a)$ es el origen y $\gamma(b)$ el extremo de la curva. Si $\gamma(a)=\gamma(b)$ se dice que la curva es **cerrada**. Se dice que una curva γ es **simple** si no se corta a sí misma, es decir, si para $s,t\in[a,b]$ con $s\neq t$ se verifica que $\gamma(s)\neq\gamma(t)$. Una curva cerrada se llama simple si la función γ es inyectiva en $]a,b[$.

8.68 Ejemplos.

- La curva de ecuaciones paramétricas $x(t)=a+r\cos t$, $y(t)=b+R\operatorname{sen} t$ donde $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ es una elipse cuyo centro es el punto (a,b) y semiejes de longitudes r y R. Cuando $r=R$ se trata de una circunferencia.

• La curva de ecuaciones paramétricas $x(t)=r(t-\operatorname{sen} t)$, $y(t)=r(1-\cos t)$ para $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ es la **cicloide**. Es la curva que describe un punto de una circunferencia de radio r que avanza girando sin deslizar.

• La curva de ecuaciones paramétricas $x(t)=a(1+\cos t)\cos t$, $y(t)=a(1+\cos t)\operatorname{sen} t$ para $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ se llama **cardioide**. Es la curva que describe un punto fijo del borde de un círculo de radio $a/2$ que rueda sin deslizar sobre el exterior de otro círculo del mismo radio.

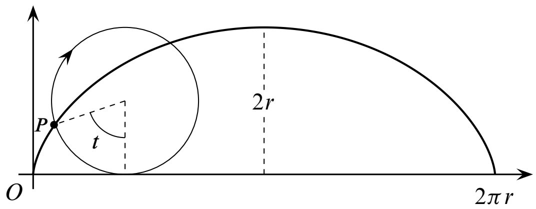


Figura 8.12. Cicloide

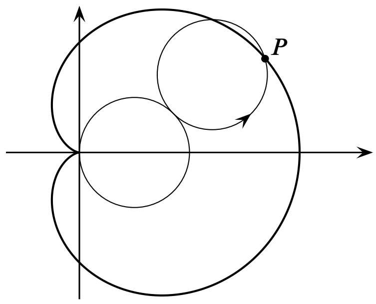


Figura 8.13. Cardioide

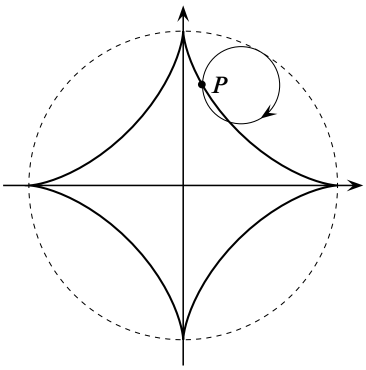


Figura 8.14. Astroide

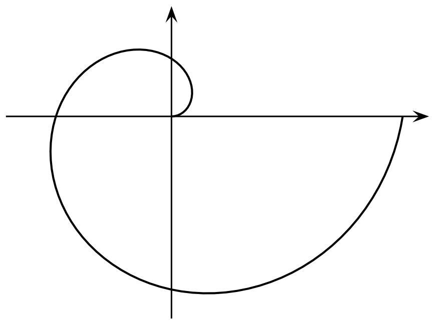


Figura 8.15. Espiral de Arquímedes

• La curva de ecuaciones paramétricas $x(t)=a\cos^3 t$, $y(t)=a\operatorname{sen}^3 t$ donde $a>0$ y $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, se llama **hipocicloide de cuatro picos** o **astroide**. Es la curva que describe un punto fijo de una circunferencia de radio $r=a/4$ que rueda sin deslizar sobre el interior de otra circunferencia de radio a.

• La curva de ecuaciones paramétricas $x(t)=t\cos t$, $y(t)=t\operatorname{sen} t$ donde $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, se llama **espiral de Arquímedes**. Es la curva que describe un punto que se mueve alejándose del origen con velocidad uniforme sobre una semirrecta que gira alrededor del origen con velocidad angular constante.

• Otro ejemplo final, para que aprecies las curvas tan complicadas que pueden representarse fácilmente por ecuaciones paramétricas. Se trata de una curva de las llamadas *curvas de Lissajoux*. Sus ecuaciones son $x(t)=\operatorname{sen}(3t)$, $y(t)=\cos(5t)$, $t\in[0,2\pi]$.

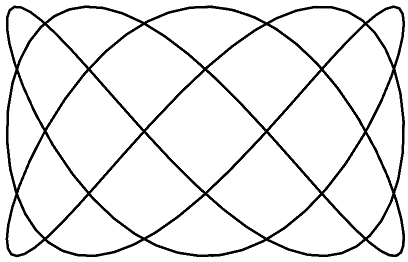


Figura 8.16. Una curva de Lissajoux

8.7.4.1. Área encerrada por una curva

Sea Ω la región rodeada por una curva cerrada simple $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, y supongamos que las funciones $x(t)$, $y(t)$ tienen primera derivada continua. Se supone también que si, a medida que el parámetro t avanza desde a hasta b, andamos sobre la curva siguiendo al punto $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ entonces la región Ω queda a nuestra izquierda (ver figura 8.17). En estas condiciones se verifica que el área de Ω viene dada por:

$$\lambda(\Omega) = \int_a^b x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b y'(t)x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_a^b \big(x(t)y'(t) - y'(t)x(t)\big)\,\mathrm{d}t \tag{8.40}$$

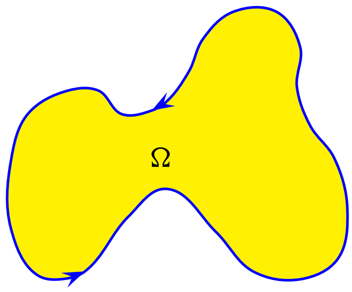


Figura 8.17. Una curva cerrada

8.7.4.2. Áreas planas en coordenadas polares

Un tipo particular de ecuaciones paramétricas son las de la forma:

$$\begin{cases} x(\vartheta) = f(\vartheta)\cos\vartheta \\ y(\vartheta) = f(\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \qquad (\alpha \leqslant \vartheta \leqslant \beta) \tag{8.41}$$

donde $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ es una función continua. Dichas ecuaciones se representan simbólicamente en la forma $\rho = f(\vartheta)$. La curva definida por estas ecuaciones se dice que está dada en forma polar y que $\rho = f(\vartheta)$ es la ecuación polar de la curva. La razón de esta terminología se explica seguidamente.

Dado un punto $(x, y) \neq (0, 0)$, hay un único par de números (ρ, ϑ), tales que $\rho > 0$ y $-\pi < \vartheta \leqslant \pi$, que verifican las igualdades $x = \rho\cos\vartheta$, $y = \rho \operatorname{sen}\vartheta$. Dichos números se llaman **coordenadas polares** del punto (x, y). Si consideras el número complejo $x + iy$, entonces ρ es su módulo y ϑ es su argumento principal.

Por tanto, dada una curva por una ecuación polar $\rho = f(\vartheta)$, el punto del plano que corresponde a cada valor del ángulo polar ϑ es:

$$\begin{cases} f(\vartheta)(\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta), & \text{si } f(\vartheta) \geqslant 0. \text{ Coordenadas polares } (f(\vartheta), \vartheta) \\ |f(\vartheta)|\big(\cos(\vartheta+\pi), \operatorname{sen}(\vartheta+\pi)\big), & \text{si } f(\vartheta) < 0. \text{ Coordenadas polares } (|f(\vartheta)|, \vartheta+\pi) \end{cases}$$

Debes tener claro que esta forma de representar una curva no es más que un tipo particular de representación paramétrica.

Consideremos una curva dada por la ecuación polar $\rho = f(\vartheta)$ donde $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Queremos calcular el área de la región del plano (ver figura 8.18):

$$\Omega = \{(\rho\cos\vartheta, \rho\cos\vartheta) : 0 < \rho \leqslant f(\vartheta),\ \alpha \leqslant \vartheta \leqslant \beta\}.$$

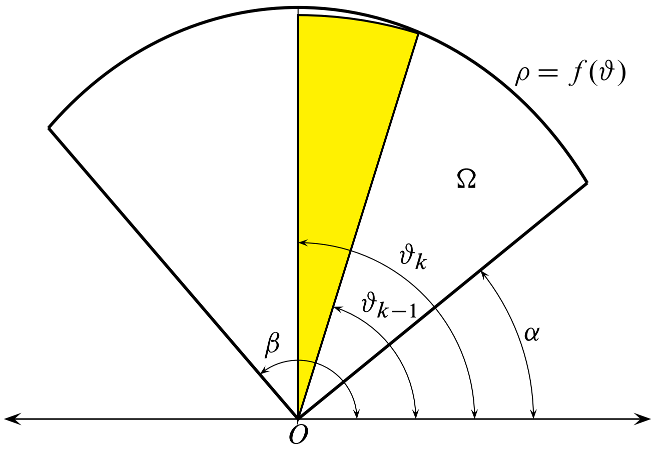


Figura 8.18. Aproximación por sectores circulares

Para ello lo que hacemos es aproximar Ω por medio de sectores circulares. Recuerda que el área de un sector circular de radio ρ y amplitud φ (medida en radianes) es igual a $\frac{1}{2}\rho^2\varphi$. Consideramos para ello una partición $\{\alpha = \vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-1}, \vartheta_n = \beta\}$ de $[\alpha, \beta]$ y formamos la suma $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} f(\vartheta_k)^2(\vartheta_k - \vartheta_{k-1})$. Como el número $\frac{1}{2} f(\vartheta_k)^2(\vartheta_k - \vartheta_{k-1})$ es el área del sector circular, representado en amarillo en la figura 8.18, de radio $f(\vartheta_k)$ y amplitud igual a $\vartheta_k - \vartheta_{k-1}$, es claro que la suma anterior representa una aproximación del área de Ω. Como $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} f(\vartheta_k)^2(\vartheta_k - \vartheta_{k-1})$ es una suma de Riemann de la función $\vartheta \mapsto \frac{1}{2} f(\vartheta)^2$, se sigue que el área de Ω viene dada por la integral:

$$\lambda(\Omega) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\vartheta)^2 \, d\vartheta \tag{8.42}$$

Con frecuencia, las ecuaciones en coordenadas polares se usan para representar distintos tipos de curvas simétricas llamadas "rosas". Por ejemplo, en la figura 8.19 se ha representado una rosa de 8 hojas o lazos, cuya ecuación en coordenadas polares es $\rho = \cos(4\vartheta)$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$.

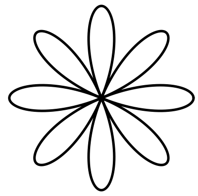


Figura 8.19. Rosa de 8 pétalos

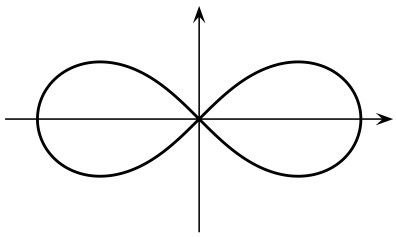
8.7.5. Ejercicios propuestos

413. Calcula el área encerrada por la elipse $x(t) = a + r\cos t$, $y(t) = b + R\operatorname{sen} t$ donde $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

413. Calcula el área encerrada por la cardioide $x(t) = \cos t(1 + \cos t)$, $y(t) = \operatorname{sen} t(1 + \cos t)$ para $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

414.

Calcula el área de la región del plano rodeada por un lazo de la lemniscata de ecuación polar $\rho^2 = \cos(2\vartheta)$, $(-\pi/4 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/4)$.



415. Calcula el área limitada por el arco de la espiral de Arquímedes $\rho = a\vartheta$, $a > 0$, comprendido entre $\vartheta = 0$ y $\vartheta = \pi$.

416. Calcula el área encerrada por el lazo interior de la curva $\rho = \dfrac{1}{2} + \cos\vartheta$.

417. Hallar el área encerrada por una de las hojas de la rosa $\rho = 2\cos(2\vartheta)$.

418. Calcular el área del lóbulo del folium de Descartes de ecuación $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$. Sugerencia. Expresa la ecuación en forma polar.

419. Calcula el área de la región común a las dos elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Sugerencia. Representa gráficamente las elipses. Usa la simetría polar para simplificar los cálculos y pasar a coordenadas polares.

8.7.6. Longitud de un arco de curva

Se trata de calcular la longitud de la curva plana γ dada por las ecuaciones paramétricas $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, donde suponemos que $x(t)$, $y(t)$ tienen derivada primera continua. Para ello aproximamos la curva por poligonales inscritas en ella. Cada partición

$\{a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = b\}$ induce una poligonal cuyos vértices son los puntos $\gamma(t_k) = (x(t_k), y(t_k))$, $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

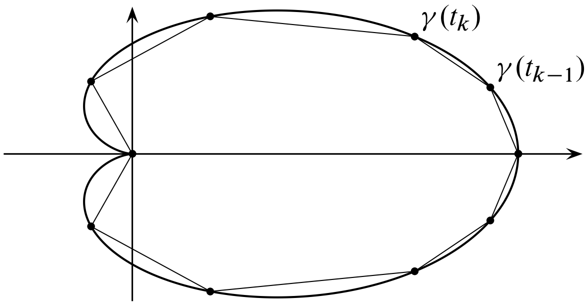


Figura 8.20. Aproximación por poligonales

La longitud de dicha poligonal viene dada por la suma:

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x'(s_k)^2 + y'(s_k)^2}\,(t_k - t_{k-1})$$

Donde hemos usado el teorema del valor medio y la continuidad de las derivadas. Pero esta suma es una suma de Riemann de la función $t \mapsto \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$. Deducimos que la longitud de la curva γ viene dada por

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t \tag{8.43}$$

Para el caso particular de que la curva sea la gráfica de una función $y = f(x)$, esto es $\gamma(x) = (x, f(x))$, entonces su longitud viene dada por

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Para el caso particular de que la curva venga dada por una parametrización polar de la forma (8.41), su longitud viene dada por

$$\ell(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{f(\vartheta)^2 + f'(\vartheta)^2}\,\mathrm{d}\vartheta$$

Si interpretamos que la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ es la *función de trayectoria* seguida por un móvil, entonces la *velocidad* de dicho móvil en cada instante t viene dada por el vector derivada $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$, y la *rapidez* es la norma euclídea de dicho vector, es decir $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$. La igualdad (8.43) tiene ahora una interpretación clara: la distancia recorrida por un móvil se obtiene integrando la rapidez. Volveremos sobre esto más adelante.

8.7.7. Ejercicios propuestos

---

420. Calcula la longitud del arco de catenaria $y = \cosh x$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

421. Calcula la longitud de un arco de la cicloide $x(t)=t-\operatorname{sen} t$, $y(t)=1-\cos t$, $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

422. Calcular la longitud del arco de curva $y = x^2 + 4$, entre $x = 0$ y $x = 3$.

423. Calcula la longitud de la astroide $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{y}{a}\right)^{2/3} = 1$, $a > 0$.

Sugerencia. Obtener las ecuaciones paramétricas de la astroide y tener en cuenta la simetría.

424. Calcula la longitud de la cardioide $\rho = 3(1 + \cos\vartheta)$, $(0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi)$.

425. Calcula la longitud de la curva $y = \dfrac{x^4 + 48}{24x}$ donde $2 \leqslant x \leqslant 4$.

426. Calcula la longitud de la curva $y = \log(1 - x^2)$, donde $1/3 \leqslant x \leqslant 2/3$.

8.7.8. Volúmenes de sólidos

Al igual que podemos calcular áreas de regiones planas integrando las longitudes de sus secciones por rectas paralelas a una dada, podemos también calcular volúmenes de regiones en $\mathbb{R}^3$ integrando las áreas de sus secciones por planos paralelos a uno dado. Este resultado es un caso particular del teorema de Fubini que veremos al estudiar integrales múltiples.

8.69 Teorema (Cálculo de volúmenes por secciones planas). *El volumen de una región en* $\mathbb{R}^3$ *es igual a la integral del área de sus secciones por planos paralelos a uno dado.*

Para justificar esta afirmación, sea Ω una región en $\mathbb{R}^3$ como la de la figura 8.21.

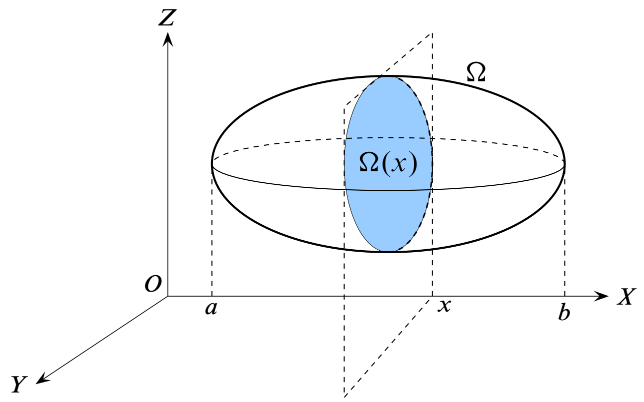


Figura 8.21. Cálculo del volumen por secciones

Representemos por $\Omega(x)$ la sección de Ω por el plano perpendicular al eje OX en el punto $(x,0,0)$. Sea $V(x)$ el volumen de la parte de Ω que queda a la izquierda de dicho plano y sea $\lambda(\Omega(x))$ el área de la sección $\Omega(x)$. Observa que la situación es totalmente análoga a la considerada en el Teorema Fundamental del Cálculo: allí teníamos la función área cuya derivada era la longitud de la sección. No debe sorprenderte por ello que ahora resulte que la derivada de la función volumen, $V(x)$, sea el área de la sección. En efecto, sea $h > 0$. Suponiendo, naturalmente, que la función $x \mapsto \lambda(\Omega(x))$ es continua, tenemos que:

$$\text{mín}\{\lambda(\Omega(t)) : x \leqslant t \leqslant x+h\}\, h \leqslant V(x+h) - V(x) \leqslant \text{máx}\{\lambda(\Omega(t)) : x \leqslant t \leqslant x+h\}\, h$$

de donde se deduce que

$$\lim_{h\to 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h} = \lambda(\Omega(x)).$$

Hemos obtenido así que $V'(x) = \lambda(\Omega(x))$. Deducimos que el volumen de Ω, que es $V(b) - V(a)$, viene dado por la integral:

$$Vol(\Omega) = \int_a^b \lambda(\Omega(x))\,\mathrm{d}x \tag{8.44}$$

El razonamiento anterior se ha hecho para secciones por planos verticales al eje OX, es decir planos paralelos al plano YZ; pero el resultado obtenido también es válido para secciones por planos paralelos a un plano dado.

Podemos llegar también a este resultado considerando sumas de Riemann. Para ello aproximamos la región Ω por cilindros de la siguiente forma. Consideremos una partición

$$\{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

de $[a,b]$. La parte de Ω comprendida entre los planos perpendiculares al eje OX por los puntos $(x_{k-1},0,0)$ y $(x_k,0,0)$ puede aproximarse por un cilindro de altura $x_k - x_{k-1}$ y base $\Omega(x_k)$ cuyo volumen es igual $\lambda(\Omega(x_k))(x_k - x_{k-1})$. La suma de los volúmenes de todos estos cilindros, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda(\Omega(x_k))(x_k - x_{k-1})$, es por tanto una aproximación del volumen de Ω. Pero dicha suma es una suma de Riemann de la función $x \mapsto \lambda(\Omega(x))$, por lo que el volumen de Ω viene dado por $\displaystyle\int_a^b \lambda(\Omega(x))\,\mathrm{d}x$.

Vamos a estudiar algunos casos en los que es fácil calcular el área de las secciones de Ω.

8.7.8.1. Volumen de un cuerpo de revolución

Los cuerpos de revolución o sólidos de revolución son regiones de $\mathbb{R}^3$ que se obtienen girando una región plana alrededor de una recta llamada eje de giro.

Método de los discos

Es fácil calcular el volumen de un cuerpo de revolución obtenido girando una región de tipo I alrededor del eje OX, o una región de tipo II alrededor del eje OY.

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Girando la región del plano comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$, alrededor del eje OX obtenemos un sólido de revolución Ω (ver figura 8.22). Es evidente que la sección, $\Omega(x)$, de Ω por el plano perpendicular al eje OX en el punto $(x,0,0)$, es un disco contenido en dicho plano de centro

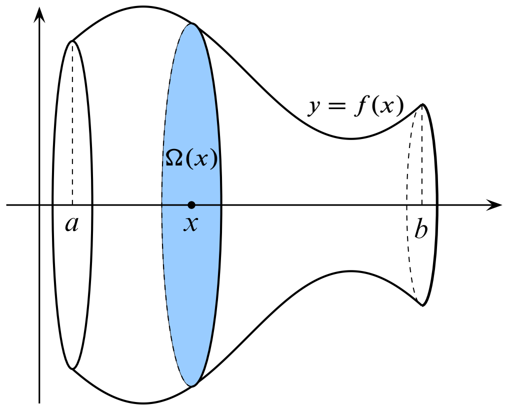


Figura 8.22. Método de los discos

$(x, 0, 0)$ y radio $|f(x)|$. Por tanto el área de $\Omega(x)$ es $\lambda(\Omega(x)) = \pi f(x)^2$; en consecuencia el volumen de Ω es igual a

$$Vol(\Omega) = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

El volumen del sólido de revolución, Ω, obtenido girando alrededor del eje OX una región de tipo I definida por dos funciones continuas $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tales que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, se obtiene integrando las áreas de las coronas circulares o arandelas, $\Omega(x)$, de radio interior $f(x)$ y radio exterior $g(x)$, obtenidas al cortar Ω por un plano perpendicular al eje OX en el punto $(x, 0, 0)$.

$$Vol(\Omega) = \pi \int_a^b (g(x)^2 - f(x)^2) \, dx$$

Consideremos ahora un sólido de revolución obtenido girando alrededor del eje OY una región R de tipo II, definida por dos funciones continuas $\varphi, \psi : [c, d] \to \mathbb{R}$ tales que $0 \leqslant \varphi(y) \leqslant \psi(y)$ para todo $y \in [c, d]$, es decir, R es la región $R = \{(x, y) : y \in [c, d], \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)\}$. El volumen del sólido de revolución resultante, Ω, viene dado por:

$$Vol(\Omega) = \pi \int_c^d (\psi(y)^2 - \varphi(y)^2) \, dy$$

Este procedimiento se conoce como *método de los discos o de las arandelas*. Dicho método puede aplicarse con facilidad para calcular el volumen de cuerpos de revolución obtenidos girando regiones de tipo I alrededor de rectas horizontales, o regiones de tipo II alrededor de rectas verticales.

8.7.9. Ejercicios propuestos

427. Calcula el volumen de la esfera obtenida girando la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$ alrededor del eje OX.

428. Calcula el volumen del cono circular recto de altura h y radio de la base R obtenido girando la recta $y = Rx/h$ entre $x = 0$ y $x = h$.

429. Calcula el volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje OX la parte de la curva $y = \operatorname{sen}^2 x$ comprendida entre 0 y π.

430. Calcula el volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje OX la gráfica de la función $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{18x}{x^2 + 9}$.

431. Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje OX la región del plano comprendida bajo la curva

$$y = \frac{2}{\sqrt{x}\,(x^2 - 2x + 2)} \qquad (1 \leqslant x < +\infty)$$

432. Calcula el volumen del sólido engendrado al girar la región limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x = 4$ alrededor de dicha recta.

433. Calcula el volumen del sólido engendrado al girar la región limitada por las parábolas $y^2 = x, x^2 = y$ alrededor del eje OX.

434. Calcula el volumen del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

435. Calcula el volumen limitado por el paraboloide $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = z$ y el plano $z = 7$.

Método de las láminas o de los tubos

Consideremos una función positiva $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y la región $G(f, a, b)$ limitada por la gráfica de dicha función y las rectas verticales $x=a$, $x=b$. Observa que $G(f, a, b)$ es una región de tipo I pero, en general, no es una región de tipo II. Girando dicha región alrededor del eje OY obtenemos un sólido de revolución, Ω, cuyo volumen podemos aproximar considerando pequeños rectángulos verticales inscritos en la gráfica de f y girándolos alrededor del eje OY (ver figura 8.23).

Cada uno de esos rectángulos engendra, al girarlo, un tubo cilíndrico de paredes delgadas. La suma de los volúmenes de dichos tubos es una aproximación del volumen de Ω. Naturalmente, la aproximación va mejorando a medida que hacemos que los tubos tengan paredes cada vez más delgadas.

Consideremos una partición $\{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ de $[a, b]$. Al girar alrededor del eje OY un rectángulo vertical cuya base es el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y altura $f(x_k)$,

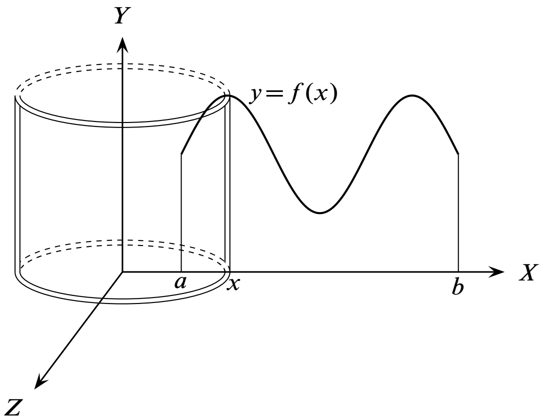


Figura 8.23. Método de las láminas o tubos

obtenemos una lámina de un cilindro circular recto, esto es, un *tubo* cuya base tiene área $\pi(x_k^2 - x_{k-1}^2)$ y altura $f(x_k)$, cuyo volumen es, por tanto, igual a:

$$\begin{aligned}\pi(x_k^2 - x_{k-1}^2)f(x_k) &= \pi(x_k - x_{k-1})(x_k + x_{k-1})f(x_k) = \\ &= x_k f(x_k)(x_k - x_{k-1}) + x_{k-1} f(x_k)(x_k - x_{k-1}).\end{aligned}$$

La suma de todos ellos es igual a:

$$\sum_{k=1}^{n} \pi x_k f(x_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} \pi x_{k-1} f(x_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Pero estas dos sumas son sumas de Riemann de la función $x \mapsto \pi x f(x)$. Deducimos que el volumen de Ω viene dado por:

$$Vol(\Omega) = 2\pi \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Esto es lo que se conoce como *método de las láminas o de las capas o de los tubos*. Puedes adaptar fácilmente esta expresión para el caso de que el eje de giro sea la recta vertical $x = c$. En general, si notamos por $R(x)$ el "radio de giro" de la lámina, entonces:

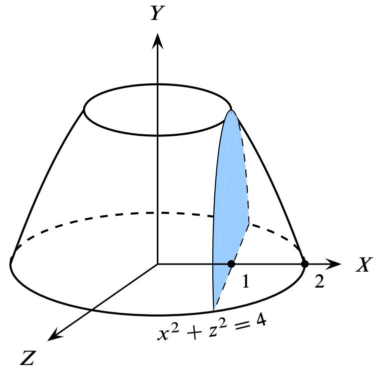
$$Vol(\Omega) = 2\pi \int_a^b R(x) f(x)\,\mathrm{d}x$$

8.7.10. Ejercicios propuestos

436. Calcula el volumen del toro engendrado al girar el círculo de centro $(a, 0)$ y radio $R < a$ alrededor del eje OY.

437.

La región plana limitada por el segmento de parábola $y = 4 - x^2$, donde $1 \leqslant x \leqslant 2$, y las rectas $x = 0$ e $y = 3$, gira alrededor del eje OY engendrando un sólido en forma de flan (un tronco de paraboloide de revolución). Calcula su volumen y el volumen de la porción obtenida al cortarlo verticalmente desde un punto del borde superior.



438. Calcular el volumen del sólido Ω engendrado al girar la región limitada por las parábolas $y = x^2$, $x = y^2$ alrededor del eje OY.

439. Calcular el volumen del toro engendrado al girar el círculo de centro 0 y radio 3 alrededor de la recta $x = 6$.

440. Calcular el volumen del sólido Ω engendrado al girar la región limitada por las parábolas $y = x^2$, $x = y^2$ alrededor la recta $x = 4$.

8.7.11. Área de una superficie de revolución

Una superficie de revolución se obtiene girando una curva dada alrededor de una recta. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función con derivada primera continua. Girando la gráfica de dicha función alrededor del eje OX obtenemos una superficie de revolución, Γ. Fíjate en la siguiente representación gráfica.

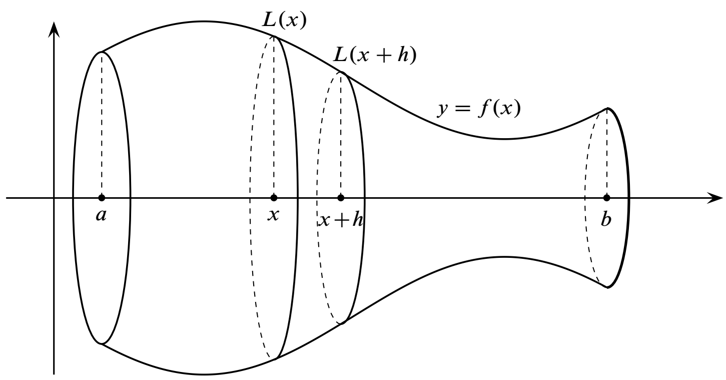


Figura 8.24. Superficie de revolución

Sea $S(x)$ el área de la parte de la superficie comprendida entre los planos $X = a$, y $X = x$. Representemos por $L(x)$ la longitud de la gráfica de f entre a y x. Recuerda que

$$L(x) = \int_a^x \sqrt{1 + f'(t)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Sea $h > 0$. Teniendo en cuenta que el área lateral de un cilindro circular recto es igual a la longitud de la base por la altura, se deduce que:

$$
\begin{aligned}
2\pi \operatorname{mín}\{f(t) : t\in[x, x+h]\}(L(x+h) - L(x)) \leqslant S(x+h) - S(x) \leqslant \\
\leqslant 2\pi \operatorname{máx}\{f(t) : t\in[x, x+h]\}\,(L(x+h) - L(x)).
\end{aligned}
$$

Por tanto:

$$
\begin{aligned}
2\pi \operatorname{mín}\{f(t) : t\in[x, x+h]\}\frac{L(x+h) - L(x)}{h} \leqslant \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \leqslant \\
\leqslant 2\pi \operatorname{máx}\{f(t) : :t\in[x, x+h]\}\,\frac{L(x+h) - L(x)}{h}.
\end{aligned}
$$

Y tomando límite para $h \to 0$ se sigue que:

$$S'(x) = 2\pi f(x)L'(x) = 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

Luego el área de la superficie Γ viene dada por:

$$\lambda(\Gamma) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x \tag{8.45}$$

8.7.12. Ejercicios propuestos

441. Calcula el área de una superficie esférica de radio R.

442. Calcula el área de la superficie de revolución obtenida al girar la curva $y = x^3$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, alrededor del eje OX.

443. Calcula el área de la superficie de revolución obtenida al girar la curva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$, alrededor del eje OX.

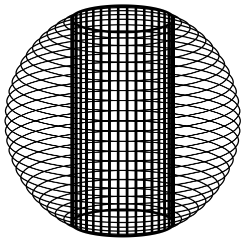
444. Calcular el área de la superficie de revolución engendrada al girar la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor del eje OY.

445. Calcular el área de la superficie de revolución engendrada al girar la catenaria $y = \cosh x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, alrededor del eje OX.

446. Al girar alrededor del eje OX el segmento de parábola $y = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant a$, engendra un tronco de paraboloide de revolución cuya superficie tiene área igual a la de una esfera de radio $\sqrt{13/12}$. Se pide calcular el valor de a.

447.

Se perfora, siguiendo un diámetro, una esfera de radio r con un agujero cilíndrico (ver figura) de modo que el anillo esférico resultante tiene altura h (la altura del cilindro). Calcula el volumen del anillo y el área de la superficie total del anillo.



448. Comprueba que el área de la superficie de revolución (llamada horno de Gabriel) engendrada al girar la curva $y = 1/x$, $1 \leqslant x \leqslant +\infty$, alrededor del eje OX es infinita (por tanto sería necesaria una cantidad infinita de pintura si quisiéramos pintarla) pero el volumen del sólido de revolución engendrado es finito(por tanto podemos llenarlo con una cantidad finita de pintura). Comenta a tu gusto esta aparente paradoja.

449. Calcula el área de un espejo parabólico de 3 metros de diámetro y 1 metro de fondo.

450. Calcula el volumen de una esfera de radio 3 en la que, siguiendo un diámetro, se ha perforado un agujero cilíndrico de radio $r < 3$. Calcula el área de la superficie total del solido obtenido. Calcula los valores de r para los que dicha área alcanza sus valores extremos.

8.7.13. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{209}}$ Calcular el área del lóbulo del folium de Descartes de ecuación cartesiana $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$.

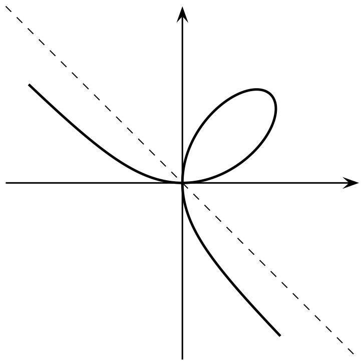
Sugerencia. Expresa la ecuación en forma polar.

Solución. Sustituyendo $x = \rho\cos\vartheta$, $y = \rho\operatorname{sen}\vartheta$ en la ecuación dada, después de simplificar por ρ^2, se obtiene:

$$\rho(\cos^3\vartheta + \operatorname{sen}^3\vartheta) - 3a\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta = 0.$$

Observamos que esta ecuación implica que en los puntos de dicha curva debe verificarse que $\cos^3\vartheta + \operatorname{sen}^3\vartheta \neq 0$. Pues si fuera $\cos^3\vartheta + \operatorname{sen}^3\vartheta = 0$, la ecuación anterior implica que también $\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta = 0$, de donde se sigue fácilmente que $\cos\vartheta = \operatorname{sen}\vartheta = 0$, lo que es imposible. En consecuencia, la ecuación polar de la curva puede escribirse en la forma:

$$\rho = \rho(\vartheta) = \frac{3a\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta}{\cos^3\vartheta + \operatorname{sen}^3\vartheta}.$$



Se verifica que $\rho(\vartheta) = -\rho(\vartheta + \pi)$. Además, $\lim\limits_{\substack{\vartheta\to -\pi/4\\ \vartheta > -\pi/4}} \rho(\vartheta) = \lim\limits_{\substack{\vartheta\to 3\pi/4\\ \vartheta < 3\pi/4}} \rho(\vartheta) = -\infty$. Por tanto, la recta $y = -x$ es una asíntota de la curva. Para $\vartheta \in]-\pi/4, 0[$ tenemos que $\rho(\vartheta) < 0$ y, por tanto, las coordenadas polares del punto correspondiente son $(|\rho(\vartheta)|, \vartheta + \pi)$; como $\vartheta + \pi \in]3\pi/4, \pi[$ estos puntos están en el segundo cuadrante. Para $\vartheta \in]0, \pi/2[$ tenemos que $\rho(\vartheta) > 0$ y los puntos correspondientes a estos valores de ϑ están en el primer cuadrante. Para $\vartheta \in]\pi/2, 3\pi/4[$ tenemos que $\rho(\vartheta) < 0$ y los puntos correspondientes a estos valores de ϑ tienen ángulo polar $\vartheta - \pi \in]-\pi/2, -\pi/4[$, por lo que están en el cuarto cuadrante. El lóbulo de la curva debe corresponder a los valores de ϑ comprendidos entre dos ceros consecutivos de ρ que solamente pueden ser $\vartheta = 0$ y $\vartheta = \pi/2$.

El área pedida está dada por la integral:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho(\vartheta)^2 \,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9a^2\cos^2\vartheta\,\mathrm{sen}^2\vartheta}{(\cos^3\vartheta + \mathrm{sen}^3\vartheta)^2}\,\mathrm{d}\vartheta\,.$$

Parece una integral bastante impresionante, pero es todo apariencia. Se trata de una función racional par en seno y en coseno. Como ya debes saber, estas integrales se racionalizan con el cambio de variable $\mathrm{tg}\,\vartheta = t$.

$$I = \left[\begin{array}{c} \mathrm{tg}\,\vartheta = t,\ \mathrm{d}\vartheta = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ \cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \mathrm{sen}\,\vartheta = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \vartheta = 0, t = 0;\ \vartheta = \frac{\pi}{2}, t = +\infty \end{array}\right] = \frac{3}{4}a^2\int_0^{+\infty} \frac{6t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^3)^2} = \frac{3}{4}a^2\,\frac{-1}{1+t^3}\Bigg|_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{3}{4}a^2.$$

☺

Ejercicio resuelto $\boxed{210}$ Calcula el área de la región común a las dos elipses

$$(E_1)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (E_2)\quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Sugerencia. Representa gráficamente las elipses. Usa la simetría polar para simplificar los cálculos y pasar a coordenadas polares.

Solución. Este ejercicio puede hacerse en coordenadas cartesianas y también pasando a coordenadas polares. Vamos a hacerlo de las dos formas.

Puedes ver las elipses en la figura 8.25. Por simetría, para calcular el área pedida es suficiente calcular el área de la parte común de las elipses que queda en el primer cuadrante. En coordenadas cartesianas dicha región, que se ha representado ampliada a la derecha de las elipses, es unión de dos regiones de tipo I, Ω_1 y Ω_2, cuyas áreas ya sabes calcular. La gráficas de las partes superiores de las elipses E_1 y E_2 vienen dadas respectivamente por:

$$y_1(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad y_2(x) = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}.$$

Los puntos de intersección de las elipses se obtienen resolviendo la ecuación

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2}$$

cuyas soluciones son $x=\pm\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Pongamos $\alpha=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Puedes comprobar que $y_1(\alpha)=y_2(\alpha)=\alpha$. Por tanto, los cuatro puntos de intersección son $(\pm\alpha,\pm\alpha)$. El área pedida es igual a:

$$4\lambda(\Omega_1)+4\lambda(\Omega_2)=4\int_0^\alpha \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\;+4\int_\alpha^b \frac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

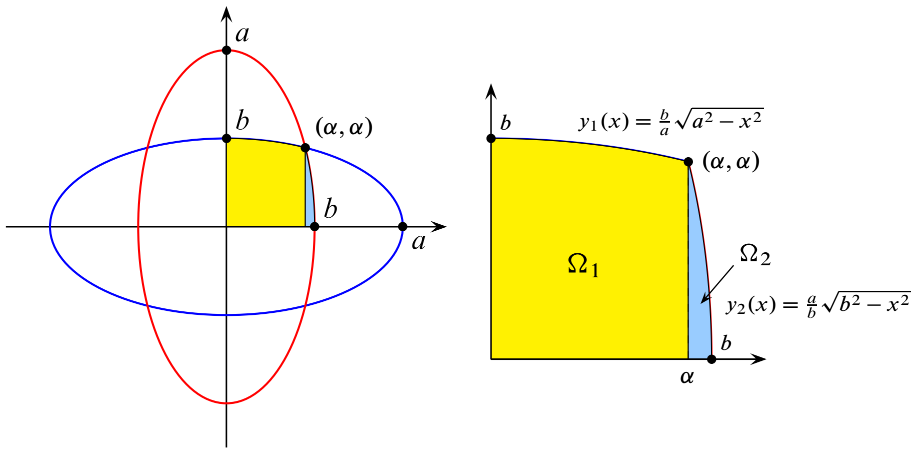


Figura 8.25. Área de una región limitada por dos elipses

Una primitiva de estas integrales se calcula fácilmente. Suponiendo que $|x|\leqslant c$, tenemos que:

$$\int\sqrt{c^2-x^2}\,\mathrm{d}x\;=\big[x=c\,\operatorname{sen}t\big]=c^2\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t\;=c^2\int\frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t=$$
$$=c^2\frac{t}{2}+c^2\frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}=c^2\frac{t}{2}+c^2\frac{\operatorname{sen}t\cos t}{2}=\frac{c^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{c}+\frac{c^2}{2}\frac{x}{c}\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}}=$$
$$=\frac{c^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{c}+\frac{x}{2}\sqrt{c^2-x^2}.$$

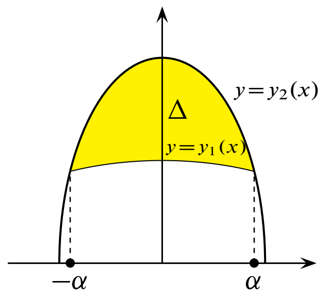
Por tanto:

$$\int y_1(x)\,\mathrm{d}x\;=\frac{ab}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}+\frac{1}{2}xy_1(x),\qquad\int y_2(x)\,\mathrm{d}x\;=\frac{ab}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{b}+\frac{1}{2}xy_2(x).$$

Teniendo en cuenta que $y_1(\alpha)=y_2(\alpha)$ y que $y_2(b)=0$, obtenemos que:

$$\begin{aligned}4\lambda(\Omega_1)+4\lambda(\Omega_2)&=2ab\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{\alpha}{a}+\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,sen}\frac{\alpha}{b}\right)=\\&=2ab\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,sen}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}-\operatorname{arc\,sen}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\\&=4ab\operatorname{arc\,sen}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{aligned}$$

Donde en la última igualdad hemos usado que para todo $x\in[-1,1]$ se verifica que $\operatorname{arc\,sen}x+\operatorname{arc\,sen}\sqrt{1-x^2}=\frac{\pi}{2}$, como fácilmente puedes comprobar.



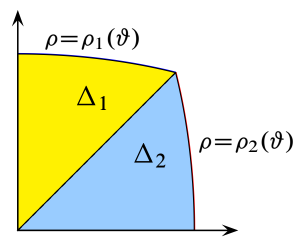
Otra forma de proceder es como sigue. Recordando (ver ejercicio resuelto 208) que el área de una elipse de semiejes a y b es igual a πab, para calcular el área pedida es suficiente calcular el área de la región Δ interior a la elipse E_2 y que queda por encima de la elipse E_1. El área pedida será igual a $2(\pi ab/2-\lambda(\Delta))=\pi ab-2\lambda(\Delta)$. Tenemos que:

$$\lambda(\Delta)=\int_{-\alpha}^{\alpha}(y_2(x)-y_1(x))\,\mathrm{d}x=ab\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-\operatorname{arc\,sen}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

El área pedida es igual a:

$$\pi ab-2\lambda(\Delta)=2ab\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,sen}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}-\operatorname{arc\,sen}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Valor que coincide con el antes obtenido.



Podemos hacer este ejercicio usando las ecuaciones polares de las elipses. Para ello, ponemos $x=\rho\cos\vartheta$, $y=\rho\operatorname{sen}\vartheta$ y sustituimos en las respectivas ecuaciones obteniendo:

$$(E_1)\ \rho_1=\rho_1(\vartheta)=\frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\vartheta+a^2\operatorname{sen}^2\vartheta}}\qquad(E_2)\ \rho_2=\rho_2(\vartheta)=\frac{ab}{\sqrt{a^2\cos^2\vartheta+b^2\operatorname{sen}^2\vartheta}}$$

Por los cálculos hechos antes, sabemos que las elipses se cortan para valores de ϑ igual a $\pm\pi/4$ y $\pm 3\pi/4$. Si no lo supiéramos deberíamos calcular dichos valores resolviendo la ecuación $\rho_1(\vartheta)=\rho_2(\vartheta)$. Podemos calcular fácilmente en coordenadas polares el área de la región común a las dos elipses que queda en el primer cuadrante. Su valor viene dado por:

$$\lambda(\Delta_1)+\lambda(\Delta_2)=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\rho_1(\vartheta)^2\,\mathrm{d}\vartheta+\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\rho_2(\vartheta)^2\,\mathrm{d}\vartheta\,.$$

Para evaluar estas integrales, calcularemos una primitiva apropiada.

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{u^2\cos^2 t + v^2\operatorname{sen}^2 t} = [\operatorname{tg} t = x] = \int \frac{\mathrm{d}x}{v^2 + u^2x^2} = \frac{1}{uv}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{v}{u}\operatorname{tg} t\right).$$

Por tanto:

$$\lambda(\Delta_1) + \lambda(\Delta_2) = \frac{ab}{2}\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} t\right)\Bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}^{t\to\frac{\pi}{2}} + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} t\right)\Bigg|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}}\right) =$$
$$= \frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b} + \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right) = ab\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$$

Donde en la última igualdad hemos usado que $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}(1/x) = \frac{\pi}{2}$ para todo $x > 0$, como fácilmente puedes comprobar. Concluimos que el área de la región común de las dos elipses es:

$$4\lambda(\Delta_1) + 4\lambda(\Delta_2) = 4ab\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}.$$

Comparando con un resultado anterior, deducimos que debe ser:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a} = \operatorname{arc\,sen}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Equivalentemente, poniendo $x = \frac{b}{a}$ que es un número positivo cualquiera, debe verificarse que:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

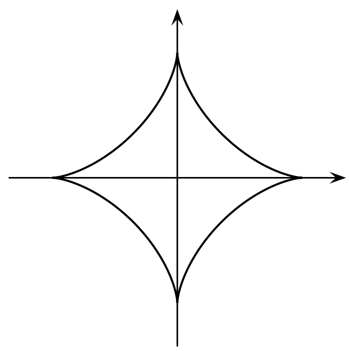
Igualdad que puedes comprobar muy fácilmente calculando la derivada de la función $h(x) = \operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ para $x \in \mathbb{R}$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{211}$ Calcula la longitud de la astroide $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} = 1$, $a > 0$.

Sugerencia. Obtener las ecuaciones paramétricas de la astroide y usar la simetría.

Solución.

Como debes saber bien, dos números u, v tales que $u^2 + v^2 = 1$, pueden escribirse en la forma $u = \cos t$, $v = \operatorname{sen} t$ para algún valor de $t \in \mathbb{R}$; y dicho valor es único si se eligen valores para t en un determinado intervalo semiabierto de longitud 2π. La ecuación cartesiana de la astroide es de la forma $u^2 + v^2 = 1$ donde $u = \sqrt[3]{\frac{x}{a}}$ y $v = \sqrt[3]{\frac{y}{a}}$. Por tanto, podemos representar los puntos (x, y) de la astroide en la forma $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a\operatorname{sen}^3 t$ donde $t \in [-\pi, \pi]$. Estas son las ecuaciones paramétricas de dicha curva. Observa que las coordenadas



de los puntos de la astroide de parámetro a se obtienen elevando al cubo las coordenadas de los puntos de una circunferencia centrada en el origen de radio $\sqrt[3]{a}$. Esto pone de manifiesto las simetrías de la astroide con respecto a los ejes coordenados y con respecto al origen. Los puntos de la astroide que están en el primer cuadrante corresponden a valores de $t \in [0, \pi/2]$. Teniendo en cuenta la simetría de la curva, la longitud de la misma viene dada por:

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 t\,\mathrm{sen}^2 t + \mathrm{sen}^4 t\cos^2 t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t\,\mathrm{sen}^2 t(\cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t)}\,\mathrm{d}t = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{sen}\,t\,\mathrm{d}t = 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}(2t)\,\mathrm{d}t = 6a.$$

☺

Ejercicio resuelto $\boxed{212}$ Calcula la longitud de la curva $y = \dfrac{x^4 + 48}{24x}$ donde $2 \leqslant x \leqslant 4$.

Solución. Lo único que hay que hacer es calcular la integral:

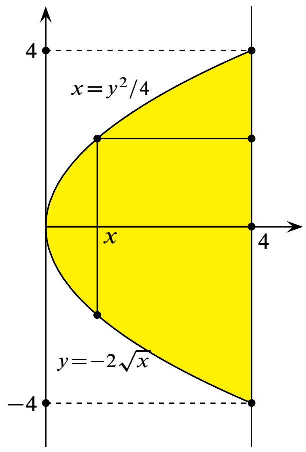
$$\int_2^4 \sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_2^4 \sqrt{1 + \left(\frac{x^4 - 16}{8x^2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_2^4 \frac{x^4 + 16}{8x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{17}{6}.$$

Ejercicio resuelto $\boxed{213}$ Calcula el volumen del sólido engendrado al girar la región limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x = 4$ alrededor de dicha recta.

Solución. Podemos emplear el método de los discos y también el de las láminas o tubos.

Por el método de los discos debemos integrar las áreas de secciones perpendiculares al eje de giro. Observa que debemos tomar como variable de integración la variable y. Los puntos de corte de la parábola con la recta son $(4, 4)$ y $(4, -4)$. Por tanto, en la región indicada, tenemos que $y \in [-4, 4]$. La sección por una recta horizontal es un disco cuyo radio en cada punto de la curva $x = y^2/4$ es la distancia de dicho punto a la recta $x = 4$, que es igual a $4 - y^2/4$. El volumen pedido viene dado por la integral:

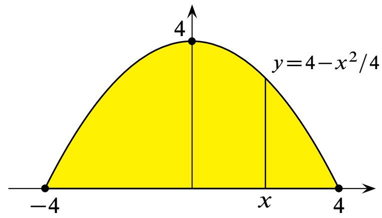
$$\pi\int_{-4}^{4} (4 - y^2/4)^2\,\mathrm{d}y = \pi\frac{1024}{15}$$



Para calcular el volumen por el método de las láminas o tubos debemos tomar como variable x. Hay que tener en cuenta que cada segmento vertical de abscisa x que gira tiene de longitud $4\sqrt{x}$ y su radio de giro respecto al eje es $4-x$. Por tanto el volumen pedido viene dado por la integral:

$$2\pi\int_0^4 (4-x)4\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \pi\,\frac{1024}{15}$$

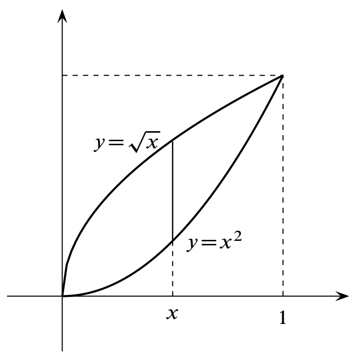
Observa que haciendo un giro y una traslación, este ejercicio equivale a calcular el volumen del cuerpo de revolución obtenido al girar la parábola $y=4-x^2/4$ alrededor del eje OX. ☺



Ejercicio resuelto $\boxed{214}$ Calcula el volumen del sólido engendrado al girar la región limitada por las parábolas $y^2=x$, $x^2=y$ alrededor del eje OX.

Solución. Observa que para que para que las dos igualdades $y^2=x$, $x^2=y$ tengan sentido debe ser $x\geqslant 0$ e $y\geqslant 0$. Por tanto, la igualdad, $y^2=x$ equivale, por ser $y\geqslant 0$, a $y=\sqrt{x}$. Es inmediato que los puntos de corte de las parábolas son $(0,0)$ y $(1,1)$. Podemos emplear el método de los discos y también el de las láminas o tubos.

Por el método de los discos (arandelas en este caso) debemos integrar las áreas de secciones perpendiculares al eje de giro. Observa que debemos tomar como variable de integración la variable x y que en la región indicada, tenemos que $x\in[0,1]$. La sección por una recta vertical de abscisa x es una corona circular o arandela cuyo radio interior es $r_1(x)=x^2$ y radio exterior $r_2(x)=\sqrt{x}$. Por tanto el volumen pedido viene dado por la integral:



$$\pi\int_0^1 (r_2(x)^2-r_1(x)^2)\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 (x-x^4)\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{10}.$$

Para calcular el volumen por el método de los tubos, debemos considerar los segmentos horizontales que giran alrededor del eje OX. Deberemos tomar como variable a y. La longitud del segmento horizontal de altura y es $\sqrt{y}-y^2$ y su radio de giro respecto del eje OX es y. Por tanto el volumen pedido viene dado por la integral:

$$2\pi\int_0^1 y(\sqrt{y}-y^2)\,\mathrm{d}y = \frac{3\pi}{10}.$$

☺

Ejercicio resuelto $\boxed{215}$ Calcula el volumen del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

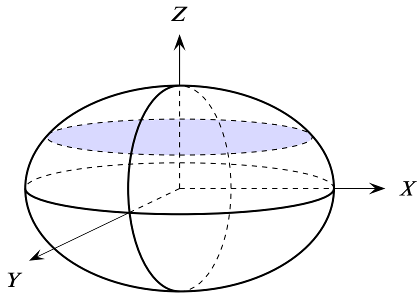
Solución. La intersección del elipsoide con un plano de *altura fija* z paralelo al plano XY se proyecta sobre el plano XY en una elipse, $E(z)$, de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2} \iff \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}=1$$

Es una elipse de semiejes $a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$ y $b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$. Sabemos que el área de dicha elipse es igual a $\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$. Por tanto, el volumen del elipsoide podemos obtenerlo integrando el área de las secciones $E(z)$ para $z\in[-c,c]$.

Dicho volumen es igual a:

$$\pi ab\int_{-c}^{c}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\,\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\pi abc.$$

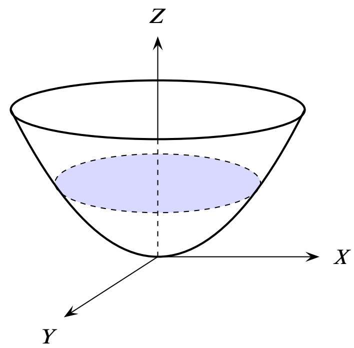


Observa que para el caso en que $a=b=c=r$, es decir, el elipsoide es una esfera de radio r, obtenemos la conocida fórmula para el volumen de una esfera. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{216}}$ Calcula el volumen limitado por el paraboloide $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=z$ y el plano $z=7$.

La intersección del paraboloide con un plano de *altura fija* z paralelo al plano XY se proyecta sobre el plano XY en una elipse, $E(z)$, de ecuación:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=z \iff \frac{x^2}{\left(3\sqrt{z}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(4\sqrt{z}\right)^2}=1$$



Es una elipse de semiejes $3\sqrt{z}$ y $4\sqrt{z}$. Sabemos que el área de dicha elipse es igual a $12\pi z$. Por tanto, el volumen del paraboloide podemos obtenerlo integrando el área de dichas secciones $E(z)$ para $z\in[0,7]$. Dicho volumen es igual a:

$$12\pi\int_0^7 z\,\mathrm{d}z=\frac{49}{6}\pi.$$

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{217}}$ Calcula el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje OX la región del plano comprendida bajo la curva

$$y=\frac{2}{\sqrt{x}\,(x^2-2x+2)}\qquad(1\leqslant x<+\infty).$$

Solución. Se trata de calcular la integral $\pi \int_1^{+\infty} \frac{4}{x\,(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$. Es claro que el trinomio $x^2-2x+2=1+(x-1)^2$ no tiene raíces reales. El denominador tiene raíces imaginarias múltiples y podemos usar el método de Hermite. Para ello escribimos:

$$\frac{4}{x\,(x^2-2x+2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+2}+\frac{d}{dx}\left(\frac{Mx+N}{x^2-2x+2}\right)=$$
$$=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+2}+\frac{2M+2N-2Nx-Mx^2}{(x^2-2x+2)^2}=$$
$$=\frac{4A+(-8A+2C+2M+2N)x+(8A+2B-2C-2N)x^2+(-4A-2B+C-M)x^3+(A+B)x^4}{x(x^2-2x+2)^2}$$

Fácilmente se obtiene que $A=1$, $B=-1$, $C+M+N=4$, $C+N=3$, $C-M=2$, de donde, $M=1$, $C=3$, $N=0$. Por tanto

$$\int_1^t \frac{4}{x\,(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x=\log t+\int_1^t \frac{-x+3}{x^2-2x+2}dx+\left.\frac{x}{x^2-2x+2}\right|_1^t=$$
$$=\log t+2\operatorname{arc\,tg}(x-1)\Big|_1^t-\frac{1}{2}\log(x^2-2x+2)\Big|_1^t+\frac{t}{t^2-2t+2}-1=$$
$$=\log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2-2t+2}}\right)+2\operatorname{arc\,tg}(t-1)+\frac{t}{t^2-2t+2}-1$$

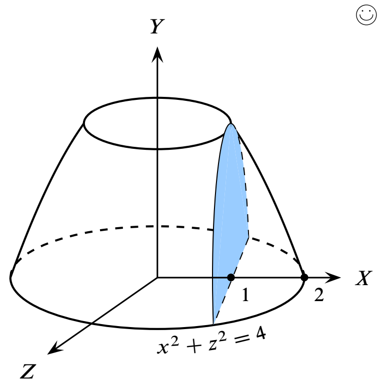
Deducimos que

$$\pi\int_1^{+\infty}\frac{4}{x\,(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x=\pi\lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{4}{x\,(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x=\pi(\pi-1)$$

☺

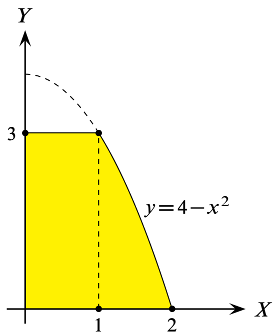
Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{218}}$

La región plana limitada por el segmento de parábola $y=4-x^2$, donde $1\leqslant x\leqslant 2$, y las rectas $x=0$ e $y=3$, gira alrededor del eje OY engendrando un sólido en forma de flan (un tronco de paraboloide de revolución). Calcula su volumen y el volumen de la porción obtenida al cortarlo verticalmente desde un punto del borde superior.



Solución.

Podemos calcular el volumen por el método de los discos. Para ello debemos integrar las áreas de secciones perpendiculares al eje de giro. Observa que debemos tomar como variable de integración la variable y y que en la región indicada, tenemos que $y \in [0,3]$. La sección por una recta horizontal de ordenada y es un disco cuyo radio es $r(y) = \sqrt{4-y}$. Por tanto el volumen pedido viene dado por la integral:

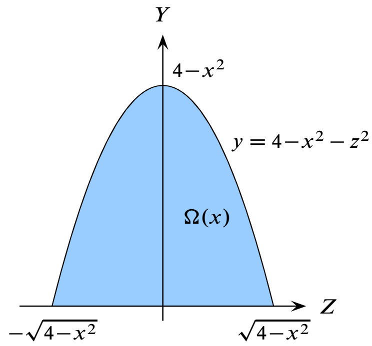


$$\pi \int_0^3 r(y)^2 \,\mathrm{d}y = \pi \int_0^3 (4-y)\,\mathrm{d}y = \frac{15\pi}{2}.$$

También podemos calcular el volumen por el método de los tubos, en cuyo caso viene dado por:

$$2\pi \int_0^1 3x\,\mathrm{d}x + 2\pi \int_1^2 x(4-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{15\pi}{2}.$$

Calcularemos ahora el volumen de la porción obtenida al cortar verticalmente el tronco de paraboloide desde un punto del borde superior. Observa que para cada *valor fijado* de $x \in [0,1]$ la sección por el plano de abscisa x paralelo a ZY es un segmento parabólico, $\Omega(x)$, cuyo vértice es $4-x^2$ y cuyo pie es el segmento de extremos $-\sqrt{4-x^2}$ y $\sqrt{4-x^2}$ (la cuerda que se obtiene al cortar la circunferencia de centro el origen y radio 2 por una recta de abscisa x). La proyección de



dicha parábola sobre el plano ZY debe tener una ecuación de la forma $y=4-x^2-\mu z^2$ donde μ se calcula por la condición de que $y=0$ para $z=\pm\sqrt{4-x^2}$, con lo que resulta $\mu=1$. En consecuencia, la ecuación de dicha parábola en el plano ZY es $y=4-x^2-z^2$. El área del segmento parabólico $\Omega(x)$ viene dada por la integral:

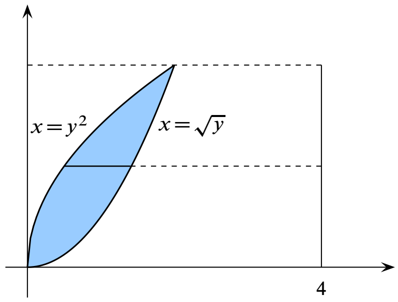
$$\lambda(\Omega(x)) = \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4-x^2-z^2)\,\mathrm{d}z = \frac{16}{3}\sqrt{4-x^2} - \frac{4}{3}x^2\sqrt{4-x^2}$$

Integrando las áreas de dichas secciones se obtiene el volumen pedido, que viene dado por:

$$\int_1^2 \lambda(\Omega(x))\,\mathrm{d}x = -3\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}.$$

Cálculo que ya debes saber hacer. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{219}$ Calcular el volumen del sólido Ω engendrado al girar la región limitada por las parábolas $y=x^2$, $x=y^2$ alrededor la recta $x=4$.



Solución.
Observa que para que para que las dos igualdades $y^2 = x$, $x^2 = y$ tengan sentido debe ser $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$. Por tanto, la igualdad, $y^2 = x$ equivale, por ser $y \geqslant 0$, a $y = \sqrt{x}$. Es inmediato que los puntos de corte de las parábolas son $(0, 0)$ y $(1, 1)$. Podemos emplear el método de los discos y también el de las láminas o tubos.

Por el método de los discos (arandelas en este caso) debemos integrar las áreas de secciones perpendiculares al eje de giro. Observa que debemos tomar como variable de integración la variable y y que en la región indicada, tenemos que $y \in [0, 1]$. La sección por una recta horizontal de ordenada y es una corona circular o arandela cuyo radio interior es la distancia del eje de giro a la parábola $x = \sqrt{y}$, dicha distancias es $r_1(y) = 4 - \sqrt{y}$ y cuyo radio exterior es la distancia del eje de giro a la parábola $x = y^2$, dicha distancia es $r_2(y) = 4 - y^2$. Por tanto el volumen pedido viene dado por la integral:

$$\pi \int_0^1 (r_2(y)^2 - r_1(y)^2)\, dy = \pi \int_0^1 \left((4 - y^2)^2 - (4 - \sqrt{y})^2\right) dy = \frac{71\pi}{30}.$$

Para calcular el volumen por el método de las láminas o tubos debemos tomar como variable x. Hay que tener en cuenta que cada segmento vertical que gira de abscisa $x \in [0, 1]$ tiene de longitud $\sqrt{x} - x^2$ y el radio de giro es $4 - x$. Por tanto el volumen es:

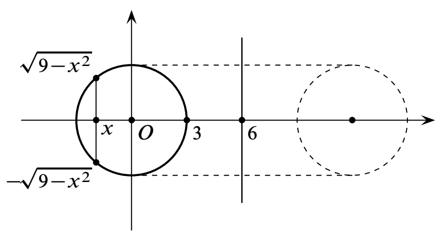
$$2\pi \int_0^1 (4 - x)(\sqrt{x} - x^2)\, dx \; = \frac{71\pi}{30}.$$

☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{220}}$ Calcular el volumen del toro engendrado al girar el círculo de centro $(0, 0)$ y radio 3 alrededor de la recta $x = 6$.

Solución.

Aplicaremos el método de las láminas o de los tubos. Para ello debemos considerar los segmentos paralelos al eje de giro; en nuestro caso serán los segmentos verticales comprendidos en el círculo de centro $(0, 0)$ y radio 3. La longitud del segmento vertical de abscisa $x \in [-3, 3]$ es igual a $2\sqrt{9 - x^2}$ y su radio de giro es $6 - x$. El volumen del toro engendrado es:



$$2\pi \int_{-1}^{1} (6 - x) 2\sqrt{9 - x^2}\, dx \; = 108\pi^2.$$

También se puede calcular el volumen por el método de las arandelas. Ya debes saber hacerlo, te lo dejo para que lo hagas tú. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{221}$ Calcula el área de una superficie esférica de radio R.

Solución. Una superficie esférica de radio R se obtiene girando la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ alrededor del eje OX. El área viene dada por:

$$2\pi \int_{-R}^{R} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_{-R}^{R} R\,\mathrm{d}x = 4\pi R^2.$$

☺

Ejercicio resuelto $\boxed{222}$ Calcular el área de la superficie de revolución engendrada al girar la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor del eje OY.

Solución. Expresando x como función de y, tenemos que $x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$, donde solamente consideramos la mitad de la elipse que está en el semiplano de la derecha $x \geqslant 0$. Queremos calcular el área de la superficie de revolución obtenida al girar la curva $h(y) = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$ alrededor del eje OY. Dicha área viene dada por la integral:

$$I = 2\pi \int_{-b}^{b} h(y)\sqrt{1 + h'(y)^2}\,\mathrm{d}y = 2\pi \frac{a}{b^2} \int_{-b}^{b} \sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Para calcularla debemos considerar dos posibilidades según que $a > b$ o que $b > a$ (el caso $a = b$ es trivial y se vuelve a obtener el mismo resultado del ejercicio anterior). Pongamos $c = \sqrt{|a^2 - b^2|}$. Entonces, si $a > b$ es $c^2 = a^2 - b^2$, y si $b > a$ es $c^2 = b^2 - a^2$. Por lo que:

$$I = 2\pi \frac{a}{b^2} \int_{-b}^{b} \sqrt{b^4 \pm c^2 y^2}\,\mathrm{d}y = 2\pi \frac{ac}{b^2} \int_{-b}^{b} \sqrt{\left(\frac{b^2}{c}\right)^2 \pm y^2}\,\mathrm{d}y = 2\pi \frac{a}{\alpha} \int_{-b}^{b} \sqrt{\alpha^2 \pm y^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Donde hemos puesto $\alpha = \frac{b^2}{c}$. Podemos evaluar directamente estas integrales porque tienen primitivas inmediatas que deberías saber de memoria (repasa la tabla de primitivas inmediatas). Pero también podemos calcularlas muy fácilmente.

$$\int_{-b}^{b} \sqrt{\alpha^2 + y^2}\,\mathrm{d}y = \begin{bmatrix} y = \alpha \operatorname{senh} t \\ \beta = \operatorname{argsenh} \frac{b}{\alpha} \end{bmatrix} = \alpha^2 \int_{-\beta}^{\beta} \cosh^2 t\,\mathrm{d}t = \alpha^2 \int_{-\beta}^{\beta} \left(\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^2 \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\alpha^2}{2} \int_{-\beta}^{\beta} \left(\frac{\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}}{2} + 1\right) \mathrm{d}t = \alpha^2\beta + \frac{\alpha^2}{2} \int_{-\beta}^{\beta} \cosh(2t)\,\mathrm{d}t = \alpha^2\beta + \frac{\alpha^2}{4} \operatorname{senh}(2t)\Big|_{-\beta}^{\beta} =$$

$$= \alpha^2\beta + \frac{\alpha^2}{2} \operatorname{senh}(2\beta) = \alpha^2\beta + \alpha^2 \operatorname{senh}(\beta)\cosh(\beta) = \alpha^2\beta + \alpha b\sqrt{1 + \frac{b^2}{\alpha^2}} =$$

$$= \alpha^2 \operatorname{argsenh} \frac{b}{\alpha} + \alpha b\sqrt{1 + \frac{b^2}{\alpha^2}}.$$

Simplificando, obtenemos que para el caso en que $a > b$, el área pedida es igual a:

$$2\pi a \left(\frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{argsenh}\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right) + a \right).$$

Es un buen ejercicio de cálculo que compruebes estos resultados paso a paso. Te garantizo que el resultado final obtenido es correcto. Un resultado parecido se obtiene para el caso en que $b > a$. Lo dejo para que lo hagas tú. ☺

8.8. Evolución de la idea de integral

8.8.1. Problemas de cuadraturas en las matemáticas griegas

[5] Los problemas de cuadraturas son problemas geométricos que consisten en lo siguiente: dada una figura, construir un cuadrado con área igual a la de la figura dada. Esta construcción debía hacerse con regla no graduada y compás, siguiendo unas normas precisas. Según lo establecido en los *Elementos* de Euclides (*c.* 300 a.C.) la construcción debe constar de un número finito de pasos, cada uno de ellos consistente en:

- Trazar una recta que una dos puntos.
- Trazar una circunferencia de centro y radio arbitrarios.
- Intersecar dos de las figuras anteriores.

Son famosos los problemas de la cuadratura del círculo, la trisección de un ángulo, la duplicación del cubo y la inscripción de polígonos regulares en una circunferencia. En la antigua Grecia se sabía cuadrar cualquier polígono.

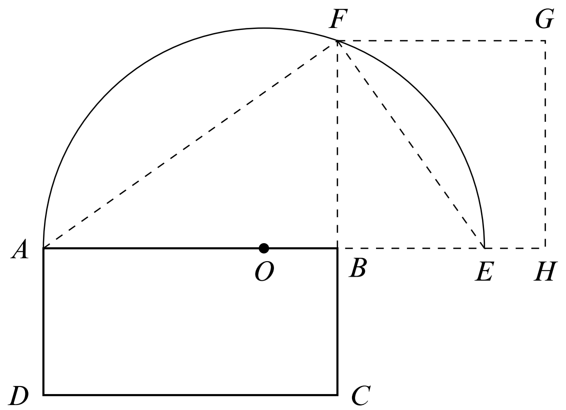


Figura 8.26. Cuadratura de un rectángulo

Para cuadrar el rectángulo $ABCD$ de la figura 8.26 se procede de la forma siguiente:

1) Se prolonga el lado AB y se determina sobre él un punto E tal que $BE = BC$.

[5] Para escribir estas notas históricas he seguido de cerca los trabajos de Kirsti Andersen [1], Israel Kleiner [10], González Urbaneja [7] y H. J. M. Bos [2].

2) Se traza con centro en el punto medio O de AE una semicircunferencia de radio OE.

3) Se traza por B una perpendicular a AE y se determina su punto de corte F con la semicircunferencia.

4) El segmento FB es el lado de un cuadrado cuya área es igual a la del rectángulo $ABCD$. Esto es consecuencia de que la altura FB de un triángulo rectángulo AFE es media proporcional entre las dos partes en que divide a la hipotenusa, es decir, $FB/AB = BE/FB$, por lo que $FB^2 = AB.BE = AB.BC$.

A partir de aquí es fácil obtener la cuadratura de un triángulo, lo que permite obtener la cuadratura de cualquier polígono descomponiéndolo en triángulos. Los matemáticos griegos inventaron un procedimiento, que se conoce con el nombre de "exhausción", por el cual podían lograr la cuadratura de algunas regiones delimitadas por curvas. Se atribuye a Eudoxo de Cnido (*c.* 400 - 347 a.C.) la invención de este método, que fue perfeccionado posteriormente por Arquímedes (*c.* 287 - 212 a.C.). El siguiente es un notable ejemplo de su aplicación.

8.8.1.1. Cuadratura de un segmento de parábola por Arquímedes

8.70 Teorema. *El área del segmento parabólico PVQ es igual a cuatro tercios el área del triángulo inscrito $\triangle PVQ$.*

Demostración. Esta demostración aparece en una carta que escribe Arquímedes a su amigo Dositheus, obra que se conoce con el nombre de *Sobre la Cuadratura de la Parábola*. La demostración consiste en hacer una descomposición exhaustiva del segmento parabólico por medio de triángulos de una forma muy ingeniosa. Empezaremos explicando la construcción geométrica de la figura 8.27.

Una *cuerda* PQ de una parábola es un segmento que une dos de sus puntos. La región plana acotada, cuya frontera está formada por la cuerda PQ y el arco de la parábola comprendido entre los puntos P y Q se llama un *segmento parabólico*. El *vértice* de un segmento parabólico es el punto de la parábola en el cual la tangente es paralela a la cuerda que define el segmento.

Se verifica que el vértice de un segmento parabólico PVQ es el punto intersección con la parábola de la recta paralela al eje de la parábola que pasa por el punto medio $O = \frac{1}{2}(P+Q)$ del segmento PQ.

El triángulo $\triangle PVQ$ cuya base es el segmento PQ y cuyo otro vértice es el vértice V del segmento parabólico le llamaremos el triángulo inscrito.

En la figura 8.27 se han representado también los triángulos $\triangle PMV$ y $\triangle VNQ$ inscritos, respectivamente, en los segmentos parabólicos determinados por las cuerdas PV y VQ.

La primera parte de la demostración consiste en calcular el área de los dos triángulos $\triangle PMV$ y $\triangle VNQ$. Arquímedes demuestra que

$$\lambda(\triangle VNQ) = \frac{1}{4}\lambda(\triangle VOQ), \qquad \lambda(\triangle VMP) = \frac{1}{4}\lambda(\triangle VOP)$$

Por tanto

$$\lambda(\triangle VNQ) + \lambda(\triangle VMP) = \frac{1}{4}\lambda(\triangle PVQ) \tag{8.46}$$

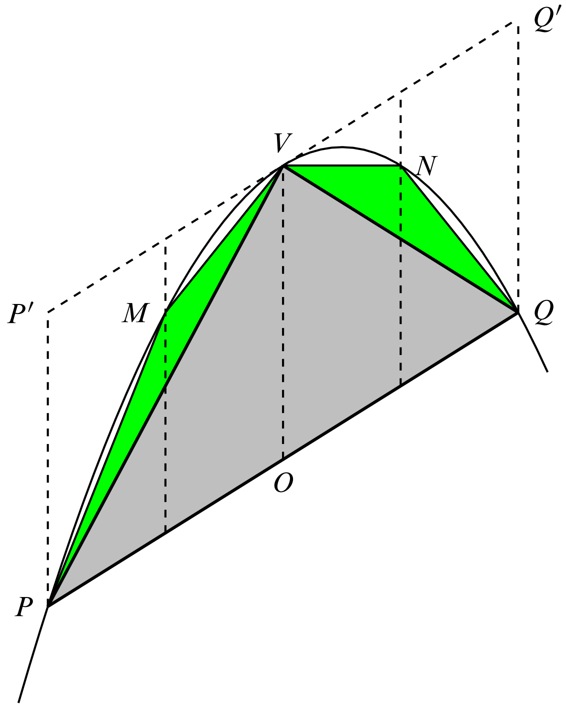


Figura 8.27. Cuadratura de un segmento de parábola

Llamando S al área del triángulo $\triangle PVQ$, el área de los dos nuevos triángulos es $\frac{1}{4}S$. Naturalmente, este proceso se puede repetir ahora con cada uno de los cuatro segmentos parabólicos determinados por las cuerdas PM, MV, VN y NQ inscribiendo en ellos los respectivos triángulos, la suma de cuyas áreas será igual a $\frac{1}{16}S$. Y puede repetirse indefinidamente.

Nosotros ahora acabaríamos calculando el área del segmento parabólico por

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}S=\frac{4}{3}S$$

Pero Arquímedes, que no sabe de convergencia de series ni falta que le hace, razona de forma muy elegante por medio de la doble reducción al absurdo usual en la matemática griega.

Para ello hace uso de la llamada *propiedad arquimediana* o *axioma de Arquímedes*. Este axioma aparece en el libro de Arquímedes *La Esfera y el Cilindro* así como en *Sobre la Cuadratura de la Parábola* y en *Espirales*. Al parecer, dicho axioma fue ya formulado por Eudoxo. Como sabemos, la propiedad arquimediana establece que:

> *Dadas magnitudes cualesquiera $a>0$ y $b>0$, siempre es posible, por pequeña que sea a y grande que sea b, conseguir que un múltiplo conveniente de a exceda a b, es decir $na>b$ para algún número natural n.*

Partiendo de la propiedad arquimediana se deduce fácilmente el siguiente resultado, llamado *principio de convergencia de Eudoxo*, en el que se basa el llamado *método de exhausción* griego:

Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo este procesos de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano.

Arquímedes razona como sigue. Sea K el área del segmento parabólico PVQ.

(I) Supongamos que $K > \frac{4}{3}S$; es decir, que $K - \frac{4}{3}S > 0$.

Como el área del triángulo inscrito en un segmento parabólico PVQ es la mitad del área del paralelogramo circunscrito $PP'QQ'$, la cual, a su vez, es mayor que el área del segmento, se sigue que el área del triángulo inscrito en un segmento parabólico es mayor que la mitad del área de dicho segmento, lo que permite aplicar el principio de convergencia de Eudoxo.

Por tanto, en la sucesión de áreas

$$K, K - S, K - (S + \frac{1}{4}S), K - (S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S), \dots$$

cada una es menor que la mitad de la que le precede y, por tanto, en virtud del citado principio, podemos concluir que en alguna etapa se tendrá que

$$K - \frac{4}{3}S > K - \left(S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S\right)$$

Esto implica que

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S > \frac{4}{3}S$$

lo que es contradictorio con la igualdad, conocida por Arquímedes, que dice que:

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S = \frac{4}{3}S - \frac{1}{3}\frac{1}{4^n}S \tag{8.47}$$

la cual implica que $S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S < \frac{4}{3}S$. Por tanto, no puede ser $K > \frac{4}{3}S$.

(II) Supongamos que $K < \frac{4}{3}S$; es decir, que $\frac{4}{3}S - K > 0$.

Como cada una de las áreas $S, \frac{1}{4}S, \frac{1}{16}S, \dots, \frac{1}{4^n}S$ es menor que la mitad de la que le precede y, por tanto, en virtud del principio de convergencia de Eudoxo, podemos concluir que en alguna etapa se tendrá que $\frac{1}{4^n}S < \frac{4}{3}S - K$. Entonces

$$\frac{4}{3}S - K > \frac{1}{4^n}S > \frac{1}{3}\frac{1}{4^n}S = \frac{4}{3}S - \left(S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S\right)$$

Lo que implicaría que

$$K < S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S$$

Que es absurdo pues la suma de la derecha es el área de un polígono inscrito en el segmento parabólico. Por tanto, no puede ser $K < \frac{4}{3}S$.

La única posibilidad es $K = \frac{4}{3}S$. □

8.8.1.2. *El Método* de Arquímedes

En su tratado *El Método*, que se creía perdido y fue descubierto en 1906, Arquímedes obtiene la cuadratura de la parabola por medios mecánicos usando el principio de la palanca. Aunque el propio Arquímedes *reconoce que esa forma de proceder no es una demostración*, merece la pena decir algo sobre ella.

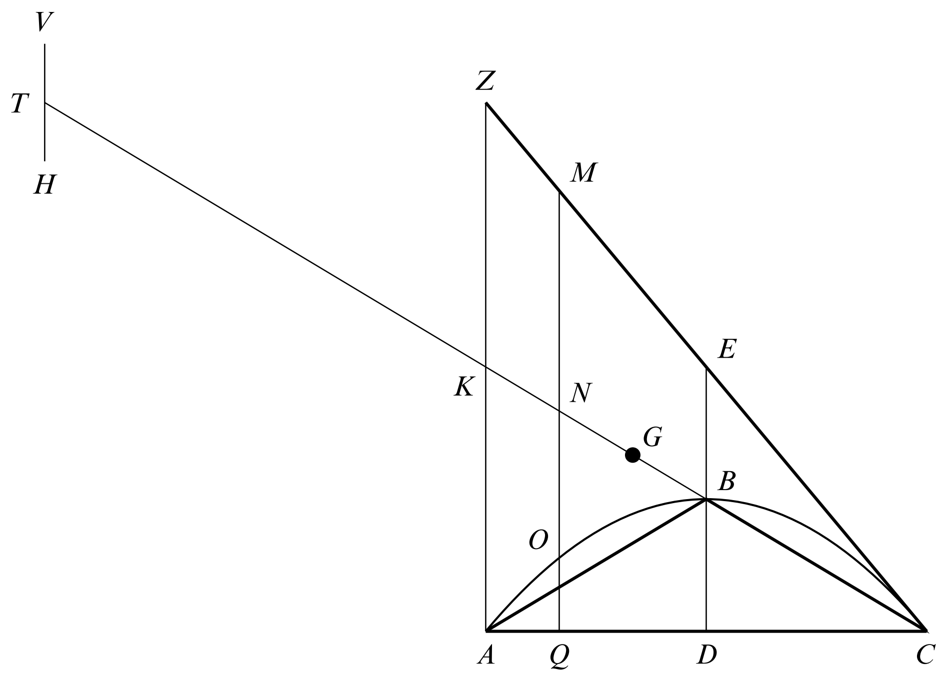


Figura 8.28. El *Método* de Arquímedes

La recta CZ es la tangente a la parábola en C, B es el vértice del segmento parabólico. El segmento AZ es perpendicular a la cuerda AC, CT es la recta que pasa por el punto C y el vértice B de forma que K es el punto medio del segmento CT. Se considera CT como un brazo de palanca con fulcro en K.

Por ser ABC una parábola, se sabe que la subtangente ED en un punto C es igual al doble de la abscisa BD (conviene imaginarse la parábola girada 90 grados), es decir, $ED = 2BD$, de donde, $EB = BD$. Deducimos, por la semejanza de triángulos en la figura, que $MN = NQ$ y ZK=KA.

Arquímedes demuestra en *Sobre la Cuadratura de la Parábola* que

$$\frac{CA}{AQ} = \frac{MQ}{QO}$$

Y, como también es $\dfrac{CA}{AQ} = \dfrac{CK}{KN}$, y por construcción es $TK = CK$, obtenemos que

$$\frac{TK}{KN} = \frac{MQ}{QO} \Longleftrightarrow TK.QO = KN.MQ$$

Si ahora trasladamos al punto T un segmento de longitud igual a QO y lo ponemos como en la figura el segmento VH de modo que su centro de gravedad sea el punto T, la igualdad anterior nos dice que el segmento $VH = QO$ queda equilibrado por el segmento MQ, pues el producto de dichos segmentos por la longitud correspondiente del brazo de palanca con fulcro en K es la misma. Obsérvese que N es el centro de gravedad del segmento MQ. Deducimos que K es el centro de gravedad de los segmentos VH y MQ.

Análogamente puede razonarse con cualquier paralela al eje de la parábola ED, todas ellas estarán en equilibrio con los segmentos determinados sobre ellas por el segmento parabólico trasladados al punto T, de manera que el centro de gravedad de cada par de segmentos será el punto K.

Ahora bien, los segmentos paralelos a DE *"componen"* el triángulo $\triangle AZC$ y los correspondientes segmentos dentro del segmento parabólico *"componen"* dicho segmento parabólico. Por tanto el triángulo AZC *"permaneciendo en su lugar"*, estará en equilibrio respecto del punto K con el segmento parabólico trasladado hasta tener su centro de gravedad en T, de manera que el centro de gravedad del conjunto de ambos será el punto K.

Dividimos ahora CK por el punto G de forma que CK sea el triple de KG, el punto G será el centro de gravedad del triángulo AZC,y puesto que el triángulo AZC, "permaneciendo en su lugar" está en equilibrio, respecto del punto K, con el segmento parabólico ABC, trasladado con centro de gravedad en T, y que G es el centro de gravedad del triángulo AZC, se verifica, por consiguiente, que la razón del triángulo AZC al segmento parabólico ABC colocado alrededor del centro T es igual a la razón de TK a KG. Ahora bien, siendo TK triple de KG, el triángulo AZC será triple del segmento parabólico ABC. Además, el triángulo AZC es cuádruple del triángulo inscrito ABC, ya que ZK es igual que KA y KA es doble de BD al ser AD igual que DC. Concluimos que el segmento parabólico ABC equivale a cuatro tercios del triángulo inscrito ABC. □

8.8.1.3. Área de una espiral

El siguiente ejemplo de cuadratura sigue un procedimiento que, traducido a las notaciones actuales, es prácticamente el mismo de la integral de Riemann.

La espiral de Arquímedes es la curva que describe un punto material que se mueve con velocidad uniforme a lo largo de una semirrecta que gira con velocidad angular uniforme alrededor de su extremo. Es un ejemplo de las llamadas *curvas mecánicas*. La ecuación polar de una espiral de Arquímedes es de la forma $\rho = a\vartheta$, donde $a > 0$ es una constante.

8.71 Teorema. *El área del primer ciclo de una espiral es igual a una tercera parte del área del círculo circunscrito.*

Demostración. Consideremos una espiral de Arquímedes de ecuación polar $\rho = a\vartheta$ y calculemos el área cuando el ángulo polar varía desde 0 a 2π, es decir, de la primera vuelta de la espiral. El radio del círculo circunscrito es $2\pi a$. Para ello dividimos este círculo en sectores de amplitud $\vartheta = 2\pi/n$, desde $\vartheta = 2\pi k/n$ a $\vartheta = 2\pi(k+1)/n$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. En cada sector examinamos el arco de espiral que queda dentro del mismo y acotamos el área correspondiente a dicho arco de espiral entre las áreas de dos sectores circulares. Teniendo en cuenta que el área de un sector circular de radio r y amplitud φ radianes es $\frac{1}{2}r^2\varphi$, resulta que el área de sector circular más grande inscrito en cada arco de espiral es $\frac{1}{2}(a2\pi k/n)^2(2\pi/n)$, y el área de sector circular más pequeño circunscrito a cada arco de espiral es $\frac{1}{2}(a2\pi(k+1)/n)^2(2\pi/n)$. Deducimos que el área, S, de la espiral verifica que:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{a2\pi k}{n}\right)^2\frac{2\pi}{n} = \frac{4\pi^3a^2}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2 < S < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{a2\pi k}{n}\right)^2\frac{2\pi}{n} = \frac{4\pi^3a^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

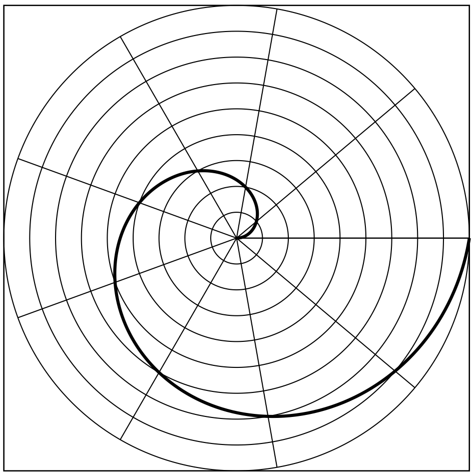


Figura 8.29. Cuadratura de una espiral

Arquímedes conocía que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Usando este resultado podemos escribir la desigualdad anterior en la forma:

$$4\pi^3a^2\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) < S < 4\pi^3a^2\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

Pongamos $K = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$ que es una tercera parte del área del círculo circunscrito. Restando K en la desigualdad anterior y haciendo operaciones sencillas, obtenemos que:

$$K\left(-\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right) < S - K < K\left(\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right);$$

y como $1/n^2 \leqslant 1/n$, obtenemos que $-2K/n < S - K < 2K/n$. Usando ahora el axioma de Arquímedes se concluye que $S = K$. $\square$

8.8.2. La integración antes del Cálculo

8.8.2.1. Los indivisibles de Cavalieri

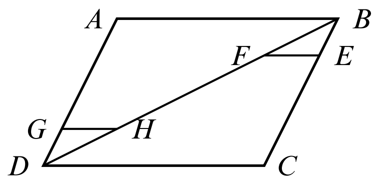
El método de integración geométrica que se consideraba ideal durante la primera mitad del siglo XVII era el método de exhausción que había sido inventado por Eudoxo y perfeccionado por Arquímedes. El nombre es desafortunado porque la idea central del método es la de evitar el infinito y por lo tanto este método no lleva a un “agotamiento” de la figura a determinar.

Entre los matemáticos del siglo XVII era general el deseo de encontrar un método para obtener resultados y que, a diferencia del método de exhausción, fuera directo. Y mejor que mejor si el nuevo método, aparte de dar resultados, pudiera ser utilizado para demostrarlos.

El camino que siguieron fue el que se deriva de una concepción intuitiva inmediata de las magnitudes geométricas. Se imaginaron un área como formada, por ejemplo, por un número infinito de líneas paralelas. Kepler ya había hecho uso de métodos infinitesimales en sus obras; el interés que se tomó en el cálculo de volúmenes de toneles de vino dio como resultado un libro *Nova stereometria doliurum vinariorum* (1615). En él consideraba sólidos de revolución como si estuvieran compuestos de diversas maneras por una cantidad infinita de partes sólidas. Por ejemplo, consideraba una esfera como formada por un número infinito de conos con vértice común en el centro y base en la superficie de la esfera. Esto le conducía al resultado de que la esfera es igual en volumen al cono que tiene como altura el radio de la esfera y como base un círculo igual al área de la esfera, es decir un círculo con el diámetro de la esfera como radio.

Galileo tenía la intención de escribir un libro sobre indivisibles, pero este libro nunca se publicó.

Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647), discípulo de Galileo y profesor en la Universidad de Bolonia, publicó en 1635 un tratado *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova quadam Ratione Promota* en el que, siguiendo ideas de Kepler y Galileo, desarrolló una técnica geométrica para calcular cuadraturas, llamada *método de los indivisibles*. En este método, un área de una región plana se considera formada por un número infinito de segmentos paralelos, cada uno de ellos se interpreta como un rectángulo infinitamente estrecho; un volumen se considera compuesto por un número infinito de áreas planas paralelas. A estos elementos los llama los *indivisibles* de área y volumen respectivamente. En líneas generales los “indivisibilistas” mantenían, como expresa Cavalieri en sus *Exercitationes Geometricae Sex* (1647), que *una línea está hecha de puntos como una sarta de cuentas; el plano está hecho de líneas, como un tejido de hebras y un sólido de áreas planas como un libro de hojas*.



La forma en que se aplicaba el método o principio de Cavalieri puede ilustrarse como sigue.

Para demostrar que el paralelogramo $ABCD$ tiene área doble que cualquiera de los triángulos ABD o BCD, hace notar que cuando $GD = BE$, se tiene que $GH = FE$. Por tanto los triángulos ABD y BCD están constituidos por igual número de líneas iguales, tales como GH y EF, y por tanto sus áreas deben ser iguales.

8.8.2.2. Cuadratura de la cicloide por Roberval

En 1630, Mersenne, propuso a sus amigos matemáticos hacer la cuadratura de la cicloide. Esta fue llevada a cabo por Gilles Personne de Roberval en 1634, utilizando esencialmente el método de los indivisibles de Cavalieri. Recuerda que la cicloide es la curva que describe un punto de una circunferencia que rueda sin deslizar.

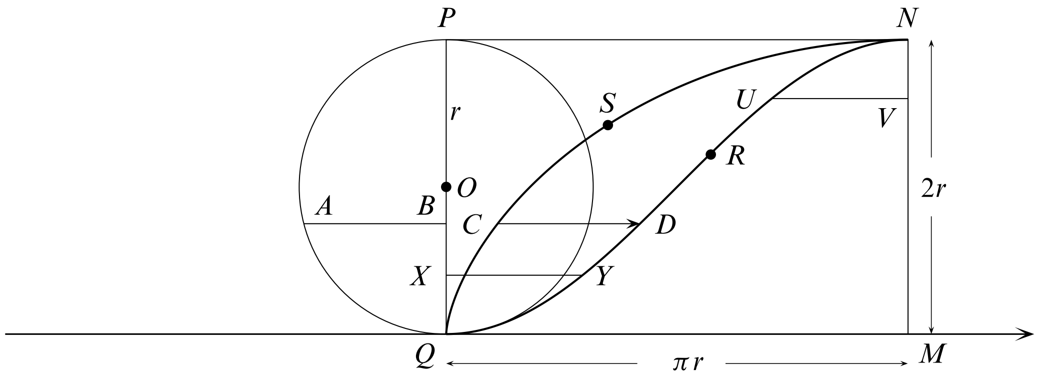


Figura 8.30. Cuadratura de la cicloide

En la figura 8.30, sea $QMNS$ la mitad de un arco de la cicloide generada por el círculo de radio r centrado en O. El área del rectángulo $QMNP$ es el doble del área del círculo. Construimos segmentos de línea infinitesimales horizontales, AB, con longitud determinada por la distancia horizontal entre el diámetro PQ y la circunferencia. Cada punto C de la cicloide lo sometemos a una traslación horizontal hasta el punto D, según el correspondiente segmento $AB = CD$, y así obtenemos la curva QRN, llamada compañera de la cicloide. Por la construcción realizada, las secciones horizontales del semicírculo y de la región comprendida entre la cicloide y su curva compañera son segmentos de igual longitud, por lo que dicha región tiene área igual a la mitad del circulo. Por otra parte, la curva compañera de la cicloide divide en dos partes iguales al rectángulo $QMNP$, pues, como Roberval demostró, las secciones horizontales de altura a y $2r - a$ dan en cada una de las partes en que dicha curva divide al rectángulo, segmentos iguales XY y UV. Deducimos así que el área encerrada por la mitad de un arco de cicloide es $\pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{3}{2}\pi r^2$. Por tanto, concluimos que el área encerrada por un arco de la cicloide es tres veces el área del círculo que la genera.

Los matemáticos no se mostraban de acuerdo acerca del valor que había que dar a una demostración por el método de los indivisibles. La mayoría de los que se preocupaban de la cuestión consideraban el método de los indivisibles sólo como un método heurístico y creían que era aún necesaria una demostración por exhausción.

8.8.2.3. Parábolas e hipérbolas de Fermat

La cuadratura de las curvas definidas por $y = x^n$ donde n es un número natural o bien un entero negativo $n \neq -1$, había sido realizada para $n = 1, 2 \dots, 9$ por Cavalieri, aunque podemos remontarnos hasta Arquímedes que había resuelto geométricamente los casos correspondientes a $n = 1, 2, 3$. Fermat, con una ingeniosa idea, logró obtener la cuadratura de áreas limitadas por arcos de hipérbolas generalizadas $x^n y^m = 1$ $(m, n \in \mathbb{N})$.

Fermat seguía un método clásico de exhausción, pero con una idea feliz que consistió en considerar rectángulos infinitesimales inscritos en la figura a cuadrar cuyas bases estaban en progresión geométrica. Fermat considera al principio las hipérbolas $yx^n = k$ y manifiesta:

> *Digo que todas estas infinitas hipérbolas, excepto la de Apolonio, que es la primera, pueden ser cuadradas por el método de la progresión geométrica, de acuerdo a un procedimiento uniforme general.*

Vamos a hacernos una idea de cómo calculaba Fermat la cuadratura de la hipérbola generalizada $y = x^{-2}$ para $x \geqslant a$. Usaremos notación y terminología actuales.

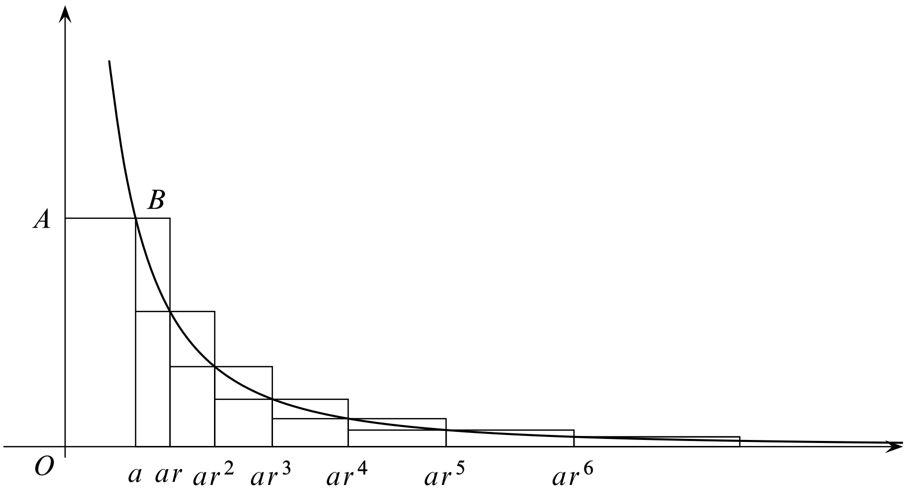


Figura 8.31. Cuadratura de la hipérbola de Fermat $y = x^{-2}$

Elegimos un número $r > 1$ y consideremos los puntos de abscisas $a, ar, ar^2, ar^3, \dots$. Los rectángulos inscritos (ver figura 8.31) tienen área

$$(ar - a)\frac{1}{(ar)^2} + (ar^2 - ar)\frac{1}{(ar^2)^2} + (ar^3 - ar^2)\frac{1}{(ar^3)^2} + \cdots = \frac{r-1}{ar^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k} = \frac{1}{ar}$$

El área de los rectángulos circunscritos viene dada por

$$(ar - a)\frac{1}{a^2} + (ar^2 - ar)\frac{1}{(ar)^2} + (ar^3 - ar^2)\frac{1}{(ar^2)^2} + \cdots = \frac{r-1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k} = \frac{r}{a}$$

Por tanto, llamando S al área bajo la curva, tenemos que

$$\frac{1}{ar} < S < \frac{r}{a}$$

Como esta desigualdad es válida para todo $r > 1$, concluimos que $S = \frac{1}{a}$. Observa que dicho valor es precisamente el área del rectángulo $OABa$.

El razonamiento de Fermat tiene detalles muy interesantes que se pierden usando la terminología y símbolos actuales. Vamos a reproducir parte de su razonamiento. Fermat se apoya en una propiedad de las progresiones geométricas de razón menor que la unidad, que enuncia como sigue:

> *Dada una progresión geométrica cuyos términos decrecen indefinidamente, la diferencia entre dos términos consecutivos es al más pequeño de ellos, como el mayor es a la suma de los términos restantes.*

Llamemos $R_1, R_2, R_3, \ldots$ a las áreas de los sucesivos rectángulos y S a la suma de todas ellas. Como se trata de una progresión geométrica decreciente, se tiene que:

$$\frac{R_1 - R_2}{R_2} = \frac{R_1}{S - R_1}$$

Simplificando, resulta

$$S - R_1 = OA.AB = \frac{1}{a}$$

Dice Fermat:

> [...] *si ahora añadimos* [a ambos miembros de esta igualdad] *el rectángulo* R_1 *que a causa de las infinitas subdivisiones, se desvanece y queda reducido a nada, alcanzamos la conclusión, que podría ser fácilmente confirmada por una más prolija prueba llevada a cabo a la manera de Arquímedes... No es difícil extender esta idea a todas las hipérbolas definidas anteriormente excepto la que ha sido indicada* [la hipérbola de Apolonio].

Vemos cómo en las cuadraturas de Fermat de hipérbolas y parábolas generalizadas, subyacen los aspectos esenciales de la integral definida:

- La división del área bajo la curva en elementos de área infinitamente pequeños.
- Aproximación de la suma de esos elementos de área por medio de rectángulos infinitesimales de altura dada por la ecuación analítica de la curva.
- Un intento de expresar algo parecido a un límite de dicha suma cuando el número de elementos crece indefinidamente mientras se hacen infinitamente pequeños.

8.8.2.4. La integración aritmética de Wallis

Jhon Wallis (1616 - 1703) publicó en 1655 un tratado *Arithmetica infinitorum* ("La Aritmética de los infinitos") en el que aritmetizaba el método de los indivisibles de Cavalieri. Para ilustrar el método de Wallis consideremos el problema de calcular el área bajo la curva $y = x^k$ ($k = 1, 2, \ldots$) y sobre el segmento $[0, a]$ (ver figura (8.32)). Siguiendo a Cavalieri, Wallis considera la región PQR formada por un número infinito de líneas verticales paralelas, cada una de ellas con longitud igual a x^k. Por tanto, si dividimos el segmento $PQ = AB = a$ en n partes de longitud $h = a/n$, donde n es infinito, entonces la suma de estas infinitas líneas es del tipo

$$0^k + h^k + (2h)^k + (3h)^k + \cdots + (nh)^k \tag{8.48}$$

Análogamente, el área del rectángulo $ABCD$ es

$$a^k + a^k + a^k + \cdots + a^k = (nh)^k + (nh)^k + (nh)^k + \cdots + (nh)^k \tag{8.49}$$

La razón entre el área de la región PQR y el rectángulo $ABCD$ es

$$\frac{\text{Área } PQR}{\text{Área } ABCD} = \frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + n^k + n^k + \cdots + n^k} \tag{8.50}$$

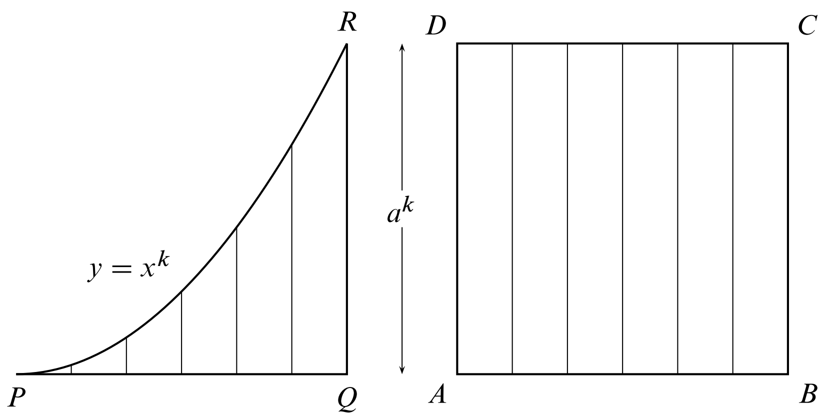


Figura 8.32. Comparando indivisibles

Esto lleva a Wallis a estudiar el valor de la expresión (8.50) para $n = \infty$[6]. Después de estudiar varios casos para valores de $k = 1, 2, 3$ haciendo, en cada caso, sumas para distintos valores de $n = 1, 2, 3, 4$, Wallis observa ciertas regularidades en las mismas y, con tan débil base, acaba afirmando que para $n = \infty$ y para todo $k = 1, 2, \ldots,$ se verifica que:

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + n^k + n^k + \cdots + n^k} = \frac{1}{k+1} \tag{8.51}$$

Naturalmente, de aquí deduce el valor del área de la región PQR:

$$\frac{\text{Área } PQR}{\text{Área } ABCD} = \frac{\text{Área } PQR}{a^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \Rightarrow \text{Área } PQR = \frac{a^{k+1}}{k+1} \quad k = 1, 2, 3 \ldots \tag{8.52}$$

Este resultado ya era conocido anteriormente, pero Wallis no se paraba aquí y extendía la validez de la igualdad (8.51) a todos los exponentes racionales positivos. Su peculiar razonamiento tiene interés pues en él se basó Newton para obtener la serie binomial. Lo esencial del mismo puede resumirse, en términos actuales, como sigue.

[6] Fue precisamente Wallis quien introdujo en 1655 en la obra *De Sectionibus Conicis*, el símbolo del "lazo del amor", ∞, con el significado de "infinito".

Definamos el índice, $\sigma(f)$, de una función f mediante la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(n)}{f(n)+f(n)+f(n)+\cdots+f(n)} = \frac{1}{\sigma(f)+1} \tag{8.53}$$

suponiendo que dicho límite tenga sentido. Por ejemplo, (8.51) nos dice que el índice de la función $f_k(x) = x^k$ es $\sigma(f_k) = k$ para $k = 1, 2, \ldots$.

Wallis observó que, dada una progresión geométrica de potencias de x como, por ejemplo $1, x^3, x^5, x^7, \ldots$, la correspondiente sucesión de índices $0, 3, 5, 7, \ldots$ forman una progresión aritmética. Como $\sigma(f_k) = k$, esta observación es trivial, pero le permite dar un atrevido salto adelante, de manera que mediante una audaz interpolación establece (sin demostración) que una conclusión análoga puede deducirse para la progresión geométrica

$$1, \sqrt[q]{x}, (\sqrt[q]{x})^2, \ldots, (\sqrt[q]{x})^{q-1}, x$$

de manera que la sucesión de sus índices debe formar una progresión aritmética, de donde se sigue que debe ser $\sigma\big((\sqrt[q]{x})^p\big) = p/q$ para $p = 1, 2, \ldots, q$. De esta forma obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{0})^p + (\sqrt{1})^p + (\sqrt{2})^p + (\sqrt{3})^p + \cdots + (\sqrt{n})^p}{(\sqrt{n})^p + (\sqrt{n})^p + (\sqrt{n})^p + (\sqrt{n})^p + \cdots + (\sqrt{n})^p} = \frac{1}{p/q+1}$$

Wallis estaba convencido de la validez de su método, conocido posteriormente como *interpolación de Wallis*, que tuvo importancia en el siglo XVIII. Puede considerarse como un intento de resolver el siguiente problema:

> *Dada una sucesión P_k, definida para valores enteros de k, encontrar el significado de P_α cuando α no es un número entero.*

Además, Wallis deduce que *necesariamente debe ser* $(\sqrt[q]{x})^p = x^{p/q}$. Será Newton, poco más tarde, quien siguiendo los pasos de Wallis, introducirá el uso de potencias fraccionarias y negativas.

Wallis, incluso llega a afirmar que la igualdad

$$\int_0^a x^r \, dx = \frac{a^{r+1}}{r+1} \tag{8.54}$$

no es válida solamente para exponentes r racionales, sino también para otros como $r = \sqrt{3}$ pero, naturalmente, no puede dar ninguna justificación.

Obtenida, a su manera, la cuadratura fundamental (8.54), Wallis intenta calcular la integral

$$\int_0^1 \sqrt{x - x^2} \, dx$$

Dicha integral representa el área bajo la semicircunferencia de centro $(1/2, 0)$ y radio $1/2$, su valor es, por tanto, $\pi/8$. Wallis quería obtener dicho resultado evaluando directamente la integral. No tuvo éxito en este empeño que Newton habría de resolver posteriormente, pero sus resultados le llevaron a obtener la llamada *fórmula de Wallis*

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}$$

8.8.2.5. El resultado fundamental de Barrow

Barrow estuvo muy cerca de descubrir la relación inversa entre problemas de tangentes y de cuadraturas, pero su conservadora adhesión a los métodos geométricos le impidió hacer uso efectivo de esta relación. Veamos cómo aparece esa relación tal como se expone en la Lección X, Proposición 11 de las *Lectiones Geometricae*.

En la figura (8.33) se han representado dos curva $y = f(x)$ e $y = g(x)$. El segmento AD representa el eje de abscisas donde toma valores x. La cantidad $g(x)$ representa el valor del área bajo la gráfica de f comprendida entre el punto A y x. Dado un punto de abscisa D, se trata de probar que la pendiente de la tangente a $y = g(x)$ en el punto F, es decir en el punto $(D, g(D))$, es igual a $f(D) = DE$. La demostración de Barrow es geométrica.

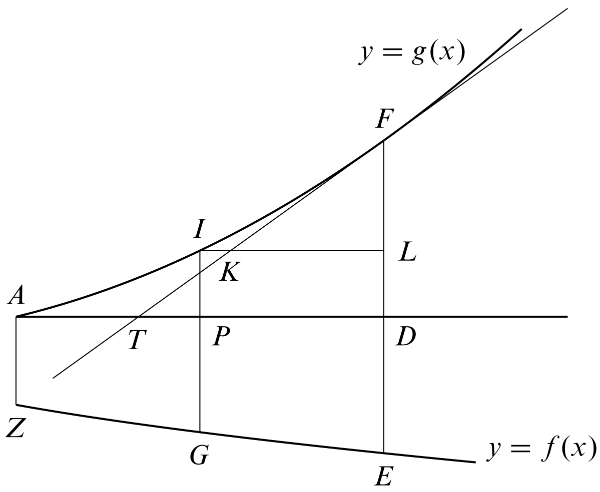


Figura 8.33. Teorema Fundamental

Tracemos una línea recta FT por F que corta en T a la recta AD y tal que

$$DF/TD = f(D) = DE$$

Queremos probar que FT es la tangente a $y = g(x)$ en el punto F. Para ello vamos a ver que la distancia horizontal, KL, de cualquier punto L de la recta EF a la recta FT es menor que la distancia, IL, de dicho punto L a la curva $y = g(x)$. Esto probará que la recta FT queda siempre por debajo de $y = g(x)$.

Tenemos que:

$$FL/KL = DF/TD = DE$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \text{área } ADEZ &= FD \\ \text{área } APGZ &= PI = LD \\ \text{área } PDEG &= FD - LD = FL \end{aligned}$$

Ya que

$$\text{área } PDEG < \text{rectángulo } PD.DE \tag{8.55}$$

Se sigue que

$$FL < PD.DE \Longrightarrow DE > FL/PD$$

y por tanto

$$FL/KL > FL/PD \Longrightarrow KL < PD = IL$$

Deducimos que el punto K queda debajo de la curva $y = g(x)$ y por tanto la recta FT queda a un lado de la curva. Para completar la demostración es necesario repetir el razonamiento tomando puntos a la derecha de EF. Esto prueba que TF es tangente a $y = g(x)$ en D y su pendiente es $DE = f(D)$. En términos actuales, lo que Barrow ha probado es que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

8.8.3. La relación fundamental entre cuadraturas y tangentes

8.8.3.1. El Teorema Fundamental del Cálculo según Newton

Newton desarrolló tres versiones de su cálculo. En la obra *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, que Newton entregó a su maestro Barrow en 1669, y que puede considerarse el escrito fundacional del Cálculo, Newton usa conceptos infinitesimales de manera similar a como hacía el propio Barrow. Este trabajo, además de contener el teorema binomial y los descubrimientos de Newton relativos a series infinitas, contiene también un claro reconocimiento de la relación inversa entre problemas de cuadraturas y de tangentes. La exposición que hace Newton de esta relación fundamental es como sigue. Supone una curva y llama z al área bajo la curva hasta el punto de abscisa x (ver figura 8.34). Se supone conocida la relación entre x y z. Aunque Newton explica su método con un ejemplo, queda perfectamente claro su carácter general. El ejemplo que Newton considera es

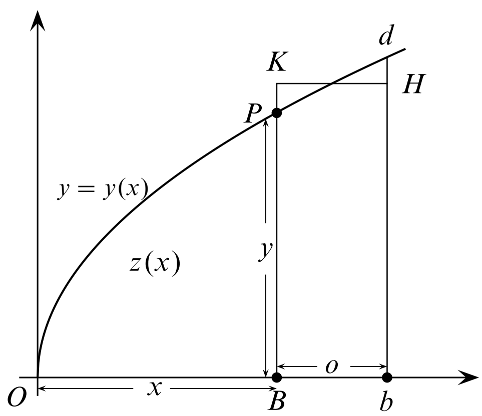


Figura 8.34. $z = z(x) =$ área OPB

$$z = \frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}} \tag{8.56}$$

Pongamos, por comodidad $r = \frac{m+n}{n}$. Newton se imagina que el punto $P = (x, y)$ se mueve a lo largo de la curva y razona como sigue. Incrementemos la abscisa x a $x + o$ donde o es una cantidad infinitesimal o *momento*. Tomemos $BK = v$ de forma que $ov =$ área $BbHK =$ área $BbPd$. El incremento del área viene dado por:

$$ov = z(x+o) - z(x) = \frac{a}{r}(x+o)^r - \frac{a}{r}x^r \tag{8.57}$$

Desarrollando en potencias

$$\frac{a}{r}(x+o)^r = \frac{a}{r}x^r(1+o/x)^r = \frac{a}{r}x^r\left(1 + r\frac{o}{x} + \frac{r(r-1)}{2}\frac{o^2}{x^2} + \frac{r(r-1)(r-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{o^3}{x^3} + \cdots\right) \tag{8.58}$$

De (8.57) y (8.58) deducimos, después de dividir por o, que:

$$v = ax^{r-1} + \frac{a(r-1)}{2}ox^{r-2} + \frac{a(r-1)(r-2)}{1\cdot 2\cdot 3}o^2x^{r-3} + \cdots$$

Si en esta igualdad suponemos que o va disminuyendo hasta llegar a ser nada, en cuyo caso v coincidirá con y, después de eliminar los términos que contienen o que desaparecen, resulta que:

$$y = ax^{r-1} = ax^{\frac{m}{n}} \tag{8.59}$$

Este es, por tanto, el valor de la ordenada de la curva en $P = (x, y)$. El proceso puede invertirse y, de hecho, ya se sabía que la cuadratura de (8.59) viene dada por (8.56).

Observemos que Newton no ha usado el significado tradicional de la integral al estilo de sus predecesores, es decir, no ha interpretado la integral como un límite de sumas de áreas infinitesimales, sino que ha probado que la expresión que proporciona la cuadratura es correcta estudiando la variación momentánea de dicha expresión. De hecho, lo que Newton ha probado es que la razón de cambio del área bajo la curva, esto es, el cociente

$$\frac{z(x+o) - z(x)}{o}$$

se hace igual a la ordenada de la curva cuando o "se hace nada". En términos actuales, la derivada de $z(x)$ es la función $y = y(x)$. La relación simétrica entre cuadraturas y derivadas queda así puesta claramente de manifiesto. Para calcular cuadraturas, basta con calcular una antiderivada, lo que llamamos una primitiva de la función $y = y(x)$.

8.8.3.2. La invención del *calculus summatorius* por Leibniz

Ya hemos comentado en el capítulo 6 (ver pg. 321) las principales ideas que guiaron a Leibniz en la invención del Cálculo:

- La creación de un simbolismo matemático que automatizara los cálculos y permitiera formular fácilmente procesos algorítmicos.
- La apreciación de que las sucesiones de diferencias pueden sumarse fácilmente, y que el proceso de formar la sucesión de diferencias y después sumarla recupera la sucesión inicial, es decir, que se trata de operaciones inversas una de la otra.
- La consideración de las curvas como polígonos de infinitos lados de longitudes infinitesimales y de las variables como sucesiones que toman valores consecutivos infinitamente próximos.

Se conservan en el archivo Leibniz en Hannover los manuscritos que contienen las investigaciones de Leibniz sobre los problemas de cuadraturas. En dichos documentos, fechados del 25 de octubre al 11 de noviembre de 1675, Leibniz investiga la posibilidad de formular simbólicamente los problemas de cuadraturas e introduce los símbolos que actualmente usamos para la integral y la diferencial. Los progresos de Leibniz se exponen de forma concisa y clara en el trabajo de H.J.M. Bos [2] que sigo muy de cerca. Algunos de los resultados de Leibniz en estos manuscritos son casos particulares de la regla de integración por partes, como, por ejemplo, la siguiente igualdad (se supone $f(0)=0$):

$$\int_0^a xf'(x)\,\mathrm{d}x = af(a) - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = a\int_0^a f'(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^a \left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \tag{8.60}$$

Por supuesto, Leibniz no la escribe así. Recuerda que la notación que usamos para la derivada se debe a J.L. Lagrange y es bastante tardía, de finales del siglo XVIII. Además, la notación que usamos para indicar los límites de integración fue introducida por J. Fourier en el primer tercio del siglo XIX. Incluso el término “integral” no se debe a Newton ni a Leibniz. Leibniz llamó *calculus differentialis*, esto es “cálculo de diferencias”, a la parte de su cálculo que se ocupa del estudio de tangentes, y *calculus summatorius*, o sea “cálculo de sumas”, a la que se ocupa de problemas de cuadraturas. Para Leibniz una integral es una suma de infinitos rectángulos infinitesimales, el símbolo que ideó para representarlas, “$\int$” tiene forma de una “s” alargada como las que en aquel tiempo se usaban en la imprenta; además, es la primera letra de la palabra latina *summa*, o sea, “suma”. Fue Johann Bernoulli quien, en 1690, sugirió llamar *calculus integralis* al cálculo de cuadraturas, de donde deriva el término “integral” que usamos actualmente.

De hecho, Leibniz obtuvo la fórmula (8.60) antes de inventar su notación para las integrales y las diferenciales. Es interesante mostrar cómo lo hizo. Para ello vamos a seguir el camino opuesto al seguido por Leibniz, modificando la notación de dicha fórmula hasta llegar a escribirla como lo hizo él.

Podemos interpretar gráficamente la igualdad (8.60) sin más que observar la figura 8.35.

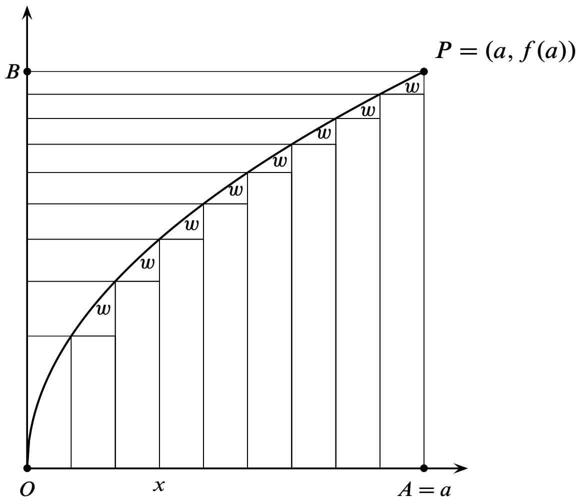


Figura 8.35. Áreas complementarias

El número $af(a)$ es el área del rectángulo $OAPB$, la integral $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ es el área de la parte de dicho rectángulo OAP que queda bajo la curva $y = f(x)$. Deducimos de (8.60) que la integral $\int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x$ es el área de la parte OBP de dicho rectángulo que queda por encima de la curva $y = f(x)$. Esta área es la suma de las áreas de rectángulos horizontales como los representados en la figura 8.35. Estos rectángulos horizontales tienen como base el valor de la abscisa correspondiente, x, y como altura la diferencia infinitamente pequeña entre dos ordenadas sucesivas, que Leibniz representa por w. Esta diferencia es lo que posteriormente se llamará diferencial de y. Podemos, pues, interpretar que $w = \mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$. Por su parte, el área de la región OAP es considerada por Leibniz como la suma de las ordenadas y. Finalmente, podemos eliminar y porque para Leibniz el valor de una variable puede obtenerse sumando sus diferencias consecutivas, por eso, y puede verse como la suma de las w. Esto equivale, en nuestra notación, a sustituir $f(x)$ por $\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ (o, al estilo de Leibniz, y por $\int \mathrm{d}y$), lo que también hemos hecho en la igualdad (8.60). La forma exacta en que Leibniz escribió la igualdad 8.60, según se lee en [2], es:

$$\text{omn.}\,\overline{xw} \sqcap \text{ult.}\,x,\,\overline{\text{omn.}\,w,} - \overline{\text{omn.}\,\text{omn.}\,w} \tag{8.61}$$

Aquí $\sqcap$ es el símbolo para la igualdad, "ult. x" significa el *ultimus* x, el último de los x, es decir, $OA = a$. El símbolo "omn." es la abreviatura de *omnes lineae*, "todas las líneas", símbolo que había sido usado por Cavalieri y que Leibniz usa con el significado de "una suma". Se usan también líneas por encima de los términos y comas donde ahora pondríamos paréntesis.

En un manuscrito posterior en algunos días, Leibniz vuelve a escribir la igualdad 8.61 en la forma:

$$\text{omn.}\,x\ell \sqcap x\,\text{omn.}\,\ell - \text{omn.}\,\text{omn.}\,\ell, \tag{8.62}$$

y observa que omn. antepuesto a una magnitud lineal como ℓ da un área; omn. antepuesto a un área como $x\ell$ da un volumen y así sucesivamente.

> [2]... Estas consideraciones de homogeneidad dimensional parecen haber sido las que sugirieron a Leibniz el usar una única letra en vez del símbolo "omn.", porque escribe a continuación: "Sería conveniente escribir "$\int$" en lugar de "omn.", de tal manera que $\int \ell$ represente omn.ℓ, es decir, la suma de todas las ℓ". Así fue como se introdujo el signo "$\int$" [...] E inmediatamente a continuación escribe Leibniz la fórmula (8.62) utilizando el nuevo formalismo:
>
> $$\int x\ell = x\int \ell - \int\int \ell \tag{8.63}$$
>
> haciendo notar que:
>
> $$\int x = \frac{x^2}{2} \quad \text{y} \quad \int x^2 = \frac{x^3}{3}$$
>
> y subrayando que estas reglas se aplican a "las series en las que la razón de las diferencias de los términos a los términos mismos es menor que cualquier cantidad dada", es decir, a las series cuyas diferencias son infinitamente pequeñas.
>
> Una líneas más adelante nos encontramos también con la introducción del símbolo "d" para la diferenciación. Aparece en el contexto de un brillante razonamiento que puede resumirse de la forma siguiente: el problema de las cuadraturas es un problema de suma de sucesiones, para lo cual hemos introducido el símbolo "$\int$" y para el que queremos elaborar un *cálculo*, es decir, un conjunto de algoritmos eficaces. Ahora bien, sumar sucesiones, es decir hallar una expresión general para $\int y$ dada la y, no es posible normalmente, pero siempre lo es encontrar una expresión para las diferencias de una sucesión dada. Así pues, el cálculo de diferencias es la operación recíproca del cálculo de sumas, y por lo tanto

> podemos esperar dominar el cálculo de sumas desarrollando su recíproco, el cálculo de diferencias. Para citar las mismas palabras de Leibniz:
>
> > Dada ℓ y su relación con x, hallar $\int \ell$. Esto se puede obtener mediante el cálculo inverso, es decir, supongamos que $\int \ell = ya$ y sea $\ell = ya/d$; entonces de la misma manera que la $\int$ aumenta las dimensiones, d las disminuirá. Pero la $\int$ representa una suma y d una diferencia, y de la y dada podemos encontrar siempre y/d o ℓ, es decir, la diferencia de las y.
>
> Así se introduce el símbolo "d" (o más bien el símbolo "$1/d$"). [...] De hecho, pronto se da cuenta de que ésta es una desventaja notacional que no viene compensada por la ventaja de la interpretación dimensional de la $\int$ y de d, y pasa a escribir "$d(ya)$" en vez de "ya/d", y de ahí en adelante son interpretadas la d y la $\int$ como símbolos adimensionales [...].
>
> En el resto del manuscrito Leibniz se dedica a explorar este nuevo simbolismo, al que traduce viejos resultados, y a investigar las reglas operacionales que rigen la $\int$ y la d.

Esta larga cita, extraída del trabajo de H.J.M. Bos *Newton, Leibniz y la tradición leibniziana* ([2]), nos da una idea de cómo llegó Leibniz a la invención del cálculo. No fueron los caminos del razonamiento lógico deductivo los seguidos por Leibniz sino los de la intuición, la conjetura, el estudio de casos particulares y su generalización ... Los mismos caminos que hoy siguen los matemáticos activos en sus trabajos de investigación. Pese a que los conceptos que maneja Leibniz son oscuros e imprecisos fue capaz de desarrollar algoritmos de cálculo eficaces y de gran poder heurístico. Como ya hemos indicado en el capítulo 6, el cálculo de Leibniz triunfó en el continente europeo gracias a los trabajos de los hermanos Bernouilli y al libro de texto del Marqués de L'Hôpital que divulgó las técnicas del cálculo leibniziano por toda Europa.