

# Capítulo 6

---

## Derivadas

---

*El arte de nombrar y de medir con exactitud aquello de lo que ni siquiera puede concebirse su existencia.*

Voltaire

### 6.1. Introducción

Los orígenes del Cálculo estuvieron motivados por el deseo de resolver diversos problemas vinculados al movimiento de los cuerpos, así como problemas de tipo geométrico de importancia en Óptica y problemas de cálculo de valores máximos y mínimos de una función dada. Simplificando, podemos destacar dos problemas principales:

- Determinar la tangente a una curva en un punto (el problema de las tangentes).
- Determinar el área encerrada por una curva (el problema de las cuadraturas).

Son los conceptos de derivada e integral, respectivamente, los que permiten resolver satisfactoriamente dichos problemas. Mientras que el concepto de integral tiene sus raíces en la antigüedad clásica, la otra idea fundamental del Cálculo, la derivada, no se formuló hasta el siglo XVII. Fue el descubrimiento efectuado por Sir Isaac Newton (1642 - 1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) de la relación entre estas dos ideas, tan dispares en apariencia, lo que inició el magnífico desarrollo del Cálculo. Si bien los trabajos de Newton y Leibniz son decisivos por sus aportaciones e influencia, no hay que olvidar que ellos son el punto culminante de un largo proceso en el que han participado científicos de la talla de Johannes Kepler (1571 - 1630), René Descartes (1596 - 1650), Pierre de Fermat (1601 - 1665), John Wallis (1616 - 1703) e Isaac Barrow (1630 - 1677) entre otros.

## 6.2. Concepto de derivada. Interpretación física y geométrica

Para entender los resultados del Cálculo diferencial es necesario, antes que nada, comprender la idea básica del mismo: el concepto de derivada. La derivada de una función puede interpretarse geoméricamente como la pendiente de una curva, y físicamente como una razón “instantánea” de cambio.

### 6.2.1. Tangente a una curva

En la primera mitad del siglo XVII no se conocían métodos generales para calcular la tangente a una curva en un punto de la misma. Este problema se presentaba con frecuencia en mecánica, en óptica y en geometría, y generalmente se resolvía, de forma geométrica, con técnicas adaptadas a cada caso particular. La dificultad está en que, siendo la tangente una recta, se precisa conocer dos puntos de la misma, o bien un punto y su pendiente, para poderla determinar.

Supongamos que queremos hallar la tangente a una curva de ecuación cartesiana  $y = f(x)$  en el punto  $(a, f(a))$ . La estrategia, usada primero por Pierre de Fermat y más tarde por Newton, consiste en aproximar la tangente por rectas secantes cuyas pendientes sí pueden calcularse directamente. En particular, consideremos la recta que une el punto  $(a, f(a))$  con un punto cercano,  $(x, f(x))$ , de la gráfica de  $f$ . Esta recta se llama una secante (recta que corta a la curva, pero no es tangente a la curva). La pendiente de esta secante es:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

dicho número suele llamarse *cociente incremental de  $f$  en  $a$* .

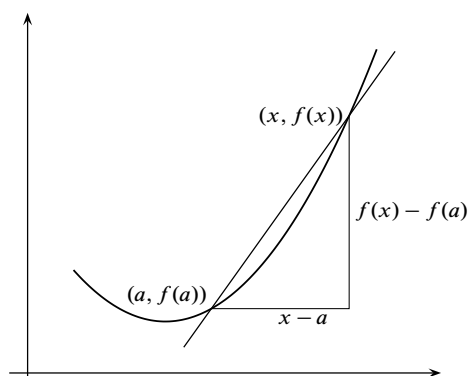


Figura 6.1. Secante

Observa que una secante es una buena aproximación de la tangente, siempre que el punto  $(x, f(x))$  esté próximo a  $(a, f(a))$ . Estas consideraciones llevan a *definir la tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(a, f(a))$  como la recta que pasa por dicho punto y cuya pendiente es igual al límite:*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

supuesto, claro está, que dicho límite exista.

### 6.2.2. Razón de cambio puntual y velocidad instantánea

Muchas leyes de la Física, la Química, la Biología o la Economía, son funciones que relacionan una variable “dependiente” y con otra variable “independiente”  $x$ , lo que suele escribirse en la forma  $y = f(x)$ . Si la variable independiente cambia de un valor inicial  $a$  a otro  $x$ ,

la variable  $y$  lo hace de  $f(a)$  a  $f(x)$ . La razón de cambio promedio de  $y = f(x)$  con respecto a  $x$  en el intervalo  $[a, x]$  es:

$$\text{Razón de cambio promedio} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Con frecuencia interesa considerar la razón de cambio en intervalos cada vez más pequeños. Esto lleva a definir lo que podemos llamar “razón de cambio puntual de  $y = f(x)$  con respecto a  $x$  en el punto  $a$ ” como:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

El ejemplo más conocido de esto que decimos es el de un móvil que se mueve a lo largo de una recta sobre la cual hemos elegido un origen. Sea  $s(t)$  la posición del móvil en el tiempo  $t$ , es decir, la distancia con signo del móvil al origen en el tiempo  $t$ . La razón de cambio promedio tiene en este caso una interpretación física natural:

$$\frac{s(a + h) - s(a)}{h}$$

Es la *velocidad media* del móvil en el intervalo de tiempo comprendido entre  $a$  y  $a + h$ . Parece intuitivo que, en cada instante, el móvil se mueve con una determinada *velocidad instantánea*. Pero no hay manera de medir directamente una velocidad instantánea; un instante quiere decir una posición en la recta: la velocidad instantánea del móvil para  $t = a$  es la velocidad que tiene cuando está en la posición  $s(a)$ . La velocidad instantánea es una abstracción de una característica física del movimiento, pero no es una magnitud que podamos observar directamente. La única definición razonable de velocidad instantánea es como la razón de cambio puntual:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(a + h) - s(a)}{h}$$

**Notación.** En lo que sigue usaremos las letras  $I, J$  para representar intervalos no vacíos de números reales.

**6.1 Definición.** Se dice que una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es **derivable en un punto**  $a \in I$ , si existe el límite:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Explícitamente,  $f$  es derivable en  $a$  si hay un número  $L \in \mathbb{R}$  verificando que para cada número  $\varepsilon > 0$  existe algún número  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in I$  con  $x \neq a$  y  $|x - a| < \delta$  se tiene que:

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L \right| \leq \varepsilon.$$

Dicho número  $L$  se llama **derivada de  $f$  en  $a$**  y lo representaremos por  $f'(a)$  (notación debida a Lagrange).

La notación de Lagrange tiene la gran ventaja de poner de manifiesto que al aplicar la operación de derivación a una función obtenemos una nueva función, que está definida en todos los puntos donde la función dada sea derivable. Es usual considerar funciones derivadas definidas en intervalos.

**6.2 Definición.** Dada una función  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en todo punto de  $I$ , la **función derivada** de  $f$  es la función  $f': I \rightarrow \mathbb{R}$  que a cada punto  $x \in I$  hace corresponder la derivada de  $f$  en dicho punto.

**6.3 Observaciones.** i) El límite  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  se puede escribir también de la forma  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ .

ii) La derivabilidad de  $f$  en un punto  $a \in I$  es una *propiedad local*, depende solamente del comportamiento de  $f$  en los puntos de  $I$  próximos al punto  $a$ . Concretamente, si  $J$  es cualquier *intervalo abierto* que contiene el punto  $a$ , se verifica que  $f$  es derivable en  $a$  si, y sólo si, la función restricción  $f|_{I \cap J}$  es derivable en  $a$  y, por supuesto, en tal caso ambas funciones tienen la misma derivada en  $a$ .

**La notación diferencial de Leibniz.** La notación  $\frac{df(x)}{dx}$  para representar la derivada de  $f$  en  $x$  es debida a Leibniz.

Leibniz interpretaba ese símbolo como un “cociente diferencial” pues él lo entendía así: como un cociente de cantidades infinitesimales, y lo manejaba como un cociente; por ejemplo, se puede multiplicar o dividir, según convenga, por  $dx$  o  $df(x)$ . En el capítulo 5 hemos visto los problemas que planteaba el uso de cantidades infinitesimales, y cómo, finalmente, a partir del último tercio del siglo XIX, fueron totalmente abandonadas. Por eso, la interpretación de Leibniz de la derivada, aunque intuitiva, no es la que se sigue en la gran mayoría de los cursos de cálculo<sup>1</sup>.

A pesar de lo dicho, es frecuente, sobre todo en libros de ingeniería, usar la notación de Leibniz y manejarla como él lo hacía. Creo que esto es útil porque la notación de Leibniz tiene una gran fuerza heurística, y no debe presentar ningún problema, siempre que no acabes creyendo que una derivada, tal como la hemos definido, es un cociente de infinitésimos. Y siempre que dicha notación se use como un mero simbolismo y no se hagan demostraciones apoyadas en su supuesta significación.

Una dificultad de la notación de Leibniz es que no es cómoda para representar la derivada en un punto concreto. Podemos entender que  $\frac{df(x)}{dx}$  es la función derivada  $f'(x)$ , pero ¿cómo indicamos la derivada en punto concreto  $a$ ? Las notaciones  $\frac{df(a)}{dx}$  y  $\frac{df(x)}{dx}(a)$  son confusas. Lo que suele hacerse es escribir:

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=a}$$

que, realmente, es una notación incómoda. Una posible mejora sería escribir  $\frac{df}{dx}(x)$  para representar  $f'(x)$ , en cuyo caso  $\frac{df}{dx}(a)$  indicaría  $f'(a)$ .

La verdad es que la mayoría de los libros de ingeniería que usan estas notaciones lo hacen sin preocuparse mucho por su significado, y esa es una causa importante de que muchas veces no se entienda bien lo que escriben. Las notaciones son importantes y hay que manejarlas

<sup>1</sup>Aunque sí en los cursos de Análisis No Estándar basados en los hiperreales de A. Robinson.

cuidadosamente. Y todavía más, cuando una notación se supone que tiene un significado casi mágico, y que por su fuerza simbólica ella sola, por sí misma, proporciona demostraciones. Volveremos a considerar este asunto más adelante.

**6.4 Definición.** Supuesto que  $f$  es derivable en  $a$ , la recta de ecuación cartesiana:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

se llama **recta tangente** a la gráfica de  $f$  en el punto  $(a, f(a))$ , y también recta tangente a  $f$  en  $x = a$ .

Cuando  $f'(a) \neq 0$ , la recta de ecuación:

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

es la **recta normal** a la gráfica de  $f$  en el punto  $(a, f(a))$ , y también recta normal a  $f$  en  $x = a$

### 6.2.2.1. Elementos de una curva relacionados con la derivada

En la figura 6.2 se han representado algunos elementos de una curva que se expresan por medio de la derivada.

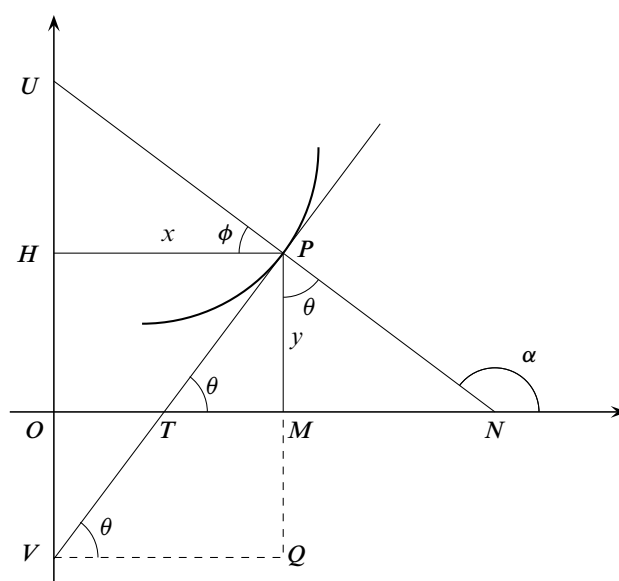


Figura 6.2. Elementos de una curva relacionados con la derivada

- La pendiente de la tangente es  $\text{tg}(\theta) = y'$ .
- La pendiente de la normal es  $\text{tg}(\alpha) = \text{tg}(\pi/2 + \theta) = -1/y'$ .
- El segmento  $\overline{TM}$  es la **subtangente**. Su longitud viene dada por  $\overline{TM} = y \cotg(\theta) = y/y'$ .
- El segmento  $\overline{MN}$  es la **subnormal**. Su longitud viene dada por  $\overline{MN} = y \text{tg}(\theta) = y y'$ .

- Los segmentos interceptados en los ejes  $OX$  y  $OY$  por la tangente son

$$\begin{cases} \overline{OT} = \overline{OM} - \overline{TM} = x - y/y' \\ \overline{OV} = \overline{PM} - \overline{PQ} = y - x \operatorname{tg}(\theta) = y - xy' \end{cases}$$

- Los segmentos interceptados en los ejes  $OX$  y  $OY$  por la normal son

$$\begin{cases} \overline{ON} = \overline{OM} + \overline{MN} = x + y \operatorname{tg}(\theta) = x + yy' \\ \overline{OU} = \overline{OH} + \overline{HU} = y + x \operatorname{tg}(\phi) = y + x \operatorname{tg}(\pi/2 - \theta) = y + xy' \end{cases}$$

### 6.2.3. Derivadas laterales

**6.5 Definición.** Se dice que  $f$  es **derivable por la izquierda en  $a$**  si existe el límite:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

El valor de dicho límite se llama la **derivada por la izquierda** de  $f$  en  $a$ .

Análogamente se dice que  $f$  es **derivable por la derecha en  $a$** , si existe el límite:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

El valor de dicho límite se llama la **derivada por la derecha** de  $f$  en  $a$ .

Teniendo en cuenta la relación que hay entre el límite de una función en un punto y los límites laterales, es claro que:

- Si  $a = \max I$ , entonces la derivabilidad de  $f$  en  $a$  es lo mismo que la derivabilidad por la izquierda de  $f$  en  $a$ .
- Si  $a = \min I$ , entonces la derivabilidad de  $f$  en  $a$  es lo mismo que la derivabilidad por la derecha de  $f$  en  $a$ .
- Si  $a$  no es un extremo de  $I$ , entonces equivalen las afirmaciones:
  - $f$  es derivable en  $a$ .
  - Las derivadas por la izquierda y por la derecha de  $f$  en  $a$  existen y coinciden.

### 6.2.4. Propiedades de las funciones derivables. Reglas de derivación

El siguiente resultado nos dice que la derivabilidad es una propiedad más fuerte que la continuidad.

**6.6 Proposición.** *Toda función derivable en un punto es continua en dicho punto.*

**Demostración.** En efecto, si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable en  $a$ , de la igualdad:

$$f(x) = f(a) + (x - a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x \in I, x \neq a)$$

se sigue que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , es decir,  $f$  es continua en  $a$ . □

**6.7 Teorema (Reglas de derivación).** Sean  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones. Se verifican las siguientes afirmaciones:

i) Las funciones suma,  $f + g$ , y producto,  $fg$ , son derivables en todo punto  $a \in I$  en el que  $f$  y  $g$  sean derivables, y las derivadas respectivas vienen dadas por:

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a); \quad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

ii) Si  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ , la función cociente  $f/g$  es derivable en todo punto  $a \in I$  en el que  $f$  y  $g$  sean derivables, en cuyo caso se verifica que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

**Demostración.** Las reglas de derivación se prueban muy fácilmente haciendo uso de las propiedades algebraicas de los límites y la definición de derivada. Es suficiente que tengas en cuenta las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(x) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x - a} &= -\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \frac{1}{g(x)g(a)} \end{aligned}$$

De la primera y segunda igualdades se deduce, tomando límites para  $x \rightarrow a$ , las reglas para la derivada de una suma y de un producto. Igualmente, de la tercera igualdad, se deduce la derivada de  $\frac{1}{g}$ , de donde, se obtiene la derivada de  $\frac{f}{g} = f \frac{1}{g}$  haciendo uso de la regla para derivar un producto. □

Como las funciones constantes tienen derivada nula en todo punto y la función identidad,  $f(x) = x$ , tiene derivada igual a 1 en todo punto, aplicando las reglas de derivación anteriores se obtiene el siguiente corolario.

**6.8 Corolario.** Las funciones polinómicas son derivables en todo punto y las funciones racionales son derivables en todo punto de su conjunto natural de definición. Además la derivada de la función polinómica  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  en cada punto  $x \in \mathbb{R}$  viene dada por:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}$$

**6.9 Teorema (Derivación de una función compuesta o regla de la cadena).** Sean  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(I) \subset J$ , y sea  $h = g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$  la función compuesta. Supongamos que  $f$  es derivable en  $a \in I$  y que  $g$  es derivable en  $f(a)$ . Entonces  $h$  es derivable en  $a$  y  $h'(a) = g'(f(a))f'(a)$ .

En particular, si  $g$  es derivable en  $J$ , la función compuesta  $h = g \circ f$  es derivable en todo punto de  $I$  donde  $f$  sea derivable.

**Demostración.** Pongamos  $b = f(a)$ . Tenemos que probar que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = g'(b)f'(a)$ . Por hipótesis se cumple que :

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g'(b)f'(a)$$

La idea de la demostración es hacer en esta igualdad la sustitución  $y = f(x)$ . Como no está garantizado por las hipótesis hechas que para  $x \neq a$  se tenga  $f(x) \neq b$ , no está justificado hacer directamente la sustitución indicada (dividir por cero está prohibido). Podemos evitar esta dificultad como sigue. Definamos la función  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$\varphi(y) = \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \quad (y \neq b), \quad \varphi(b) = g'(b)$$

Con ello la función  $\varphi$  es continua en  $b$ . Es inmediato ahora comprobar que para todo  $x \in I$  con  $x \neq a$  se verifica que:

$$\frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \varphi(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{6.1}$$

Ahora, como  $f$  es continua en  $a$  (porque es derivable en  $a$ ) y  $\varphi$  es continua en  $b = f(a)$ , se sigue que  $\varphi \circ f$  es continua en  $a$ , por lo que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(f(x)) = \varphi(f(a)) = \varphi(b) = g'(b).$$

La igualdad (6.1) nos dice ahora que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = g'(b)f'(a)$$

como queríamos probar. □

**Regla de la cadena al estilo Leibniz.** Una demostración de la regla de la cadena al “estilo Leibniz” podría ser como sigue. Por una parte, tenemos que  $y$  es función de  $x$  a través de  $g$ , es decir,  $y = g(x)$ . También tenemos que  $x$  es función de  $t$  a través de  $f$ ,  $x = f(t)$ . Entonces la variación de  $y$  respecto a  $t$  se hace por intermedio de  $x$ :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \tag{6.2}$$

Hemos acabado. Todo lo que hemos hecho ha sido multiplicar y dividir por  $dx$ .

No sé lo que pensará tú de esto, pero a mí me parecería una broma que alguien pretendiera que lo que hemos hecho es una demostración. Primero: ¿qué es  $dx$ ? Porque si es un símbolo,



no tiene sentido multiplicar y dividir por él (salvo que a esta operación se le hubiera asignado previamente un significado preciso) y si es un número ¿cómo está definido? ¿qué relación tiene ese número con la derivada? Preguntas sin respuesta. A esto me refería al decir que una notación, por sí sola, no sirve para demostrar nada.

Además, el simbolismo empleado en la igualdad (6.2) no indica dónde se evalúa cada una de las derivadas, y eso es fundamental para entender la regla de la cadena. Fíjate que la regla de la cadena nos dice que la derivada de una función compuesta de dos funciones derivables,  $h(x) = (g \circ f)(x)$ , viene dada por

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = (g' \circ f)(x)f'(x) \quad (6.3)$$

que es un producto de dos funciones,  $g'(f(x))$  y  $f'(x)$ , pero la primera de ellas  $g'(f(x)) = (g' \circ f)(x)$  es una *función compuesta*. Por eso si queremos volver a derivar en la igualdad (6.3), debemos aplicar la regla para derivar un producto y, para derivar el primer factor, debemos aplicar la regla de la cadena. Es por eso que, en la regla de la cadena, es fundamental indicar los puntos donde se evalúan las derivadas.

La notación en la igualdad (6.2) es mala porque no indica dónde se evalúa cada una de las derivadas. Pero también es mala por las razones siguientes.

- Una misma letra representa dos funciones distintas. En (6.2) la letra  $y$  aparece a la izquierda y a la derecha. A la izquierda representa la función compuesta  $y = g(f(t))$ , a la derecha representa la función  $y = g(x)$ .

- Una misma letra representa una función y una variable. La letra  $x$  en la parte derecha representa la variable en  $y = g(x)$ , y también representa la función  $x = f(t)$ .

Demasiado confuso ¿verdad? A pesar de lo dicho, la igualdad (6.2) aparece en muchos textos de matemáticas para ingenieros y en textos de física, sin ningún comentario, sin explicar lo que significa y pretendiendo que constituye por sí misma una demostración. Lo peor de todo, es que si te la enseñan así puedes creer que la entiendes, y entonces una de dos: o la entiendes de verdad, como acabo de explicarlo, o te engañas y realmente no sabes lo que crees saber. Lamentablemente, de estas dos posibilidades la más frecuente es la segunda.

Y... sin embargo, la igualdad (6.2) es muy simple y fácil de recordar, y permite conjeturar la regla de la cadena sin necesidad de demostrarla (por eso decimos que la notación de Leibniz tiene un gran valor heurístico). Mi consejo es el siguiente: puedes usar la notación de Leibniz siempre que te ayude en los cálculos, pero no debes dejarte llevar por la notación sino que debes entender lo que estás haciendo en cada momento.

**6.10 Ejemplo.** Sabiendo que  $y = \sin x$  y  $x = \cos t$ , se pide calcular la derivada de  $y$  con respecto a  $t$ .

Lo que nos piden es calcular la derivada de la función compuesta  $h(t) = \sin(\cos t)$ . Aquí  $g(x) = \sin x$ ,  $f(t) = \cos t$ . Tenemos que

$$h'(t) = g'(f(t))f'(t) = -\cos(\cos t) \sin t$$

Al estilo Leibniz:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \cos x (-\sin t) = -\cos x \sin t$$

Pero esta igualdad debe ser función de  $t$  por lo que hay que sustituir  $x = \cos t$  y se vuelve a obtener el resultado anterior. ♦

### 6.2.5. Ejercicios propuestos

---

*Empezaremos con algunas de las aplicaciones más sencillas y atractivas del cálculo diferencial. En esquema, se trata de lo siguiente: calcular la tasa de variación de una magnitud cuando se conoce la tasa de variación de otra magnitud relacionada con ella. En este tipo de ejercicios la “tasa de variación” se interpreta como una derivada  $y$ , en la mayoría de los casos, basta usar la regla de la cadena para obtener lo que se pide. Hay que elegir las unidades de acuerdo con los datos del problema; por ejemplo, si un volumen se mide en litros tendremos que medir longitudes con decímetros.*

- 176.** ¿Con qué rapidez baja el nivel del agua contenida en un depósito cilíndrico si estamos vaciándolo a razón de 3000 litros por minuto?
- 177.** Se está llenando un globo de forma esférica con gas a razón de  $50\text{cm}^3/\text{s}$ . Calcula la velocidad a la que está aumentando el radio,  $r$ , del globo cuando su valor es  $r = 5$ .
- 178.** Un punto  $P$  se mueve sobre la parte de la parábola  $x = y^2$  situada en el primer cuadrante de forma que su coordenada  $x$  está aumentando a razón de  $5\text{cm}/\text{sg}$ . Calcula la velocidad a la que el punto  $P$  se aleja del origen cuando  $x = 9$ .
- 179.** Se está llenando un depósito cónico apoyado en su vértice a razón de 9 litros por segundo. Sabiendo que la altura del depósito es de 10 metros y el radio de la tapadera de 5 metros, ¿con qué rapidez se eleva el nivel del agua cuando ha alcanzado una profundidad de 6 metros?
- 180.** El volumen de un cubo está aumentando a razón de  $70\text{cm}^3$  por minuto. ¿Con qué rapidez está aumentando el área cuando la longitud del lado es de 12cm?
- 181.** Un barco  $A$  se desplaza hacia el oeste con una velocidad de 20 millas por hora y otro barco  $B$  avanza hacia el norte a 15 millas por hora. Ambos se dirigen hacia un punto  $O$  del océano en el cual sus rutas se cruzan. Sabiendo que las distancias iniciales de los barcos  $A$  y  $B$  al punto  $O$  son, respectivamente, de 15 y de 60 millas, se pregunta: ¿A qué velocidad se acercan (o se alejan) los barcos entre sí cuando ha transcurrido una hora? ¿Y cuando han transcurrido 2 horas? ¿En qué momento están más próximos uno de otro?
- 182.** Una bola esférica de hielo se está derritiendo de forma uniforme en toda la superficie, a razón de  $50\text{cm}^3$  por minuto. ¿Con qué velocidad está disminuyendo el radio de la bola cuando este mide 15cm?
- 183.** Un hombre se aleja de una farola a razón de  $1,5\text{m}/\text{sg}$ . Sabiendo que la altura del hombre es de 1,8 metros y la de la farola de 15 metros, calcula la velocidad a la que está aumentando la sombra del hombre proyectada por la luz.
- 184.** Un faro, cuya linterna gira a 8 revoluciones por minuto, se encuentra situado a 3 kilómetros de una costa rectilínea. Calcula la velocidad con que el rayo de luz recorre la orilla cuando el ángulo de incidencia del rayo de luz con la línea de la costa es de 45 grados.

Los siguientes ejercicios son de cálculo de derivadas y de tangentes y normales a distintas curvas. Cuando en un ejercicio intervienen parámetros, debes expresar las soluciones de la forma más sencilla posible.

**185.** Calcula  $(f \circ g)'(x)$  en el valor indicado de  $x$  en los siguientes casos:

$$1. f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad g(x) = 10x^2 + x + 1, \quad x = 0$$

$$2. f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2, \quad g(x) = \frac{1}{x^2} - 1, \quad x = -1$$

**186.** Calcula en cada caso el valor de  $a$  y  $b$  en función de  $c$ , para que exista la derivada en el punto  $c$  de cada una de las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq c \\ ax + b, & x > c \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & |x| > c \\ a + bx^2, & |x| \leq c \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq c \\ ax + b, & x > c \end{cases}$$

**187.** Supongamos que  $f$  es derivable en  $a$ ,  $g$  es continua en  $a$  y  $f(a) = 0$ . Prueba que  $fg$  es derivable en  $a$ .

**188.** ¿Es cierta la igualdad  $f'(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(a+t) - f(a-t)}{2t}$ ? Justifica tu respuesta.

**189.** Supongamos que las funciones  $f$  y  $g$  y sus derivadas tienen los siguientes valores en  $x = 2$  y  $x = 3$ .

$x$	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	1/3	-3
3	3	-4	$2\pi$	5

Calcular las derivadas de las siguientes funciones en los valores dados de  $x$ :

a)  $f(x)g(x)$ ,  $x = 3$

b)  $f(x)/g(x)$ ,  $x = 3$

c)  $f(g(x))$ ,  $x = 2$

d)  $\sqrt{(f(x))^2 + (g(x))^2}$ ,  $x = 2$

**190.** Supongamos que las funciones  $f$  y  $g$  y sus derivadas tienen los valores que se indican en la tabla.

$x$	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	5	2	-5
1	3	-2	0	1
2	0	2	3	1
3	2	4	1	-6

Calcula una tabla análoga para las funciones  $f \circ g$  y  $g \circ f$ .

**191.** Calcula directamente, aplicando la definición, la derivada de  $f(x) = x^3$  en un punto genérico  $a$ .

192. Calcula directamente, aplicando la definición, la derivada de  $f(x) = \sqrt{x+7}$  en el punto  $a = -1$ .
193. Supongamos que  $f$  es una función que verifica una desigualdad del tipo  $|f(x)| \leq |x|^r$  en algún intervalo abierto que contiene a cero, donde  $r > 1$ . Prueba que  $f$  es derivable en 0.
194. Sea  $f$  una función tal que  $f(x+h) = f(x) + 3xh + h^2 - 2h$  para todos  $x, h \in \mathbb{R}$ . Calcula  $f'(0)$  y  $f'(2)$ .
195. Calcula la derivada en todo punto de la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

196. Desarrolla  $(1+x)^n$  por el binomio de Newton y deriva la igualdad resultante para probar las igualdades siguientes:

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}, \quad \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$$

197. Calcula los puntos en que la cúbica de ecuación  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , donde  $a, b, c, d$  son constantes reales, tiene tangente horizontal. Debes estudiar los distintos casos posibles.
198. Calcula un punto  $c$  por la condición de que la tangente a la parábola  $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$  en el punto  $(c, f(c))$ , sea paralela a la cuerda que une dos puntos dados  $A = (a, f(a))$  y  $B = (b, f(b))$ .
199. Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a una parábola  $f(x) = ax^2 + bx + c$  en un punto genérico  $(u, v)$  de la misma.
200. Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a una hipérbola de ecuación cartesiana  $x^2 - y^2 = 1$ , en un punto genérico  $(u, v)$  de la misma.
201. Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a una elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en un punto  $(u, v)$  de la misma.

### 6.2.6. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

**Ejercicio resuelto 79** ¿Con qué rapidez baja el nivel del agua contenida en un depósito cilíndrico si estamos vaciándolo a razón de 3000 litros por minuto?

**Solución.** Sea  $r$  el radio del cilindro y  $h$  la altura medidos en decímetros. Sea  $V(t)$  el volumen de agua, medido en litros ( $\text{dcm}^3$ ), que hay en el cilindro en el tiempo  $t$  medido en minutos. La información que nos dan es una tasa de variación

$$V(t+1) - V(t) = -3000 \quad \text{litros por minuto}$$

En este tipo de ejercicios la tasa de variación se interpreta como una derivada:  $V'(t) = -3000$ . Fíjate que  $V(t+t_0) - V(t_0) \approx V'(t_0)t$ , por lo que la interpretación es razonable. El signo negativo de la derivada es obligado ya que el volumen disminuye con el tiempo. Como el radio es constante pero la altura del agua depende del tiempo, tenemos

$$V(t) = \pi r^2 h(t)$$

y deducimos

$$V'(t) = -3000 = \pi r^2 h'(t)$$

Por tanto

$$h'(t) = -\frac{3000}{\pi r^2} \quad \text{decímetros por minuto}$$

Si expresamos las medidas en metros, entonces  $h'(t) = -\frac{3}{\pi r^2}$  metros por minuto.

Observa que lo que realmente hemos calculado es:

$$V(t+1) - V(t) = \pi r^2 (h(t+1) - h(t)) \implies h(t+1) - h(t) = \frac{V(t+1) - V(t)}{\pi r^2} = -\frac{3000}{\pi r^2}$$

que es la tasa de variación de la altura en un intervalo de 1 minuto. Pero, como ya te he dicho, en estos ejercicios se identifica la tasa de variación con una derivada, lo cual es, claro está, una aproximación. ☺

**Ejercicio resuelto 80** Un punto  $P$  se mueve sobre la parte de la parábola  $x = y^2$  situada en el primer cuadrante de forma que su coordenada  $x$  está aumentando a razón de 5cm/sg. Calcular la velocidad a la que el punto  $P$  se aleja del origen cuando  $x = 9$ .

**Solución.** Sean  $(x(t), y(t))$  las coordenadas, medidas en centímetros, del punto  $P$  en el instante  $t$  medido en segundos. Nos dicen que  $y(t) \geq 0$  y que  $x'(t) = y'(t)^2$ . La distancia del punto  $P$  al origen viene dada por  $f(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ , por lo que

$$f'(t) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}}$$

Lo que nos piden es  $f'(t_0)$  sabiendo que  $x(t_0) = 9$ . En tal caso ha de ser  $y(t_0) = 3$ . También conocemos  $x'(t) = 5$  (cm/sg). Con ello es fácil deducir el valor de  $y'(t_0) =$

$$\frac{x'(t_0)}{2y(t_0)} = \frac{5}{6}. \text{ Finalmente,}$$

$$f'(t_0) = \frac{x(t_0)x'(t_0) + y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x(t_0)^2 + y(t_0)^2}} = \frac{45 + 3(5/6)}{81 + 9} = \frac{95}{6\sqrt{10}} \text{ cm/sg}$$

☺

**Ejercicio resuelto 81** Se está llenando un depósito cónico apoyado en su vértice a razón de 9 litros por segundo. Sabiendo que la altura del depósito es de 10 metros y el radio de la tapadera de 5 metros, ¿con qué rapidez se eleva el nivel del agua cuando ha alcanzado una profundidad de 6 metros?

**Solución.** Expresaremos todas las medidas en metros. Si  $V(t)$  es el volumen de agua que hay en el depósito en el tiempo  $t$  medido en segundos, nos dicen que  $V'(t) = \frac{9}{10^3} \text{ m}^3/\text{sg}$ .

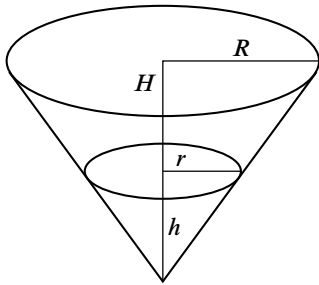


Figura 6.3. Depósito cónico

Sabemos que  $V(t) = \frac{1}{3}\pi r(t)^2 h(t)$  donde  $h(t)$  es la altura, medida desde el vértice, alcanzada por el agua en el tiempo  $t$  y  $r(t)$  es el radio de la sección transversal del cono a la distancia  $h(t)$  desde el vértice. Por semejanza de triángulos deducimos que  $\frac{r}{R} = \frac{h}{H}$ , de donde,  $r = r(t) = \frac{R}{H}h(t) = \frac{1}{2}h(t)$ .

Luego  $V(t) = \frac{1}{12}\pi h(t)^3$ , y

$$V'(t) = \frac{9}{10^3} = \frac{\pi}{4}h(t)^2 h'(t).$$

Luego, cuando  $h(t_0) = 6$ , deducimos que  $\frac{9}{10^3} = \frac{\pi}{4}36h'(t_0)$ , esto es,  $h'(t_0) = \frac{1}{10^3\pi} \text{ m/sg} \approx 1,146 \text{ m/h}$ . ☺

**Ejercicio resuelto 82** El volumen de un cubo está aumentando a razón de 70  $\text{cm}^3$  por minuto. ¿Con qué rapidez está aumentando el área cuando la longitud del lado es de 12 cm?

**Solución.** Sea  $V(t)$  el volumen del cubo, medido en centímetros cúbicos, en el tiempo  $t$ , medido en minutos. Si  $L(t)$  es la longitud en centímetros del lado en el tiempo  $t$ , tenemos que  $V(t) = L(t)^3$ , de donde,  $L'(t) = \frac{V'(t)}{3L(t)^2}$ . Como nos dicen que  $V'(t) = 70 \text{ cm}^3/\text{min}$ ,

deducimos que cuando  $L(t_0) = 12$ ,  $L'(t_0) = \frac{70}{3(12)^2}$ . El área del cubo viene dada por

$S(t) = 6L(t)^2$ , deducimos que  $S'(t_0) = 12L(t_0)L'(t_0) = \frac{70}{3} \text{ cm}^2/\text{min}$ . ☺

**Ejercicio resuelto 83** Un barco  $A$  se desplaza hacia el oeste con una velocidad de 20 millas por hora y otro barco  $B$  avanza hacia el norte a 15 millas por hora. Ambos se dirigen hacia un punto  $O$  del océano en el cual sus rutas se cruzan. Sabiendo que las distancias iniciales de los barcos  $A$  y  $B$  al punto  $O$  son, respectivamente, de 15 y de 60 millas, se pregunta: ¿A qué velocidad se acercan (o se alejan) los barcos entre sí cuando ha transcurrido una hora? ¿Y cuando han transcurrido 2 horas? ¿En qué momento están más próximos uno de otro?

**Solución.** Tomamos el punto  $O$  como origen de coordenadas, tal como se indica en la figura. Llamemos  $x(t)$  a la distancia, medida en millas, que separa el barco  $A$  de  $O$ . Nos dicen que  $x(0) = 15$  y  $x'(t) = -20$  millas por hora. Observa que como la función  $x(t)$  es decreciente su derivada debe ser negativa. Análogamente, sea  $y(t)$  la distancia que separa al barco  $B$  de  $O$ .

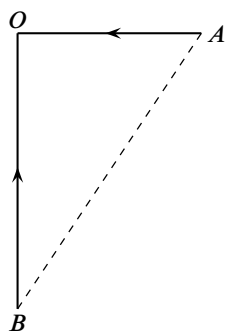


Figura 6.4. Cruce de barcos

Nos dicen que  $y(0) = 60$  y  $y'(t) = -15$  millas por hora. La distancia entre los dos barcos viene dada por  $f(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ . Tenemos

$$f'(t) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}}$$

Cuando ha pasado una hora  $x(1) = 15 - 20 = -5$ ,  $y(1) = 60 - 15 = 45$ . Deducimos que

$$f'(1) = \frac{(-5)(-20) + 45(-15)}{\sqrt{(-5)^2 + (45)^2}} = -\frac{115}{\sqrt{82}} \text{ millas/h}$$

Donde el signo negativo indica que se están acercando (la distancia entre ellos está disminuyendo).

Cuando han pasado dos horas  $x(2) = 15 - 40 = -25$ ,  $y(2) = 60 - 30 = 30$ . Deducimos que

$$f'(2) = \frac{(-25)(-20) + 30(-15)}{\sqrt{(-25)^2 + (30)^2}} = \frac{10}{\sqrt{61}} \text{ millas/h}$$

Donde el signo positivo indica que se están alejando (la distancia entre ellos está aumentando).

La distancia entre los dos barcos es mínima cuando la derivada es nula (fíjate que la derivada pasa de negativa a positiva). La condición  $f'(t_0) = 0$  equivale a la igualdad  $-20x(t_0) - 15y(t_0) = 0$ . Sustituyendo en ella  $x(t_0) = 15 - 20t_0$ ,  $y(t_0) = 60 - 15t_0$ , obtenemos  $t_0 = \frac{48}{25}$ .  $x(\frac{48}{25}) = -\frac{117}{5}$ ,  $y(\frac{48}{25}) = \frac{156}{5}$ . La distancia mínima a que se cruzan los barcos es  $f(\frac{48}{25}) = 39$  millas. ☺

**Ejercicio resuelto 84** Una bola esférica de hielo se está derritiendo de forma uniforme en toda la superficie, a razón de  $50 \text{ cm}^3$  por minuto. ¿Con qué velocidad está disminuyendo el radio de la bola cuando este mide  $15 \text{ cm}$ ?

**Solución.** El volumen de la bola en el instante  $t$  minutos viene dado por  $V(t) = \frac{4}{3}\pi r(t)^3$  centímetros cúbicos. Nos dicen que  $V'(t) = -50$ . Deducimos que  $-50 = 4\pi r(t)^2 r'(t)$ . Si  $r(t_0) = 15$ , se sigue que

$$r'(t_0) = \frac{-50}{4\pi(15)^2} = -\frac{1}{18\pi} \text{ cm/min}$$

La derivada es negativa, como debe ser, ya que el radio está disminuyendo. ☺

**Ejercicio resuelto 85** Calcula  $(f \circ g)'(x)$  en el valor indicado de  $x$  en los siguientes casos:

a)  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ ,  $g(x) = 10x^2 + x + 1$ ,  $x = 0$

$$b) f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2, \quad g(x) = \frac{1}{x^2} - 1, \quad x = -1$$

**Solución.** Este ejercicio lo puedes hacer de dos formas: calculando en caso la función compuesta  $(f \circ g)(x)$  y derivándola, o aplicando la regla de la cadena sin necesidad de calcular previamente la función compuesta. Esta segunda forma es mucho más rápida. Las derivadas que nos piden son las siguientes.

$$a) f'(x) = \frac{2-x^2}{(x^2+1)^2}, \quad g'(x) = 20x+1 \implies (f \circ g)'(0) = f'(g(0))g'(0) = f'(1)g'(0) = \frac{1}{4}. \quad \text{El otro apartado se hace igual.} \quad \odot$$

**Ejercicio resuelto 86** Calcula en cada caso el valor de  $a$  y  $b$  en función de  $c$ , para que exista la derivada en el punto  $c$  de cada una de las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq c \\ ax + b, & x > c \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & |x| > c \\ a + bx^2, & |x| \leq c \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq c \\ ax + b, & x > c \end{cases}$$

**Solución.** Consideremos la segunda de las funciones anteriores. Tenemos que  $f(x) = \frac{1}{|x|}$  para  $x < -c$  o  $x > c$ , y  $f(x) = a + bx^2$  para  $-c \leq x \leq c$ . Imponemos primero la condición de que  $f$  sea continua en  $c$ . Tenemos que  $f(c) = a + bc^2 = \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} f(x)$ ,

$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} f(x) = \frac{1}{|c|} = \frac{1}{c}$ . Debemos imponer la condición  $a + bc^2 = \frac{1}{c}$ . Impondremos también la condición de que los límites laterales en  $c$  de la derivada de  $f$  coincidan. Para  $x > c$  es  $f(x) = \frac{1}{x}$ , por lo que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{c^2}.$$

Análogamente

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} 2bx = 2bc.$$

Debemos imponer la condición  $2bc = -\frac{1}{c^2}$ . Deducimos que  $b = -\frac{1}{2c^3}$  y  $a = -bc^2 + \frac{1}{c} = \frac{3}{2c}$ .

Observa que las condiciones que hemos obtenido son necesarias para que  $f$  sea derivable en  $c$ . Pero dichas condiciones también son suficientes como consecuencia de la proposición 6.19. No es necesario, por ello, que comprobemos que, con los valores de  $a$  y de  $b$  obtenidos antes, efectivamente  $f$  es derivable en  $c$ .

Las otras dos funciones se estudian de la misma forma.  $\odot$

**Ejercicio resuelto 87** ¿Es cierta la igualdad  $f'(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(a+t) - f(a-t)}{2t}$ ? Justifica tu respuesta.

**Solución.** Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{f(a+t) - f(a-t)}{2t} &= \frac{f(a+t) - f(a)}{2t} + \frac{f(a) - f(a-t)}{2t} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} + \frac{1}{2} \frac{f(a) - f(a-t)}{-t} \end{aligned}$$



Y basta tener en cuenta que:

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(a-t) - f(a)}{-t} = f'(a)$$

☺

**Ejercicio resuelto 88** Supongamos que las funciones  $f$  y  $g$  y sus derivadas tienen los siguientes valores en  $x = 2$  y  $x = 3$ .

$x$	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	1/3	-3
3	3	-4	$2\pi$	5

Calcular las derivadas de las siguientes funciones en los valores dados de  $x$ :

- a)  $f(x)g(x)$ ,  $x = 3$       b)  $f(x)/g(x)$ ,  $x = 3$   
 c)  $f(g(x))$ ,  $x = 2$       d)  $\sqrt{(f(x))^2 + (g(x))^2}$ ,  $x = 2$

**Solución.** a)  $(fg)'(3) = f'(3)g(3) + f(3)g'(3) = -8\pi + 15$ .

b)  $\left(\frac{f}{g}\right)'(3) = \frac{f'(3)g(3) - f(3)g'(3)}{g(3)^2} = \frac{-8\pi - 15}{16}$ .

c)  $(f \circ g)'(2) = f'(g(2))g'(2) = f'(2)g'(2) = -1$ .

d)  $h(x) = \sqrt{(f(x))^2 + (g(x))^2}$ ,  $h'(2) = \frac{f'(2)f(2) + g'(2)g(2)}{\sqrt{(f(x))^2 + (g(x))^2}} = -\frac{5}{3\sqrt{17}}$ . ☺

**Ejercicio resuelto 89** Supongamos que  $f$  es una función que verifica una desigualdad del tipo  $|f(x)| \leq |x|^r$  en algún intervalo abierto que contiene a cero, donde  $r > 1$ . Prueba que  $f$  es derivable en 0.

**Solución.** La desigualdad  $|f(x)| \leq |x|^r$ , con  $r > 0$ , implica que  $f(0) = 0$ . Tenemos que

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq |x|^{r-1}$$

Como  $r - 1 > 0$ , se tiene que  $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{r-1} = 0$ , lo que, por la desigualdad anterior, implica que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = 0 \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

Luego  $f$  es derivable en 0 y  $f'(0) = 0$ .

**Ejercicio resuelto 90** Calcula la derivada en todo punto de la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

**Solución.** Para  $x \neq 0$  se verifica que  $|f(x)| = \left| x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq x^2$ . Como  $f(0) = 0$ , resulta que  $|f(x)| \leq x^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . El ejercicio anterior implica que  $f$  es derivable en

0 con  $f'(0) = 0$ . En los intervalos  $] -\infty, 0[$  y  $]0, +\infty[$  la función dada es derivable por ser producto y composición de funciones derivables en dichos intervalos, y podemos calcular su derivada con las reglas de derivación usuales:

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

Observa que esta derivada tiene una discontinuidad esencial en 0. ☺

**Ejercicio resuelto 91** Calcula los puntos en que la cúbica  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , donde  $a, b, c, d$  son constantes reales, tiene tangente horizontal. Debes estudiar los distintos casos posibles.

**Solución.** La tangente es horizontal en los puntos donde se anula la derivada, esto es, en las soluciones reales de la ecuación  $3ax^2 + 2bx + c = 0$ , las cuales viene dadas por

$$\frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}$$

Si el discriminante  $4b^2 - 12ac < 0$  no hay ninguna solución real. Si  $4b^2 - 12ac = 0$  hay una solución real doble (en la que también se anula la derivada segunda pero no se anula la derivada tercera, es un punto de inflexión). Si  $4b^2 - 12ac > 0$  hay dos puntos de tangencia horizontal. ☺

**Ejercicio resuelto 92** Calcula un punto  $c$  por la condición de que la tangente a la parábola  $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$  en el punto  $(c, f(c))$ , sea paralela a la cuerda que une dos puntos dados  $A = (a, f(a))$  y  $B = (b, f(b))$ .

**Solución.** Dos rectas en el plano son paralelas cuando tienen igual pendiente. Debemos calcular  $c$  por la condición

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \iff \frac{b^2 - a^2 + \alpha(b - a)}{b - a} = 2c + \alpha \iff b + a + \alpha = 2c + \alpha \iff c = \frac{a + b}{2}$$

☺

**Ejercicio resuelto 93** Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a una hipérbola de ecuación cartesiana  $y^2 - x^2 = 1$ , en un punto genérico  $(u, v)$  de la misma.

**Solución.** Podemos expresar  $y$  como función de  $x$ . Tenemos que  $y^2 = 1 + x^2$ , lo que da lugar a dos curvas  $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$  (la parte de la hipérbola en el semiplano superior  $y > 0$ ) y  $g(x) = -\sqrt{1 + x^2}$  (la parte de la hipérbola en el semiplano inferior  $y < 0$ ). La tangente en un punto  $(u, v)$  con  $v = f(u) > 0$  es la recta de ecuación:

$$y = f(u) + f'(u)(x - u) = v + \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}(x - u) = v + \frac{ux - u^2}{v} \iff vy - ux = 1$$

La tangente en un punto  $(u, v)$  con  $v = g(u) < 0$  es la recta de ecuación:

$$y = g(u) + g'(u)(x - u) = v - \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}(x - u) = v + \frac{ux - u^2}{v} \iff vy - ux = 1$$

En cualquier caso se obtiene la recta de ecuación  $vy - ux = 1$ .

Podemos proceder también sin necesidad de calcular  $y$  en función de  $x$ . Para ello, basta observar que si expresamos  $y$  en función de  $x$  y obtenemos  $y = \varphi(x)$  entonces se tiene que  $\varphi(x)^2 - x^2 = 1$ . Podemos derivar ahora la función  $x \mapsto \varphi(x)^2 - x^2$  con respecto a  $x$ . La derivada es  $2\varphi(x)\varphi'(x) - 2x$  y, como dicha función es constante igual a 1, su derivada debe ser nula. Luego

$$2\varphi(x)\varphi'(x) - 2x = 0 \iff \varphi'(x) = \frac{x}{\varphi(x)}$$

Por tanto la derivada en un punto  $u$  viene dada por  $\varphi'(u) = \frac{u}{v}$  donde  $v = \varphi(u)$ . En consecuencia, la tangente en el punto  $(u, v)$  es la recta de ecuación:

$$y = v + \varphi'(u)(x - u) = v + \frac{u}{v}(x - u) = v + \frac{ux - u^2}{v} \iff vy - ux = 1$$

Es decir, de esta forma, sin necesidad de calcular de forma explícita  $\varphi(x)$  (que da lugar a las dos funciones anteriores  $f(x)$  y  $g(x)$ ), podemos calcular la recta tangente sin necesidad de considerar cada caso por separado.

Para que te convenzas de que esta forma de proceder es útil, considera la hipérbola  $x^2 - y^2 = 1$ . Si ahora expresas  $y$  como función de  $x$  obtendrás cuatro curvas:  $y_1 = \sqrt{x^2 - 1}$  e  $y_2 = -\sqrt{x^2 - 1}$  para  $(x > 1)$ , y  $y_3 = \sqrt{x^2 - 1}$  e  $y_4 = -\sqrt{x^2 - 1}$  para  $(x < -1)$ . Para calcular la tangente en un punto  $(u, v)$  de dicha hipérbola no merece la pena considerar cada una de ellas por separado. Razonando como antes, se tiene que de cualquier forma que expresemos  $y = \varphi(x)$  por la condición de que  $x^2 - \varphi(x)^2 = 1$ , la derivada viene dada por  $\varphi'(x) = x/\varphi(x)$ . Por tanto la ecuación de la recta tangente en  $(u, v)$  viene dada por:

$$y = v + \varphi'(u)(x - u) = v + \frac{u}{v}(x - u) = v + \frac{ux - u^2}{v} \iff ux - vy = 1$$



**Ejercicio resuelto 94** Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a una elipse de ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  en un punto  $(u, v)$  de la misma.

**Solución.** Procediendo como en el ejercicio anterior debes obtener la recta de ecuación

$$\frac{ux}{a^2} + \frac{vy}{b^2} = 1$$



## 6.2.7. Derivabilidad de las funciones elementales

### 6.2.7.1. Derivabilidad de la exponencial y del logaritmo. Criterio de equivalencia logarítmica

Aceptaremos que las funciones logaritmo, exponencial, trigonométricas y sus inversas, son derivables, pues ahora no sería fácil probarlo. Más adelante dispondremos de herramientas para hacerlo con comodidad.

La función exponencial  $x \mapsto \exp(x) = e^x$ , ( $x \in \mathbb{R}$ ), y la función logaritmo natural  $x \mapsto \log x$ , ( $x \in \mathbb{R}^+$ ), son derivables en todo punto de sus respectivos intervalos de definición, siendo:

$$(\exp)'(x) = \exp x \quad (\forall x \in \mathbb{R}), \quad (\log)'(x) = \frac{1}{x} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^+)$$

En particular, se verifica que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x - 1} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

Pues los primeros tres límites son derivadas y el cuarto se reduce fácilmente al tercero. Deducimos también un importante resultado que permite resolver en muchos casos las indeterminaciones “ $1^\infty$ ” y “ $0^\infty$ ”.

**6.11 Teorema (Criterio de equivalencia logarítmica).** *Sea  $a \in I$ ,  $f$  y  $g$  funciones definidas en  $I \setminus \{a\}$ . Supongamos que  $f(x) > 0$  para  $x \in I \setminus \{a\}$ , y que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ . Entonces se tiene que:*

- i)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^L$  si, y sólo si,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)(f(x) - 1) = L$ .
- ii)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = +\infty$  si, y sólo si,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)(f(x) - 1) = +\infty$ .
- iii)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = 0$  si, y sólo si,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)(f(x) - 1) = -\infty$ .

**Demostración.** Sea  $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por:

$$\varphi(x) = \frac{\log x}{x - 1}, \quad (x \neq 1), \quad \varphi(1) = 1.$$

Nótese que  $\varphi$  es una función continua. Pongamos:

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x) \log(f(x))) = \exp(g(x)(f(x) - 1)\varphi(f(x)))$$

Puesto que  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(f(x)) = 1$  se sigue que:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x)(f(x) - 1)\varphi(f(x)) = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

si, y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x)(f(x) - 1) = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

lo que prueba las afirmaciones hechas. □

Las afirmaciones que se hacen en la siguiente proposición son consecuencia fácil de la regla de la cadena.

**6.12 Proposición.** Sean  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in I$  y  $g(x) > 0$  para todo  $x \in I$ . Se verifica entonces que:

i)  $f$  es derivable en  $a$  si, y sólo si, la función  $h(x) = \exp(f(x))$  es derivable en  $a$  en cuyo caso  $h'(a) = f'(a) \exp(f(a))$ .

ii)  $g$  es derivable en  $a$  si, y sólo si, la función  $\varphi(x) = \log(g(x))$  es derivable en  $a$  en cuyo caso  $\varphi'(a) = \frac{g'(a)}{g(a)}$ .

iii) Si  $f$  y  $g$  son derivables en  $a$  la función  $\psi(x) = g(x)^{f(x)}$  también es derivable en  $a$  y

$$\psi'(a) = \psi(a) \left( \log(g(a)) f'(a) + f(a) \frac{g'(a)}{g(a)} \right)$$

Te recuerdo que una forma cómoda para trabajar con funciones de la forma  $\psi(x) = g(x)^{f(x)}$  es escribirlas como exponenciales  $\psi(x) = \exp(f(x) \log(g(x)))$ .

**6.2.7.2. Derivabilidad de las funciones trigonométricas**

Las funciones seno y coseno son derivables en todo punto verificándose que:

$$\text{sen}'(x) = \text{cos } x \quad \text{cos}'(x) = -\text{sen } x.$$

En particular, se verifica que:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{cos } x - 1}{x} = 0.}$$

Las derivadas de las demás funciones trigonométricas se deducen con facilidad a partir de las derivadas del seno y del coseno.

**6.2.7.3. Derivabilidad de las funciones hiperbólicas**

Las derivadas de las funciones hiperbólicas y de sus inversas se deducen con facilidad de las derivadas del logaritmo y de la exponencial. Se comprueba sin dificultad que

$$\text{senh}'(x) = \text{cosh } x, \quad \text{cosh}'(x) = \text{senh } x$$

Las derivadas de las funciones hiperbólicas inversas son muy útiles para calcular primitivas de funciones en las que intervienen raíces cuadradas de trinomios de segundo grado.

$\text{argsenh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$\text{argsenh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$\text{argcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad x > 1$	$\text{argcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
$\text{argcosech}(x) = \text{argsenh}\left(\frac{1}{x}\right) \quad x \neq 0$	$\text{argcosech}'(x) = \frac{-1}{ x \sqrt{x^2 + 1}}$
$\text{argsech}(x) = \text{argcosh}\left(\frac{1}{x}\right) \quad 0 < x < 1$	$\text{argsech}'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{1 - x^2}}$

### 6.3. Teoremas de Rolle y del valor medio

Los resultados más útiles del cálculo diferencial se refieren a funciones derivables en todos los puntos de un intervalo. El teorema del valor medio es frecuentemente atribuido a Joseph Louis Lagrange; no obstante, fue publicado por vez primera en 1806 por el físico André Marie Ampère que justificaba el resultado usando ideas de Lagrange y suponiendo que la función derivada era continua; lo cual, como se verá enseguida, es innecesario. Quince años más tarde Augustin Cauchy volvió a probar el teorema con las mismas hipótesis. El teorema del valor medio es uno de los resultados más útiles del Cálculo. Su utilidad se debe principalmente a que dicho teorema permite acotar el incremento de una función cuando se conoce una cota de su derivada.

Michel Rolle (1652 - 1719) fue miembro de la Académie des Sciences y en 1691, estudiando un método para resolver ecuaciones, estableció, sin demostrar, el teorema que ahora lleva su nombre que, como veremos, es esencialmente equivalente al teorema del valor medio.

**6.13 Definición.** Dada una función cualquiera  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que  $f$  tiene en un punto  $a \in I$  un *máximo relativo* (resp. *mínimo relativo*) si hay algún número  $r > 0$  tal que  $]a - r, a + r[ \subset I$  y  $\forall x \in ]a - r, a + r[$  se verifica que  $f(x) \leq f(a)$  (resp.  $f(x) \geq f(a)$ ). La expresión *extremo relativo* se utiliza para referirse indistintamente a un máximo o a un mínimo relativo.

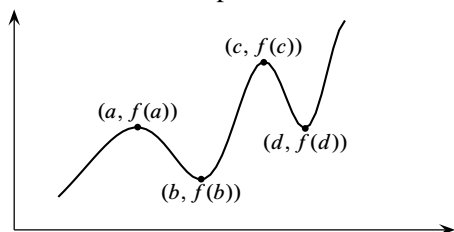


Figura 6.5. Extremos relativos

La función  $f$  tiene máximos relativos en los puntos  $a$  y  $c$  y mínimos relativos en los puntos  $b$  y  $d$ . Nótese que  $f(d) > f(a)$ , es decir, el valor de una función en un mínimo relativo puede ser mayor que el valor en un máximo relativo.

**6.14 Proposición (Condición necesaria de extremo relativo).** Sea  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in I$  y supongamos que  $f$  tiene un extremo relativo en  $a$  y que  $f$  es derivable en  $a$ . Entonces se verifica que  $f'(a) = 0$ .

**Demostración.** Supongamos que  $a$  es un máximo relativo de  $f$ . Entonces hay un número  $r > 0$  tal que  $]a - r, a + r[ \subset I$  y  $\forall x \in ]a - r, a + r[$  se verifica que  $f(x) \leq f(a)$ . Puesto que  $f$  es derivable en  $a$  y el punto  $a$  no es un extremo del intervalo  $I$ , se verifica que:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Puesto que para  $a - r < x < a$  es  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$ , se sigue que  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$ .

Puesto que para  $a < x < a + r$  es  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$ , se sigue que  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$ .

Por tanto  $f'(a) = 0$ . □

El resultado anterior es uno de los que peor se interpretan debido a que suelen olvidarse sus hipótesis, que son dos:



- Que el punto  $a$  sea un extremo relativo de  $f$ .
- Que  $f$  sea derivable en  $a$ .

La expresión “como  $f$  tiene un extremo en  $a$ , su derivada debe anularse en  $a$ ” no es, en general, correcta. Los siguientes ejemplos lo dejan bien claro:

- La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = |x|$ , tiene claramente un mínimo relativo (y también absoluto) en 0, pero no es derivable en 0, por lo que no tiene ningún sentido decir que su derivada se anula en 0.
- La función  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^3$ , es estrictamente creciente, es derivable en todo punto y su derivada solamente se anula en  $x = 0$ . Tiene un mínimo absoluto en  $-1$  y un máximo absoluto en 1; dichos puntos no son extremos relativos de la función. Este ejemplo también muestra que la condición necesaria de extremo relativo no es suficiente.

Los puntos en los que se anula la derivada de una función se llaman **puntos críticos** o **puntos singulares** de dicha función.

**6.15 Teorema (Teorema de Rolle).** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $[a, b]$ , derivable en  $]a, b[$  y verificando que  $f(a) = f(b)$ . Entonces existe algún punto  $c \in ]a, b[$  tal que  $f'(c) = 0$ .

**Demostración.** La continuidad de  $f$  en  $[a, b]$  garantiza que  $f$  alcanza en un punto  $u \in [a, b]$  un mínimo absoluto y en un punto  $v \in [a, b]$  un máximo absoluto. Si  $\{u, v\} = \{a, b\}$ , entonces será

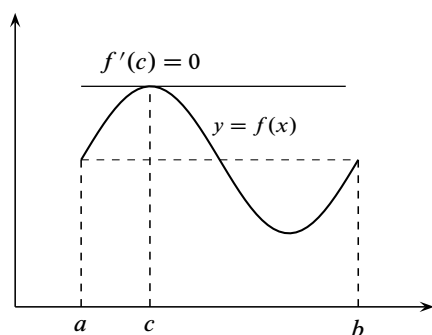


Figura 6.6. Teorema de Rolle

$f(u) = f(v)$  y, por tanto  $f$  es constante en  $[a, b]$  y, en consecuencia, su derivada es nula. Si  $\{u, v\} \neq \{a, b\}$ , entonces alguno de los puntos  $u, v$  está en  $]a, b[$  y es un extremo relativo de  $f$  por lo que, en virtud de la proposición anterior, concluimos que la derivada de  $f$  se anula en algún punto de  $]a, b[$ .  $\square$

**Observaciones.** Observa que la demostración del teorema de Rolle que hemos dado, que es la usual, depende de forma esencial del teorema de Weierstrass 4.29 que garantiza la existencia de valores extremos absolutos.

El enunciado anterior del teorema de Rolle es el usual; pero, en cierto sentido, es “demasiado preciso”. Esto se debe a que las hipótesis que se consideran en el teorema son las mínimas indispensables. Por ejemplo, si consideramos la función  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ , cuya gráfica es la mitad superior de la circunferencia unidad, se tiene que  $f$  es continua en  $[-1, 1]$ , derivable en  $] - 1, 1[$  y, claro está, su derivada se anula en  $x = 0$ . Esta función no es derivable en los extremos del intervalo. Pero la situación más corriente es que la función sea derivable en todo el intervalo, incluidos sus extremos. Además, es frecuente

trabajar con funciones definidas en intervalos abiertos que no tienen puntos extremos, en cuyo caso debemos elegir un intervalo apropiado para aplicar el teorema.

El teorema de Rolle se usa para estudiar raíces de ecuaciones, pues permite relacionar los ceros de una función derivable con los de su derivada. Un cero de una función es, naturalmente, un punto en el que la función se anula.

**6.16 Corolario.** *a) Entre cada dos ceros de una función derivable en un intervalo hay por lo menos un cero de su derivada.*

*b) Entre cada dos ceros consecutivos de la derivada de una función en un intervalo, solamente puede haber, como mucho, un cero de la función; o puede que la función no tenga ningún cero entre los dos ceros de su derivada.*

**Demostración.** *a)* Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable en un intervalo  $I$ . Sean  $a, b \in I$  tales que  $f(a) = f(b) = 0$ . El teorema de Rolle nos dice que hay algún punto entre  $a$  y  $b$  en el que se anula la derivada de  $f$ .

*b)* Supongamos que  $s, t$  son ceros consecutivos de la derivada de  $f$ , esto es,  $f'(s) = f'(t) = 0$  y  $f'$  no se anula en ningún punto comprendido entre  $s$  y  $t$ . En tal caso puede ocurrir que  $f$  no tenga ningún cero comprendido entre  $s$  y  $t$  o que tenga solamente uno. No puede ocurrir que  $f$  tenga más de un cero entre  $s$  y  $t$ , pues en tal caso su derivada tendría que anularse en algún punto comprendido entre  $s$  y  $t$ , cosa que no sucede.  $\square$

El apartado *b)* suele expresarse diciendo que *los ceros de la derivada separan los ceros de la función*. Debes entender bien lo que se afirma en *b)*. Por ejemplo, puede ocurrir que la derivada se anule en varios puntos y la función no se anule nunca: la función  $f(x) = 2 + \sin x$  no se anula nunca, pero su derivada  $f'(x) = \cos x$  tiene infinitos ceros.

**6.17 Teorema (Teorema del valor medio).** *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $]a, b[$ . Entonces existe algún punto  $c \in ]a, b[$  tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (6.4)$$

**Demostración.** Definamos una función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  por  $g(x) = f(x) + \lambda x$  donde  $\lambda$  lo elegiremos por la condición de que  $g(a) = g(b)$ , es decir:

$$f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b \implies \lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Podemos aplicar ahora el teorema de Rolle en el intervalo  $[a, b]$  a la función

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$$

para deducir que hay un punto  $c \in ]a, b[$  tal que

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

lo que concluye la demostración.  $\square$



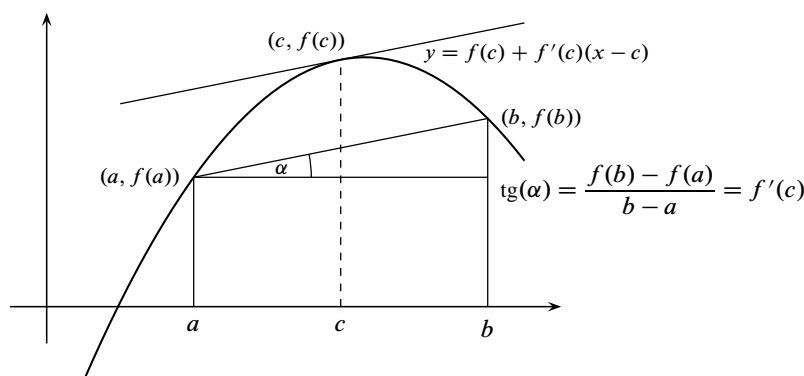


Figura 6.7. Teorema del valor medio

Lo que afirma el teorema del valor medio es que el incremento medio de una función en un intervalo es igual a su derivada o “incremento puntual” en algún punto del mismo. Geométricamente: la tangente a la gráfica de  $f$  en algún punto  $c$  comprendido entre  $a$  y  $b$  es paralela a la cuerda que une los puntos  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$ .

Observa que el teorema del valor medio lo hemos deducido del teorema de Rolle, pero es evidente que el teorema de Rolle puede deducirse del teorema del valor medio. Son dos resultados equivalentes. En lo que sigue nos referiremos al teorema del valor medio por las siglas TVM.

### 6.3.1. Consecuencias del teorema del valor medio

**6.18 Proposición.** Sea  $f$  una función derivable en un intervalo  $I$ , y supongamos que existe  $M \geq 0$  tal que  $|f'(x)| \leq M$  para todo  $x \in I$ . Entonces se verifica que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \quad \text{para todos } x, y \in I \tag{6.5}$$

En particular, si  $f'(x) = 0$  para todo  $x \in I$  entonces  $f$  es constante en  $I$ .

**Demostración.** Dados  $x, y \in I$ , el TVM aplicado a la función  $f$  en el intervalo de extremos  $x$  e  $y$  nos dice que hay algún punto  $z$  en dicho intervalo tal que  $f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$ . Tomando valores absolutos tenemos

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)||x - y| \leq M|x - y|$$

Si la derivada de  $f$  es idénticamente nula en  $I$  podemos tomar  $M = 0$  en la desigualdad (6.5) para obtener que  $f(x) = f(y)$  para todos  $x, y \in I$ , lo que nos dice que  $f$  es constante en  $I$ .  $\square$

El resultado anterior, además de su interés teórico, es muy útil para probar desigualdades.

En la proposición anterior la hipótesis de que  $I$  es un intervalo es esencial. La función  $f: ]0, 1[ \cup ]1, 2[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 1$  si  $0 < x < 1$  y  $f(x) = 2$  si  $1 < x < 2$ , es derivable en todo punto con derivada nula y no es constante.

**6.19 Proposición.** Sea  $I$  un intervalo,  $a \in I$  y  $f$  una función continua en  $I$  y derivable en  $I \setminus \{a\}$ . Si la función derivada  $f'$  tiene límite por la derecha (resp. por la izquierda) en  $a$

entonces  $f$  es derivable por la derecha (resp. por la izquierda) en  $a$  con derivada por la derecha (resp. por la izquierda) en  $a$  igual al valor de dicho límite. En particular, si existe  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = L$  entonces  $f$  es derivable en  $a$  y  $f'(a) = L$ .

**Demostración.** Supongamos  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f'(x) = L$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $]a - \delta, a[ \subset I$  y para  $a - \delta < x < a$  se verifica que  $|f'(x) - L| < \varepsilon$ . Dado  $x \in ]a - \delta, a[$ , podemos aplicar el teorema del valor medio a la función  $f$  en el intervalo  $[x, a]$  y deducimos que hay algún punto  $c \in ]x, a[ \subset ]a - \delta, a[$  tal que  $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$  y por tanto:

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L \right| = |f'(c) - L| < \varepsilon.$$

Lo que prueba que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L,$$

es decir,  $f$  es derivable por la izquierda en  $a$  y la derivada por la izquierda de  $f$  en  $a$  es igual a  $L$ .

El resto de las afirmaciones del enunciado se deducen fácilmente de lo anterior. □

La proposición anterior tiene una interesante consecuencia que, entre otras cosas, nos informa de que no toda función puede ser la derivada de otra.

**6.20 Corolario.** *Las funciones derivadas definidas en intervalos no tienen discontinuidades evitables ni de salto.*

**6.21 Proposición (Derivabilidad y monotonía).** *Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en todo punto del intervalo  $I$  con la posible excepción de los puntos extremos de  $I$ . Se verifica entonces que  $f$  es creciente (resp. decreciente) en  $I$  si, y sólo si,  $f'(x) \geq 0$  (resp.  $f'(x) \leq 0$ ) para todo  $x \in I$ .*

**Demostración.** Supongamos que  $f'(x) \geq 0$  para todo  $x \in I$ . Dados dos puntos  $u, v \in I$  con  $u < v$ , podemos aplicar el teorema del valor medio a  $f$  en el intervalo  $[u, v]$  para deducir que existe  $c \in ]u, v[$  tal que  $f(v) - f(u) = f'(c)(v - u) \geq 0$ , por lo que  $f(u) \leq f(v)$ , es decir  $f$  es creciente.

Recíprocamente, si  $f$  es creciente en  $I$  entonces para todos  $a, x \in I$ , con  $x \neq a$ , se tiene que  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$ , lo que implica que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \geq 0.$$

□

Este resultado es muy útil para probar desigualdades entre funciones. Muchos problemas de desigualdades responden al siguiente esquema.

**6.22 Estrategia.** Supuesto que  $f$  y  $g$  son funciones derivables, para probar que  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \geq a$ , se hace lo siguiente:

- Se define  $h(x) = g(x) - f(x)$  y se comprueba que  $h(a) = 0$ .
- Se comprueba que  $h'(x) \geq 0$  para todo  $x > a$ .

Esta última desigualdad implica que  $h$  es creciente en  $[a, +\infty[$  y, como  $h(a)=0$ , concluimos que  $h(x) \geq 0$ , es decir,  $g(x) - f(x) \geq 0$ , para todo  $x > a$ .

Naturalmente, los detalles pueden cambiar. Puede que el punto  $a$  debas elegirlo tú. Es una estrategia que tiene éxito cuando la desigualdad  $h'(x) \geq 0$  es más fácil que la inicial. Puede ocurrir que esta desigualdad siga siendo complicada; entonces podemos aplicarle a ella el mismo procedimiento, comprobamos que  $h'(a) = 0$  y que  $h''(x) \geq 0$  para todo  $x > a$ , lo que implica que  $h'$  es creciente en  $[a, +\infty[$  y, como  $h'(a) = 0$ , concluimos que  $h'(x) \geq 0$  para todo  $x > a$ .

De la proposición (6.21) se deduce el siguiente resultado de extremo absoluto.

**6.23 Proposición (Criterio de extremo absoluto).** *Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$  y derivable en todo punto de  $]a, b[$  con la posible excepción de un punto  $c \in ]a, b[$ .*

- a) *Si  $f'(x) \geq 0$  para todo  $x \in ]a, c[$  y  $f'(x) \leq 0$  para todo  $x \in ]c, b[$ , entonces  $f$  alcanza en  $c$  un máximo absoluto en  $[a, b]$ .*
- b) *Si  $f'(x) \leq 0$  para todo  $x \in ]a, c[$  y  $f'(x) \geq 0$  para todo  $x \in ]c, b[$ , entonces  $f$  alcanza en  $c$  un mínimo absoluto en  $[a, b]$ .*

**Demostración.** a) Las hipótesis hechas implican, en virtud de la proposición (6.21), que  $f$  es creciente en  $[a, c]$  y decreciente en  $[c, b]$ . Por tanto, se verifica que  $f(x) \leq f(c)$  para todo  $x \in [a, b]$ .

La demostración del apartado b) se hace de la misma forma. □

El anterior criterio de extremo absoluto suele aplicarse en puntos donde la derivada se anula. Aunque el resultado anterior está enunciado en términos de extremos absolutos, está claro que si se aplica a un pequeño intervalo contenido en un intervalo más grande, donde la función está definida, dicho resultado proporciona en tal caso un criterio de extremo relativo.

**6.24 Teorema.** *Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en el intervalo  $I$  con  $f'(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ . Se verifica entonces una de las dos afirmaciones siguientes:*

- *$f$  es estrictamente creciente y  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in I$ .*
- *$f$  es estrictamente decreciente y  $f'(x) < 0$  para todo  $x \in I$ .*

**Demostración.** Dados dos puntos  $u, v \in I$  con  $u \neq v$ , podemos razonar como antes para obtener que existe  $c \in ]u, v[$  tal que  $f(v) - f(u) = f'(c)(v - u) \neq 0$ . Hemos probado así que  $f$  es inyectiva en el intervalo  $I$ . Como, además  $f$  es continua en  $I$  (por ser derivable), podemos usar el resultado 4.26 del capítulo 4, para deducir que  $f$  es estrictamente monótona en  $I$ . Es suficiente tener en cuenta ahora la proposición anterior para concluir la demostración. □

Es importante advertir que el resultado anterior nos dice que si una función  $f$  es derivable en un intervalo y la derivada  $f'$  toma valores positivos y negativos, entonces  $f'$  se anula en algún punto. Este resultado recuerda mucho al teorema de los ceros de Bolzano para funciones continuas en un intervalo, con una notable diferencia: aquí no exigimos que la función derivada  $f'$  sea continua. De hecho, se verifica el siguiente resultado que es un teorema del valor intermedio para funciones derivadas, en el que no se supone que la derivada sea continua.

**6.25 Teorema (Propiedad del valor intermedio para derivadas).** *Sea  $\varphi$  una función definida en un intervalo  $I$  que es la derivada de alguna función en dicho intervalo. Entonces se verifica que la imagen por  $\varphi$  de  $I$ ,  $\varphi(I)$ , es un intervalo.*

**Demostración.** Por hipótesis hay una función derivable  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(x) = f'(x)$  para todo  $x \in I$ . Sean  $u = \varphi(a)$ ,  $v = \varphi(b)$  dos valores que toma la función  $\varphi$ , y supongamos  $u < v$ . Dado  $\lambda \in ]u, v[$ , definimos la función  $g(x) = f(x) - \lambda x$ . Tenemos entonces  $g'(a) = \varphi(a) - \lambda = u - \lambda < 0$  y  $g'(b) = \varphi(b) - \lambda = v - \lambda > 0$ . Por tanto, la derivada de  $g$  toma valores positivos y negativos en el intervalo  $I$  y, por el teorema 6.24, tiene que anularse, es decir, existe algún punto  $c \in I$  tal que  $g'(c) = \varphi(c) - \lambda = 0$ , esto es,  $\varphi(c) = \lambda$ . Hemos probado así que si  $\varphi$  toma dos valores también toma todos los comprendidos entre ellos dos, es decir, que  $\varphi(I)$  es un intervalo.  $\square$

**6.26 Proposición (Derivación de la función inversa).** *Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en el intervalo  $I$  con derivada  $f'(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ . Entonces  $f$  es una biyección de  $I$  sobre el intervalo  $J = f(I)$ , y la función inversa  $f^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable en  $J$  siendo*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad (y \in J). \tag{6.6}$$

**Demostración.** Las hipótesis hechas implican que  $f$  es estrictamente monótona y continua; por tanto es una biyección de  $I$  sobre  $J = f(I)$ , y la función inversa  $f^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $J$  (4.25). Sea  $b = f(a) \in J$ . Puesto que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)},$$

la función  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$h(x) = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} \quad \text{para } x \neq a, \quad h(a) = \frac{1}{f'(a)}$$

es continua en  $I$ . Como  $f^{-1}$  es continua en  $J$ , deducimos que  $h \circ f^{-1}$  es continua en  $J$ , por lo que, en particular,  $\lim_{y \rightarrow b} h(f^{-1}(y)) = h(f^{-1}(b)) = h(a)$ . Pero, para todo  $y \in J$ , con  $y \neq b$  es

$$h(f^{-1}(y)) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}.$$

Concluimos así que

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}$$

$\square$

La mejor forma de recordar la igualdad (6.6) es derivar por la regla de la cadena la identidad  $(f \circ f^{-1})(y) = y$ , con lo que se obtiene  $f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) = 1$ , de donde puede despejarse  $(f^{-1})'(y)$ .

**6.27 Ejemplo (Derivabilidad de las funciones trigonométricas inversas).** La función tangente es una biyección derivable del intervalo  $] - \pi/2, \pi/2[$  sobre  $\mathbb{R}$ , cuya derivada no se anula. El teorema anterior nos dice que la función inversa, es decir, la función arcotangente es derivable en  $\mathbb{R}$  y su derivada podemos calcularla derivando la identidad  $(\text{tg} \circ \text{arc tg})(x) = x$ , con lo que obtenemos

$$(1 + \text{tg}^2(\text{arc tg } x)) \text{arc tg}'(x) = 1 \iff (1 + x^2) \text{arc tg}'(x) = 1 \iff \text{arc tg}'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Análogamente, la función seno es una biyección derivable del intervalo  $] - \pi/2, \pi/2[$  sobre  $] - 1, 1[$  cuya derivada no se anula. El teorema anterior nos dice que la función inversa, es decir, la función arcoseno es derivable en  $] - 1, 1[$  y su derivada podemos calcularla derivando la identidad  $(\text{sen} \circ \text{arc sen})(x) = x$ , con lo que obtenemos:

$$\cos(\text{arc sen } x) \text{arc sen}'(x) = 1 \iff \sqrt{1 - x^2} \text{arc sen}'(x) = 1 \iff \text{arc sen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$



**6.28 Teorema (Teorema del valor medio generalizado).** Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas en  $[a, b]$  y derivables en  $]a, b[$ . Entonces existe algún punto  $c \in ]a, b[$  tal que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

**Demostración.** Definimos una función  $h(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$  donde  $\lambda, \mu$  son números que se eligen de forma que  $h(a) = h(b)$ , esto es,  $\lambda(f(a) - f(b)) = \mu(g(b) - g(a))$ . Basta para ello tomar  $\lambda = g(b) - g(a)$ ,  $\mu = f(a) - f(b)$ . El teorema del Rolle, aplicado a la función  $h(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x)$ , nos dice que hay un punto  $c \in ]a, b[$  tal que  $h'(c) = 0$ , lo que concluye la demostración. □

### 6.3.2. Reglas de L'Hôpital

Guillaume François Antoine de L'Hôpital (1661-1704), publicó anónimamente en 1696 el primer libro de texto sobre cálculo diferencial, el cual tuvo gran éxito e influencia durante el siglo XVIII. En él aparecen los resultados que hoy llevan su nombre, que permiten resolver en muchos casos indeterminaciones de la forma  $\frac{0}{0}$  o  $\frac{\infty}{\infty}$ , que se presentan frecuentemente al estudiar el límite de un cociente de dos funciones. Si bien L'Hôpital era un escritor excepcionalmente claro y eficaz, las llamadas "reglas de L'Hôpital" no se deben a él sino a su maestro Jean Bernouilli (1667-1748). Las distintas formas de las reglas de L'Hôpital pueden resumirse en el siguiente enunciado.

**6.29 Teorema (Jean Bernouilli).** Sean  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ,  $f$  y  $g$  funciones derivables en  $]a, b[$  con  $g'(x) \neq 0$ , para todo  $x \in ]a, b[$ . Sea  $\alpha \in \{a, b\}$  y supongamos que se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

a)  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow \alpha} |g(x)| = +\infty$

Y además

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

Entonces se verifica que

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

**Demostración.** Antes de dar una demostración al uso vamos a explicar por qué la hipótesis de que el cociente de las derivadas tiene límite implica que también lo tiene el cociente de las funciones. Para fijar ideas, consideremos el caso en que  $\alpha = a$  es un número real y  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0$ . Definamos  $f(a) = g(a) = 0$ .

Observa que, aunque el punto  $(g(x), f(x))$  recorre una trayectoria en el plano que termina en  $(0, 0)$  cuando  $x = a$ , el límite  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  no tiene por qué existir. Ello se debe a que la proximidad a  $(0, 0)$  del punto  $(g(x), f(x))$  no proporciona ninguna información sobre el valor del cociente  $\frac{f(x)}{g(x)}$ . Baste considerar que en un círculo centrado en  $(0, 0)$  de radio tan pequeño como queramos, hay puntos  $(u, v)$  para los que el cociente  $\frac{u}{v}$  puede tomar cualquier valor.

Geoméricamente, podemos interpretar  $\frac{f(x)}{g(x)}$  como la pendiente de la recta que une  $(0, 0)$  con el punto  $(g(x), f(x))$ . Si imaginamos que el punto  $\gamma(x) = (g(x), f(x))$  recorre una curva  $\Gamma$  en el plano que termina en  $(0, 0)$ , parece evidente que, cuando dicho punto está muy próximo a  $(0, 0)$ , el número  $\frac{f(x)}{g(x)}$  está muy próximo a la pendiente de la tangente a  $\Gamma$  en  $(g(x), f(x))$ . La figura 6.8 puede servir de ayuda.

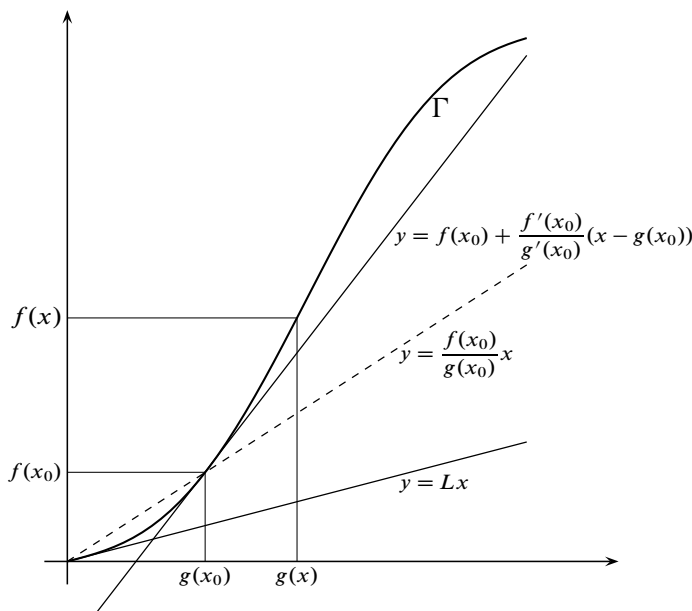


Figura 6.8. Regla de L'Hôpital

Fíjate que como  $f$  y  $g$  no se suponen derivables en  $x = a$ , no está garantizado que  $\Gamma$  tenga tangente en el origen, es decir, para  $x = a$ . Podemos, sin embargo, calcular la tangente a  $\Gamma$  en

puntos distintos del origen. Para ello podemos usar que el vector tangente a  $\Gamma$  en un punto  $x_0$  es  $\gamma'(x_0) = (g'(x_0), f'(x_0))$ , y la recta tangente en dicho punto tiene las ecuaciones paramétricas:

$$(x, y) = (g(x_0), f(x_0)) + \lambda(g'(x_0), f'(x_0))$$

Eliminando el parámetro  $\lambda$  en esta ecuación obtenemos la ecuación cartesiana de la tangente que resulta ser

$$y = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}(x - g(x_0))$$

Lo que nos dice que la pendiente de dicha tangente es  $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ . En consecuencia, la pendiente de la tangente a  $\Gamma$  en un punto genérico  $x \neq a$  es  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

A la vista de lo anterior, se comprende ahora que si exigimos que  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  tenga límite  $L$  en el punto  $a$ , estamos obligando a que el cociente  $\frac{f(x)}{g(x)}$  también tenga límite igual a  $L$  en  $a$ . En la figura se ha supuesto que  $L$  es un número real, pero está claro que puede suponerse también  $L = \pm\infty$  lo que corresponde a los casos en que  $\Gamma$  tiene tangente vertical en el origen.

Daremos ahora una demostración formal del teorema en dos casos particulares.

**Caso 1** (Primera regla de L'Hôpital).

Supongamos que  $\alpha = a$  y  $L$  son números reales y  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ . Definamos  $f(a) = g(a) = 0$ . Dado  $x \in I$ ,  $x \neq a$ , aplicamos el teorema del valor medio generalizado a las funciones  $f$  y  $g$  en el intervalo  $[a, x]$ , para obtener  $c_x \in ]a, x[$  tal que

$$(f(x) - f(a))g'(c_x) = (g(x) - g(a))f'(c_x)$$

es decir,  $f(x)g'(c_x) = g(x)f'(c_x)$ . Las hipótesis hechas implican que  $g$  es estrictamente monótona en  $I$  y, como  $g(a) = 0$ , deducimos que  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ . Obtenemos así que:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}. \quad (6.7)$$

Por hipótesis, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para  $a < t < a + \delta$  es  $\left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - L \right| < \varepsilon$ . Deducimos de la igualdad (6.7) que si  $a < x < a + \delta$  se tiene que:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon.$$

Hemos probado así que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = L$ . Los casos en que  $L = \pm\infty$  se tratan de la misma forma.

**Caso 2** (Segunda Regla de L'Hôpital).

Supongamos que  $\alpha = a$  y  $L$  son números reales y  $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$ . Esta última condición implica que  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$  suficientemente próximo al punto  $a$ , y por el carácter local del límite no es restrictivo suponer que  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ . Nótese también que las hipótesis hechas implican que  $g$  es inyectiva en  $I$ . La hipótesis  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x) = L$ , nos

dice que dado  $\varepsilon > 0$ , hay un número (fijo en lo que sigue)  $c \in I$ , tal que para  $a < t \leq c$  se verifica que:

$$\left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - L \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (6.8)$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$ , hay un número  $\delta > 0$  tal que  $a + \delta \leq c$  y para  $a < x < a + \delta$  se verifica que:

$$\frac{|g(c)|}{|g(x)|} < 1, \quad \frac{|f(c) - Lg(c)|}{|g(x)|} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (6.9)$$

Dado  $a < x < a + \delta$  aplicamos el teorema del valor medio generalizado para obtener un punto  $c_x \in ]x, c[$  tal que

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Teniendo en cuenta la identidad:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - L &= \left( \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} - L \right) \left( 1 - \frac{g(c)}{g(x)} \right) + \frac{f(c) - Lg(c)}{g(x)} \\ &= \left( \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - L \right) \left( 1 - \frac{g(c)}{g(x)} \right) + \frac{f(c) - Lg(c)}{g(x)} \end{aligned}$$

deducimos, en virtud de (6.8) y (6.9), que para todo  $x \in ]a, a + \delta[$  se verifica que:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} 2 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hemos probado así que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = L$ . Los casos en que  $L = \pm\infty$  se tratan de la misma forma.

Los demás casos tienen un tratamiento similar y también pueden reducirse a los ya estudiados sin más que invertir la variable.  $\square$

Nótese que, tal y como las hemos enunciado, las reglas de L'Hôpital permiten calcular límites por la derecha y por la izquierda en un punto y, por tanto, podemos usarlas para calcular el límite en un punto de un intervalo que no sea extremo del mismo.

## 6.4. Derivadas sucesivas. Polinomios de Taylor

Sea  $f$  una función derivable en un intervalo  $I$ . Si la función derivada  $f'$  también es derivable en  $I$  decimos que  $f$  es *dos veces derivable* en  $I$  y la función  $f'' := (f')'$  se llama *derivada segunda* de  $f$  en  $I$ . En general, si  $n \in \mathbb{N}$ , decimos que  $f$  es  $n + 1$  veces derivable en  $I$  si  $f$  es  $n$  veces derivable en  $I$  y la función derivada de orden  $n$  de  $f$  en  $I$ , que representaremos por  $f^{(n)}$ , es derivable en  $I$ ; en cuyo caso la función  $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$  se llama *derivada de orden  $n + 1$*  de  $f$  en  $I$ . Si  $n$  es un número natural,  $n \geq 2$ , decimos que  $f$  es  $n$  veces derivable en un punto  $a \in I$ , si  $f$  es  $n - 1$  veces derivable en  $I$  y la función  $f^{(n-1)}$  es derivable en  $a$ . Se dice que  $f$  es una función de clase  $C^n$  en  $I$  si  $f$  es  $n$  veces derivable  $I$  y la función  $f^{(n)}$  es continua en  $I$ . Se dice que  $f$  es una función de clase  $C^\infty$  en  $I$  si  $f$  tiene derivadas de todos órdenes en  $I$ . Por convenio se define  $f^{(0)} = f$ .



Observemos que una función  $f$  derivable en un punto  $a$  puede ser aproximada localmente por una función polinómica  $P(x)$  de grado  $\leq 1$ , de forma que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{x - a} = 0.$$

Basta para ello definir  $P(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ , con lo que la igualdad anterior no es otra cosa que la definición de derivada de  $f$  en  $a$ .

Es natural preguntarse si, en el caso de que  $f$  sea derivable  $n$  veces en  $a$ , existirá una función polinómica  $P$  de grado  $\leq n$ , de forma que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Nótese que, en el caso  $n = 1$ , el polinomio  $P(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$  es el único polinomio de grado  $\leq 1$  que cumple que  $P(a) = f(a)$  y  $P'(a) = f'(a)$ . En el caso general, parece razonable hallar un polinomio  $P$  de grado  $\leq n$  cuyo valor y el valor de sus derivadas, hasta la del orden  $n$ , en el punto  $a$  coincida con el valor de  $f$  y de las respectivas derivadas de  $f$  en  $a$ . Sea  $P(x)$  un polinomio genérico de grado menor o igual que  $n$  y pongamos  $Q(x) = P(x + a)$ . Notemos que  $Q^{(k)}(x) = P^{(k)}(x + a)$  para  $k = 0, 1, \dots, n$ . Sea  $Q(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ . Calcularemos los coeficientes de  $Q$  por la condición de que  $Q^{(k)}(0) = f^{(k)}(a)$ . Con ello se obtiene fácilmente que  $a_k = f^{(k)}(a)/k!$ . Resulta así que el polinomio  $P$  dado por:

$$P(x) = Q(x - a) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

verifica que  $P^{(k)}(a) = Q^{(k)}(0) = f^{(k)}(a)$  para  $k = 0, 1, \dots, n$  y es el único polinomio de grado  $\leq n$  que cumple dichas condiciones.

**6.30 Definición.** Sea  $f$  una función  $n$  veces derivable en un punto  $a$ . La función polinómica  $T_n(f, a)$  definida para todo  $x \in \mathbb{R}$  por

$$T_n(f, a)(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

se llama el **polinomio de Taylor de orden  $n$  de  $f$  en  $a$** .

Los dos resultados siguientes son, junto con las reglas de L'Hôpital, los más útiles para calcular límites.

**6.31 Teorema (Teorema de Taylor-Young).** Sea  $f$  una función  $n$  veces derivable en un punto  $a$ , y sea  $T_n(f, a)$  el polinomio de Taylor de orden  $n$  de  $f$  en  $a$ . Entonces se verifica que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n(f, a)(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

**Demostración.** Haremos la demostración por inducción. Para  $n=1$  la afirmación del enunciado es cierta sin más que recordar la definición de derivada de una función en un punto. Supongamos que la afirmación del enunciado es cierta para toda función  $n$  veces derivable en  $a$ . Sea  $f$  una función  $n+1$  veces derivable en  $a$ . Entonces la función  $g = f'$  es  $n$  veces derivable en  $a$  y por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - T_n(g, a)(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Se comprueba fácilmente que  $T_{n+1}'(f, a)(x) = T_n(g, a)(x)$ , con lo cual resulta que

$$g(x) - T_n(g, a)(x) = \frac{d}{dx}(f(x) - T_{n+1}(f, a)(x)).$$

Por el teorema de L'Hôpital obtenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_{n+1}(f, a)(x)}{(x-a)^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - T_n(g, a)(x)}{(n+1)(x-a)^n} = 0.$$

Lo que concluye la demostración.  $\square$

**6.32 Corolario.** Sea  $f$  una función definida en un intervalo  $I$  que es  $n+1$  veces derivable en un punto  $a \in I$ , y sea  $T_n(f, a)$  el polinomio de Taylor de orden  $n$  de  $f$  en  $a$ . Entonces se verifica que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n(f, a)(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a).$$

### 6.4.1. Notación de Landau

Te recuerdo también una notación extraordinariamente útil, me refiero a la notación de Landau. Si  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones tales que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , se escribe  $f(x) = o(g(x))$  cuando  $x \rightarrow a$ , y se lee  $f(x)$  es un infinitésimo de orden superior que  $g(x)$  en el punto  $a$ . La idea es que  $f(x)$  tiende a cero más rápidamente que  $g(x)$  cuando  $x \rightarrow a$ . Si no hay lugar a confusión, omitimos la precisión “cuando  $x \rightarrow a$ ”.

Usando la notación de Landau, el teorema de Taylor–Young puede expresarse en la forma  $f(x) - T_n(f, a)(x) = o(x-a)^n$  cuando  $x \rightarrow a$ . Lo que suele escribirse

$$f(x) = T_n(f, a)(x) + o(x-a)^n \quad (6.10)$$

Esta última igualdad suele llamarse en algunos textos *Teorema de Taylor con resto infinitesimal* o *forma infinitesimal del resto de Taylor*. No es otra cosa que el teorema de Taylor–Young escrito con la notación de Landau.

Lo interesante de esta notación es que si, por ejemplo,  $\varphi(x) = o(x-a)^p$  y  $\psi(x) = o(x-a)^q$ , entonces  $\varphi(x)\psi(x) = o(x-a)^{p+q}$  y, si  $p > q$ ,  $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = o(x-a)^{p-q}$  y  $(\varphi(x) + \psi(x)) = o(x-a)^q$ . Además, si  $H(x)$  es una función acotada en un intervalo abierto que contenga al punto  $a$  y sabemos que  $\varphi(x) = o(x-a)^p$  entonces también  $H(x)\varphi(x) = o(x-a)^p$ .

### 6.4.2. Polinomios de Taylor de las funciones elementales

Los polinomios de Taylor de la función exponencial centrados en  $a = 0$  son inmediatos pues las derivadas de  $e^x$  en  $x = 0$  valen todas 1. Luego

$$T_n(\exp, 0)(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} x^k$$

Como  $\text{sen}'(x) = \cos(x) = \text{sen}(\frac{\pi}{2} + x)$ , se sigue que  $\text{sen}^{(n)}(x) = \text{sen}(\frac{n\pi}{2} + x)$ . En particular,  $\text{sen}^{(n)}(0) = \text{sen}(\frac{n\pi}{2})$ . Por tanto

$$T_n(\text{sen}, 0)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\text{sen}(\frac{k\pi}{2})}{k!} x^k$$

Como para  $k$  par es  $\text{sen}(\frac{k\pi}{2}) = 0$  y para  $k$  impar  $k = 2q - 1$  es  $\text{sen}(\frac{(2q-1)\pi}{2}) = (-1)^{q+1}$ , resulta que

$$T_{2n-1}(\text{sen}, 0)(x) = T_{2n}(\text{sen}, 0)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}$$

Análogamente para la función coseno

$$T_{2n}(\text{cos}, 0)(x) = T_{2n+1}(\text{cos}, 0)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

Pongamos  $f(x) = (1+x)^\alpha$ . Tenemos que  $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ . Por lo que

$$T_n(f, 0)(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$$

Cualquiera sea el número real  $\alpha$  y el número natural  $k$  se define

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

Por convenio  $\binom{\alpha}{0} = 1$ . Con ello podemos escribir

$$T_n(f, 0)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k$$

Para obtener los polinomios de Taylor de  $\log(1+x)$ ,  $\text{arc tg } x$  y  $\text{arc sen } x$  es conveniente usar la siguiente relación, de comprobación inmediata, entre los polinomios de Taylor de una función  $\varphi$  y de su derivada  $\varphi'$  que se expresa por:

$$\boxed{\frac{d}{dx} T_{n+1}(\varphi, a)(x) = T_n(\varphi', a)(x)} \tag{6.11}$$

Es decir, la derivada del polinomio de Taylor de orden  $n+1$  de  $\varphi$  es el polinomio de Taylor de orden  $n$  de  $\varphi'$ . La igualdad (6.11) es interesante en los dos sentidos pues permite calcular

$T_{n+1}(\varphi, a)(x)$  sin más que calcular la primitiva o antiderivada de  $T_n(\varphi', a)(x)$  que en el punto  $a$  coincida con  $\varphi(a)$ . Los siguientes ejemplos son representativos de esta forma de proceder.

En lo que sigue vamos a usar que  $T_n(\varphi, a)$  es el único polinomio de grado menor o igual que  $n$  tal que  $\varphi(x) = T_n(\varphi, a)(x) + o(x - a)^n$  (ver ejercicio 140).

Pongamos  $f(x) = \log(1 + x)$ . Tenemos que

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}$$

De donde se deduce, por lo antes dicho, que

$$T_n(f', 0)(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n$$

y, por tanto, para  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$T_{n+1}(f, 0)(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Para el caso de la función  $\text{arc tg } x$  se procede igual teniendo en cuenta que

$$\text{arc tg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

de donde se sigue que

$$T_{2n}(\text{arc tg}, 0)(x) = T_{2n+1}(\text{arc tg}, 0)(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Finalmente, como  $\text{arc sen}'(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$  es de la forma  $(1 + z)^\alpha$  donde  $z = -x^2$ ,  $\alpha = -1/2$ , y como el polinomio de Taylor de orden  $n$  en  $a = 0$  de  $(1 + z)^\alpha$  sabemos que es

$$\sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} z^k, \text{ deducimos que}$$

$$T_{2n}(\text{arc sen}', 0)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{-1/2}{k} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^n \binom{-1/2}{k} (-1)^k x^{2k}$$

y, por tanto,

$$T_{2n+1}(\text{arc sen}, 0)(x) = T_{2n+1}(\text{arc sen}, 0)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{-1/2}{k} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Como

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{\frac{-1}{2}(\frac{-1}{2}-1)(\frac{-1}{2}-2)\dots(\frac{-1}{2}-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k)}$$

tenemos que

$$T_{2n+1}(\text{arc sen}, 0)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k)} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$$

En resumen, debes recordar los siguientes desarrollos:

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} x^k + o(x^n) \quad (6.12)$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} + o(x^{2n}) \quad (6.13)$$

$$\operatorname{cos} x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}) \quad (6.14)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n) \quad (6.15)$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n) \quad (6.16)$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} x^{2k-1} + o(x^{2n}) \quad (6.17)$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) \quad (6.18)$$

## 6.5. Técnicas para calcular límites de funciones

Cuando en un ejercicio te piden calcular un límite, es casi seguro que se trata de una “*indeterminación*”. Te recuerdo que aquellos límites de sumas, productos, cocientes o potencias de funciones en los que el resultado no está predeterminado por el comportamiento particular de cada una de las funciones se llaman “*límites indeterminados*”. La palabra “*indeterminado*” quiere decir simplemente que se trata de límites cuyo cálculo no puedes hacerlo aplicando las reglas básicas del “*álgebra de límites*” y tienes que usar alguna técnica apropiada para calcularlos. Los límites *interesantes* son casi siempre de este tipo.

Las reglas de L'Hôpital son muy útiles para resolver las indeterminaciones, pero yo pienso que se abusa de ellas. Las aplicamos sin pensar dos veces lo que hacemos, nos dejamos llevar por la comodidad que proporcionan (aunque no siempre) y acabamos calculando límites de forma mecánica sin saber muy bien qué es lo que hacemos. No tengo nada en contra de ellas, tan sólo me parece que su uso casi exclusivo y de forma mecánica es empobrecedor. Por el contrario, pienso que cada límite debe intentarse de la forma más adecuada a su caso. Para eso tienes que fijarte en cómo es la función, relacionarla con otras parecidas y tratar de relacionar el límite que te piden con otros bien conocidos.

Voy a contarte las estrategias que suelo usar para calcular límites. Esencialmente, puedo resumirlas en dos:

- Trato de reducir el límite a otros bien conocidos.
- Siempre que puedo sustituyo funciones por otras más sencillas.

Vayamos con la primera. Si te preguntas qué entiendo por límites *bien conocidos*, la res-

puesta es bien fácil: los que siguen a continuación.

### 6.5.1. Límites que debes saber de memoria

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} x}{x} = 1,$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x} = 1,$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1,$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{1}{6},$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} = 1,$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \frac{1}{3},$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1,$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$

Observa que todos ellos, con la excepción de cuatro, son *derivadas* en el punto  $x = 0$  de las respectivas funciones. Por ello no son difíciles de recordar. Ahora bien, estos límites suelen aparecer algo disfrazados. Realmente, más que como límites concretos, debes considerarlos como *modelos*.

#### 6.33 Ejemplo. El límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{\cos x - 1}$$

no está en la lista anterior, pero responde al modelo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1}$$

en el que la variable  $x$  se ha sustituido por la función  $\cos x$  y el punto 1 por el punto 0. ◆

#### 6.34 Ejemplo. Partimos del límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \frac{1}{3}$$

Elijamos ahora cualquier función *continua*  $g$  que se anule en algún punto  $c$ , por ejemplo  $g(x) = e^x - 1$  ( $c = 0$ ) o  $g(x) = \log x$  ( $c = 1$ ), o  $g(x) = \sqrt[3]{x} - 1$  ( $c = 1$ ), ... En todos los casos se verifica que

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{\operatorname{tg}(g(x)) - g(x)}{g(x)^3} = \frac{1}{3}$$

Tenemos así que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(e^x - 1) - e^x + 1}{(e^x - 1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(\log x) - \log x}{(\log x)^3} = \frac{1}{3}$$

¿Entiendes lo que pasa? Esto puede hacerse con cualquier límite. La justificación de estos resultados es el teorema (4.43) que establece que la continuidad permuta con el paso al límite (realmente es una consecuencia de que la composición de funciones continuas es continua). ◆

Como consecuencia, los límites de la lista anterior son *muchos más* de los que aparecen en ella. Si te acostumbras a reconocerlos cuando vengan disfrazados podrás ahorrarte mucho trabajo innecesario. Para ayudarte, vamos a escribirlos de nuevo de forma más general.

Sea  $f$  cualquier función tal que  $f(x) \neq 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ . Entonces se verifica que:

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = 1,$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = 1,$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - \cos f(x)}{f(x)^2} = \frac{1}{2},$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1,$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - \operatorname{sen} f(x)}{f(x)^3} = \frac{1}{6},$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(1 + f(x))^\alpha - 1}{f(x)} = \alpha,$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\log(1 + f(x))}{f(x)} = 1,$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} f(x)}{f(x)} = 1,$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} f(x)}{f(x)} = 1,$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} f(x) - f(x)}{f(x)^3} = \frac{1}{3},$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - \log(1 + f(x))}{f(x)^2} = \frac{1}{2}.$	

Vamos a la segunda estrategia. *Sustituir funciones por otras más sencillas*. Esto se basa en la proposición (4.45) que permite sustituir en un producto o en un cociente de funciones, una de ellas por otra asintóticamente equivalente. ¡Ojo! En una suma no puedes, en general, hacer eso.

La lista de los límites *bien conocidos* es, de hecho, una lista de equivalencias asintóticas y eso la hace más útil todavía.

### 6.35 Ejemplo. El límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos \sqrt{2}x - x}{\operatorname{tg}^3 x}$$

es una indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$  y puede hacerse por L'Hôpital. El problema está en que vamos a tener que derivar por lo menos dos veces y las derivadas de la tangente se van complicando. Para evitarlo podemos sustituir  $\operatorname{tg} x$  por  $x$  pues  $\operatorname{tg} x \sim x$  ( $x \rightarrow 0$ ). Escribiendo

$$\frac{e^x - \cos \sqrt{2}x - x}{\operatorname{tg}^3 x} = \frac{x^3}{\operatorname{tg}^3 x} \frac{e^x - \cos \sqrt{2}x - x}{x^3}$$

y teniendo en cuenta que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\operatorname{tg}^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\operatorname{tg} x} \right)^3 = 1,$$

basta calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos \sqrt{2}x - x}{x^3}.$$

Lo que puedes hacer por L'Hôpital muy fácilmente. ◆

Las estrategias anteriores son las más básicas, pero hay otras un poco más elaboradas. Esencialmente consisten en aplicar el teorema de Taylor-Young para tratar de reducir ciertos límites al límite de un cociente de dos polinomios. Bueno, sorpresa, todos los límites de la lista de *límites bien conocidos* son, sin excepción, casos particulares del teorema de Taylor-Young.

Ahora después te pondré algunos ejemplos de esta forma de proceder. Pero, para que puedas usar con comodidad este método, tienes que saberte de memoria, o ser capaz de deducirlos en poco tiempo, los polinomios de Taylor de las funciones elementales. Además, esta forma de proceder se adapta más a unos casos que a otros y tan sólo con la práctica se aprende cuándo conviene usarla.

**6.36 Ejemplo.** Si tratas de calcular por L'Hôpital el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{tg} x)(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) - x^2}{x^6},$$

tendrás que ser paciente porque necesitarás derivar por lo menos cinco veces, y en el numerador hay un producto cuyas derivadas se van haciendo cada vez más complicadas. Ahora, si calculas los polinomios de Taylor de orden 5 de  $\operatorname{tg} x$  y  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$  en  $a = 0$ , obtendrás que

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6), \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^6).$$

Observa que como se trata de funciones impares sus derivadas de orden par en  $x = 0$  son nulas, por eso los polinomios anteriores son, de hecho, los polinomios de Taylor de orden 6 y eso explica que aparezca el término  $o(x^6)$ . Deducimos que

$$\operatorname{tg} x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = x^2 + \frac{2}{9}x^6 + o(x^7)$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{tg} x)(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) - x^2}{x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2/9x^6 + o(x^7)}{x^6} = \frac{2}{9}$$

Observa que aunque  $\operatorname{tg} x \sim x$  y  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x \sim x$  para  $x \rightarrow 0$ , se tiene que  $\operatorname{tg} x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - x^2 \sim \frac{2}{9}x^6$  para  $x \rightarrow 0$ . Fíjate que al calcular el producto

$$\operatorname{tg} x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \left( x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \right) \left( x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^6) \right)$$

tan sólo nos interesan las potencias de  $x$  hasta la de orden 6 inclusive, las demás potencias y los términos de la forma  $x o(x^6)$ ,  $x^2 o(x^6)$ ,  $o(x^6) o(x^6)$ , etc. son todos ellos funciones de la forma  $o(x^6)$  (pues al dividirlos por  $x^6$  su límite es cero), y su suma también es una función de la forma  $o(x^6)$ , por lo que *no es preciso calcularlos para hacer el límite*. Observa que, al proceder de esta manera, tienes que calcular las 5 primeras derivadas en  $x = 0$  de las funciones  $\operatorname{tg}(x)$  y  $\operatorname{arc} \operatorname{tg}(x)$ , pero te ahorras el trabajo de derivar su producto. Si aún tienes dudas, calcula el límite por L'Hôpital y compara.  $\blacklozenge$

**6.37 Ejemplo.** Se trata de calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\log(1 + x) - x) - \frac{1}{4}x^4}{x^5}.$$

Tenemos que

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3), \quad \log(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$



luego

$$(\cos x - 1)(\log(1 + x) - x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + o(x^5),$$

de donde se sigue que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\log(1 + x) - x) - \frac{1}{4}x^4}{x^5} = -\frac{1}{6}$$



### 6.5.2. Sobre el mal uso de las reglas de L'Hôpital

No conviene aplicar las reglas de L'Hôpital para calcular derivadas, es decir, límites de la forma

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La razón es muy sencilla. Si para calcular el límite anterior usas las reglas de L'Hôpital, lo que haces es calcular el límite  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ . Si éste límite es igual a  $L$  deducimos que el anterior también es igual a  $L$ . Pero ¡has probado más de lo que se pedía! Acabas de probar que la derivada de  $f$  es continua en  $a$ , porque has probado que  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = L = f'(a)$ ; y lo que se pedía era solamente calcular la derivada de  $f$  en  $a$ . Esto puede que no tenga mayor importancia o que sí la tenga. Depende de la función. Veamos un ejemplo típico.

**6.38 Ejemplo.** Queremos calcular el límite siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} \quad (6.19)$$

Pongamos  $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$  y definamos  $f(0) = e$  (esto se hace así porque sabemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e$ ). El límite (6.19) no es otra cosa que la derivada de  $f$  en 0. Para calcular dicha derivada, lo mejor es tomar logaritmos y calcular la derivada en 0 de la función

$$g(x) = \log f(x) = \frac{\log(1 + x)}{x}, \quad g(0) = \log f(0) = 1$$

Tenemos que

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{\log(1 + x) - x}{x^2}$$

Este límite puede hacerse muy fácilmente por L'Hôpital, pero resulta que es un límite básico, de los que debes saberte de memoria. Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -\frac{1}{2}.$$

Concluimos, por la regla de la cadena, que  $f(x) = \exp(g(x))$  es derivable en 0, y su derivada viene dada por  $f'(0) = \exp'(g(0))g'(0) = -\frac{e}{2}$ .

Veamos lo que pasa si aplicamos L'Hôpital para calcular el límite (6.19). Primero, debemos comprobar que podemos aplicar L'Hôpital y para eso debemos observar que  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ .

Seguidamente, derivamos numerador y denominador en (6.19), y resulta que debemos calcular el límite siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \left( \frac{1}{x(1+x)} - \frac{\log(1+x)}{x^2} \right)$$

Que también puede hacerse por L'Hôpital pero es un poco más complicado que el anterior. ♦

Otro caso en el que puede no ser conveniente aplicar L'Hôpital es para calcular un límite de la forma:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

Primero es conveniente escribir

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

Si las funciones  $f$  y  $g$  son derivables en  $a$  y  $g'(a) \neq 0$ , se sigue que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Si aplicamos L'Hôpital probaremos, sin necesidad, que las derivadas de  $f$  y  $g$  son continuas en  $a$ , cosa que no se pide y que puede ser más complicada que lo anterior.

Los errores más frecuentes al aplicar L'Hôpital se deben a que no se comprueban las hipótesis cada vez que aplicamos las reglas. Es frecuente empezar con una indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$  o  $\frac{\infty}{\infty}$  y, después de aplicar L'Hôpital una vez, no volver a comprobar que seguimos teniendo una indeterminación. Así que no lo olvides: cada vez que apliques L'Hôpital comprueba que se trata de una indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$  o  $\frac{\infty}{\infty}$  y que la derivada del denominador no se anula.

### 6.5.3. Sobre el uso de la notación $\lim_{x \rightarrow a}$

La notación que usamos para límites es tan buena que a veces te hace ver lo que no hay. En cierto sentido la notación “tira de tí”: basta con que escribas “ $\lim_{x \rightarrow a}$ ” delante de una función para que mentalmente hagas la sustitución  $x = a$ . Para comprobar esto te propongo un juego: dime en menos de medio segundo el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x}$$

¿Has dudado? ¿Has creído que es una indeterminación tipo  $\frac{0}{0}$ ? Si respondes que sí a estas preguntas es porque has hecho mentalmente la sustitución  $x = 0$  en el cociente  $\frac{x}{x}$  y has visto lo que no hay. Porque, evidentemente, se tiene que  $\frac{x}{x} = 1$ , es decir, el límite anterior es el límite de la función constante igual a 1. No hay ninguna indeterminación. Es un límite trivial. Lo mismo pasa con el siguiente límite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1^x$ . Si te dejas llevar por la notación y haces mentalmente la sustitución  $x = +\infty$ , puedes creer que se trata de una indeterminación  $1^\infty$ , cuando no lo es porque, evidentemente,  $1^x = 1$  es la función constante igual a 1. Se pueden poner muchos más ejemplos.

¿Cómo evitar que la notación “ $\lim_{x \rightarrow a}$ ” “tire de ti” y te lleve a ver lo que no hay? Pues no usándola hasta que no hayas visto claramente lo que realmente hay. Este es un consejo importante: *antes de empezar a calcular un límite funcional, simplifica todo lo que puedas la función y no escribas el símbolo “ $\lim$ ” hasta que no tengas una idea clara de cómo vas a hacer los cálculos.*

## 6.6. Extremos relativos. Teorema de Taylor

El siguiente resultado es de gran utilidad para el estudio de los extremos relativos de una función.

**6.39 Teorema (Condiciones suficientes de extremo relativo).** Sean  $I$  un intervalo,  $a$  un punto de  $I$  que no es extremo de  $I$  y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $n \geq 2$  veces derivable en  $a$ . Supongamos que todas las derivadas de  $f$  hasta la de orden  $n - 1$  inclusive se anulan en  $a$ , es decir,  $f^{(k)}(a) = 0$  para  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ , y que  $f^{(n)}(a) \neq 0$ . Entonces:

- i) Si  $n$  es par y  $f^{(n)}(a) > 0$ ,  $f$  tiene un mínimo relativo en  $a$ .
- ii) Si  $n$  es par y  $f^{(n)}(a) < 0$ ,  $f$  tiene un máximo relativo en  $a$ .
- iii) Si  $n$  es impar entonces  $f$  no tiene extremo relativo en  $a$ .

**Demostración.** Basta observar que, en virtud de las hipótesis hechas y (6.32), se verifica que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \neq 0$$

Por la definición de límite (o por el teorema de conservación local del signo), existe un número  $r > 0$  tal que  $]a - r, a + r[ \subset I$  y para  $x \in ]a - r, a + r[, x \neq a$  se verifica que:

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^n} f^{(n)}(a) > 0.$$

Si  $n$  es par será  $(x - a)^n > 0$ , por lo que si  $f^{(n)}(a) > 0$  tiene que ser  $f(x) - f(a) > 0$  para todo  $x \in ]a - r, a + r[ \setminus \{a\}$ , es decir,  $f$  tiene un mínimo relativo (estricto) en el punto  $a$ ; si por el contrario es  $f^{(n)}(a) < 0$  entonces tiene que  $f(x) - f(a) < 0$  para todo  $x \in ]a - r, a + r[ \setminus \{a\}$ , es decir,  $f$  tiene un máximo relativo (estricto) en el punto  $a$ .

En el caso en que  $n$  sea impar se tiene que  $(x - a)^n < 0$  para  $a - r < x < a$  y  $(x - a)^n > 0$  para  $a < x < a + r$ . Deducimos que para  $a - r < x < a$ ,  $f(x) - f(a)$  tiene signo opuesto al que tiene para  $a < x < a + r$ . En consecuencia  $f$  no tiene un extremo relativo en  $a$ .  $\square$

Hay que insistir en que este resultado es útil para estudiar extremos relativos pero que *no proporciona condiciones suficientes de extremo absoluto*. Puede enunciarse un criterio de extremo absoluto para la derivada segunda como sigue.

**6.40 Proposición (Criterio de extremo absoluto).** Supongamos que  $f$  es continua en  $[a, b]$ , dos veces derivable en  $]a, b[$  y tiene un punto crítico en  $c \in ]a, b[$ . Entonces:

- a) Si  $f''(x) \leq 0$  para todo  $x \in ]a, b[$  se verifica que  $f$  alcanza en  $c$  un máximo absoluto en  $[a, b]$ .

b) Si  $f''(x) \geq 0$  para todo  $x \in ]a, b[$  se verifica que  $f$  alcanza en  $c$  un mínimo absoluto en  $[a, b]$ .

**Demostración.** a) Las hipótesis hechas implican que  $f'$  es decreciente en  $]a, b[$  y, como  $f'(c) = 0$ , se sigue que para  $a < x \leq c$  es  $f'(x) \geq 0$ , y para  $c \leq x < b$  es  $f'(x) \leq 0$ . Podemos aplicar ahora la proposición (6.23) para concluir que  $f$  alcanza en  $c$  un máximo absoluto en  $[a, b]$ .

La demostración del apartado b) se hace de forma análoga. □

El teorema de Taylor–Young nos dice que cuando  $x$  está muy próximo al punto  $a$ , el valor,  $f(x)$ , de  $f$  en  $x$  es muy próximo al valor,  $T_n(f, a)(x)$ , del polinomio de Taylor de orden  $n$  de  $f$  en  $x$ , pero no nos permite calcular el error que se comete en la aproximación. El siguiente resultado es importante porque permite acotar dicho error.

**6.41 Teorema (Teorema de Taylor).** Sea  $f$  una función  $n + 1$  veces derivable en un intervalo  $I$ . Dados dos puntos cualesquiera  $x, a$  en  $I$  con  $x \neq a$ , se verifica que existe algún punto  $c$  en el intervalo abierto de extremos  $a$  y  $x$  tal que:

$$\boxed{f(x) - T_n(f, a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} (x - a)^{n+1}.} \tag{6.20}$$

**Demostración.** En lo que sigue el punto  $x$  y el punto  $a$  están fijos. Definamos la función  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  dada para todo  $t \in I$  por:

$$g(t) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k$$

Se comprueba fácilmente que

$$g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n.$$

Aplicamos ahora el teorema del valor medio generalizado a las funciones  $g$  y  $h(t) = (x - t)^{n+1}$  en el intervalo de extremos  $x$  y  $a$ , para obtener que hay un punto  $c$  comprendido entre  $x$  y  $a$  tal que

$$(h(x) - h(a))g'(c) = (g(x) - g(a))h'(c).$$

Como  $g(x) = h(x) = 0$ , obtenemos que:

$$(x - a)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - c)^n = g(a)(n + 1)(x - c)^n.$$

Simplificando, y teniendo en cuenta que  $g(a) = f(x) - T_n(f, a)(x)$ , se obtiene la igualdad del enunciado. □

El número

$$\boxed{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} (x - a)^{n+1}} \tag{6.21}$$

Se llama **resto de Lagrange**. Si somos capaces de probar una desigualdad de la forma

$$\frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |x-a|^{n+1} \leq \varepsilon \tag{6.22}$$

Entonces podemos asegurar que el error cometido al aproximar  $f(x)$  por  $T_n(f, a)(x)$  es menor que  $\varepsilon$ . Observa que el resto de Lagrange es tanto más pequeño cuanto más próximo esté  $x$  de  $a$ . En los ejercicios del teorema de Taylor, usualmente el punto  $a$  debemos elegirlo nosotros y hay que hacerlo *procurando que esté lo más próximo posible al punto  $x$* , donde nos piden calcular el valor de la función, y que *el valor de  $f$  y de sus derivadas en  $a$  pueda calcularse de forma exacta*.

La dificultad para acotar el resto de Lagrange es que no se conoce exactamente el punto  $c$  sino solamente que está comprendido entre los puntos  $a$  y  $x$ . Por eso, *para acotar el resto de Lagrange hay que acotar la derivada  $f^{(n+1)}$  en el intervalo de extremos  $a$  y  $x$* . Además, como se divide por  $(n+1)!$ , se puede sospechar que cuanto mayor sea  $n$  menor será el error cometido. Esto es cierto en muchos casos pero no siempre, es algo que depende de lo rápidamente que crezcan las derivadas de  $f$ . En este tipo de cálculos no se sabe de entrada cómo hay que tomar  $n$ , lo que se trata es precisamente de elegir  $n$  de forma que se obtenga la acotación deseada. Pero para ello hay que empezar acotando en función de  $n$ . Veamos la forma de proceder con un ejemplo.

**6.42 Ejemplo.** Queremos calcular el número  $\sqrt{2}$  con un error menor que  $10^{-9}$  por medio de un conveniente polinomio de Taylor.

Aquí la función es  $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ , definida para  $x \geq 0$ . Debemos elegir un punto  $a$  próximo a 2 en el que podamos calcular de forma exacta  $f(a)$ . Lo que se hace es calcular cuadrados próximos a dos. Como sabemos que  $\sqrt{2}$  es aproximadamente 1,4, podemos probar con  $a = (1,4)^2 = 1,96$ . Efectivamente,  $a = 1,96$  está muy próximo a 2 y  $f(1,96) = 1,4$  de forma exacta. Calculemos las derivadas de  $f$ .

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{2} - 2\right) \dots \left(\frac{1}{2} - n + 1\right) x^{1/2-n} = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2(n-1) - 1)}{2^n} x^{1/2-n}$$

Observa que las derivadas también puede calcularse de forma exacta en 1,96. El error de aproximación viene dado por el resto de Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |x-a|^{n+1} &= [x = 1,96, a = 2] = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} \left(\frac{4}{10^2}\right)^{n+1} = \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{(n+1)! 2^{n+1}} \frac{1}{c^{1/2+n}} \frac{4}{10^{2n+2}} = \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)(2n+2)} \frac{1}{c^{1/2+n}} \frac{4}{10^{2n+2}} < \frac{1}{2n+2} \frac{1}{c^{1/2+n}} \frac{4}{10^{2n+2}} \end{aligned}$$

donde  $1,96 < c < 2$ . Deducimos que

$$\frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |x-a|^{n+1} < \frac{1}{2n+2} \frac{1}{(1,4)(1,96)^n} \frac{4}{10^{2n+2}}$$

Como el error permitido es  $\varepsilon = 10^{-9}$ , es suficiente elegir  $n$  por la condición de que

$$\frac{1}{2n+2} \frac{1}{(1,4)(1,96)^n} \frac{4}{10^{2n+2}} < 10^{-9}$$

Para lo cual, claramente, basta tomar  $n = 3$ . Por tanto, el valor pedido de  $\sqrt{2}$  es  $T_3(f, 1,96)(2)$ . ♦

### 6.7. Funciones convexas y funciones cóncavas

**6.43 Definición.** Dados dos puntos  $\alpha = (a, b)$  y  $\beta = (c, d)$  en el plano, el segmento que une  $\alpha$  con  $\beta$  es el conjunto de puntos del plano:

$$[\alpha, \beta] = \{t\alpha + (1-t)\beta : 0 \leq t \leq 1\} = \{(ta + (1-t)c, tb + (1-t)d) : 0 \leq t \leq 1\} \quad (6.23)$$

Observa que si  $x < y$  son números reales, el segmento que une  $x$  con  $y$  es el intervalo cerrado  $[x, y]$ .

**6.44 Definición.** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida en un intervalo  $I$ . Se dice que  $f$  es *convexa* en  $I$  si para todo par de puntos  $x, y \in I$  y para todo  $t$  con  $0 \leq t \leq 1$ , se verifica que:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad (6.24)$$

Cuando la desigualdad anterior es estricta para  $0 < t < 1$  se dice que  $f$  es *estrictamente convexa*. Se dice que  $f$  es *cóncava* en  $I$  cuando  $-f$  es convexa en  $I$  y *estrictamente cóncava* cuando  $-f$  es estrictamente convexa.

La interpretación geométrica de esta desigualdad es la siguiente. El segmento que une el punto del plano  $(x, f(x))$  con el punto  $(y, f(y))$  es el conjunto

$$\{(tx + (1-t)y, tf(x) + (1-t)f(y)) : 0 \leq t \leq 1\}$$

La desigualdad (6.24) dice que la ordenada,  $tf(x) + (1-t)f(y)$ , de cada punto de dicho segmento es mayor o igual que el valor de  $f$  en la abscisa  $f(tx + (1-t)y)$ . Es decir, el punto  $(tx + (1-t)y, tf(x) + (1-t)f(y))$  queda por encima del punto  $(tx + (1-t)y, f(tx + (1-t)y))$ . Dicho de otra forma: el segmento (la cuerda) que une dos puntos de la gráfica de  $f$  queda siempre por encima de la gráfica de  $f$ .

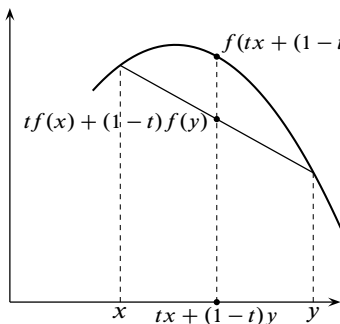


Figura 6.9. Función cóncava

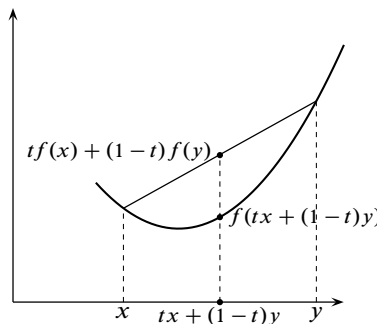


Figura 6.10. Función convexa

Naturalmente, para una función cóncava se verifica la desigualdad opuesta a (6.24) y, por tanto, si  $f$  es cóncava el segmento (la cuerda) que une dos puntos de la gráfica de  $f$  queda siempre por debajo de la gráfica de  $f$ .

Las gráficas (6.10) y (6.9) muestran claramente estos comportamientos.

Ejemplos típicos de funciones convexas son las parábolas “hacia arriba” y la exponencial. Ejemplos típicos de funciones cóncavas son las parábolas “hacia abajo” y el logaritmo.

Para funciones derivables se tiene una útil caracterización de la convexidad.

**6.45 Teorema (Condiciones suficientes de convexidad).** *Supongamos que  $f$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $]a, b[$ . Si la derivada de  $f$  es creciente (resp. estrictamente creciente) en  $]a, b[$  entonces  $f$  es convexa (resp. estrictamente convexa) en  $[a, b]$ . En particular si  $f$  es dos veces derivable en  $]a, b[$  y se verifica que  $f''(x) \geq 0$  (resp.  $f''(x) > 0$ ) para todo  $x \in ]a, b[$ , entonces  $f$  es convexa (resp. estrictamente convexa) en  $[a, b]$ .*

**Demostración.** Sean  $x, y \in [a, b]$  con  $x < y$ . Sea  $t \in ]0, 1[$  y pongamos  $z = tx + (1 - t)y$ . Hay que probar que  $f(z) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$ . Puesto que  $f(z) = tf(z) + (1 - t)f(z)$ , esta desigualdad puede escribirse

$$tf(z) + (1 - t)f(z) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) \iff (1 - t)(f(z) - f(x)) \leq t(f(y) - f(z))$$

Aplicando el TVM en los intervalos  $[x, z]$  y  $[z, y]$ , obtenemos puntos  $c \in ]x, z[$ ,  $d \in ]z, y[$  tales que

$$f(z) - f(x) = f'(c)(z - x), \quad f(y) - f(z) = f'(d)(y - z)$$

Teniendo en cuenta que  $f'$  se supone creciente, por lo que  $f'(c) \leq f'(d)$ , y la igualdad de comprobación inmediata  $(1 - t)(z - x) = t(y - z)$ , se tiene que:

$$(1 - t)(f(z) - f(x)) = (1 - t)f'(c)(z - x) \leq tf'(d)(y - z) = t(f(y) - f(z))$$

Que es la desigualdad que queríamos probar. □

Interpretando la derivada primera como la velocidad y la derivada segunda como la aceleración, las curvas convexas aceleran y las cóncavas frenan.

Observa que si  $f$  es una función convexa y derivable en un intervalo  $I$ , entonces la gráfica de  $f$  queda siempre por encima de la recta tangente en cualquier punto, es decir, para todo par de puntos  $x, a \in I$  se verifica que  $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$ . De hecho, para funciones derivables, esta propiedad es equivalente a la convexidad (ver ejercicio 138).

**6.46 Definición.** Se dice que  $a$  es un **punto de inflexión** de una función  $f$ , si hay un número  $r > 0$  tal que  $f$  es cóncava en el intervalo  $]a - r, a[$  y  $f$  es convexa en el intervalo  $]a, a + r[$  (o al revés). Es decir, los puntos en los que una función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman puntos de inflexión.

El siguiente resultado se prueba fácilmente y queda como ejercicio.

**6.47 Proposición.** *Si  $f$  tiene un punto de inflexión en  $a$  y es dos veces derivable en  $a$ , entonces  $f''(a) = 0$ .*

*Si  $f$  es tres veces derivable en un punto  $a$  y se tiene que  $f''(a) = 0$  pero  $f'''(a) \neq 0$ , entonces  $f$  tiene un punto de inflexión en  $a$ .*

### 6.7.1. Ejercicios propuestos

---

Una de las aplicaciones más útiles de las derivadas es a los problemas de optimización. En dichos problemas se trata, por lo general, de calcular el máximo o el mínimo absolutos de una magnitud. Hay una gran variedad de problemas que responden a este esquema y con frecuencia tienen contenido geométrico o económico o físico. Por ello cada uno de estos ejercicios requiere un estudio particular.

Los siguientes consejos pueden ser útiles:

- Entiende bien el problema. Haz, si es posible, un dibujo o un esquema.
- Elige las variables y la magnitud,  $Q$ , que tienes que optimizar.
- Estudia las relaciones entre las variables para expresar la magnitud  $Q$  como función de una sola de ellas,  $Q = f(x)$ .
- Las condiciones del problema deben permitir establecer el dominio de  $f$ .
- Estudia la variación del signo de la derivada de  $f$  en su dominio para calcular máximos y mínimos absolutos por aplicación de la proposición 6.23.

202. Dado un punto  $P=(a, b)$  situado en el primer cuadrante del plano, determina el segmento con extremos en los ejes coordenados y que pasa por  $P$  que tiene longitud mínima.

**Observación.** La solución de este ejercicio también resuelve el problema de calcular la longitud de la escalera más larga que, llevada en posición horizontal, puede pasar por la esquina que forman dos corredores de anchuras respectivas  $a$  y  $b$ .

203. Demuestra que entre todos los rectángulos con un perímetro dado, el que tiene mayor área es un cuadrado.

204. Determina el rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados, inscrito en la elipse de ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , y que tenga área máxima.

**Observación.** Los dos ejercicios anteriores se han resuelto en el capítulo 1 usando la desigualdad de las medias. ¿Qué método te parece mejor?

205. Calcula el área máxima de un rectángulo que tiene dos vértices sobre una circunferencia y su base está sobre una cuerda dada de dicha circunferencia.

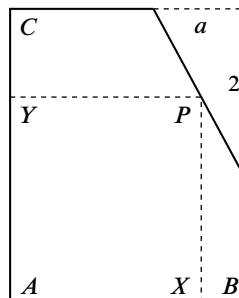
206. Encuentra un punto  $P$  de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  con coordenadas positivas y tal que el triángulo cuyos vértices son  $(0, 0)$  y las intersecciones de la tangente a la circunferencia en  $P$  con los ejes coordenados tenga área mínima.

207. Calcula un punto  $(u, v)$  ( $u > 0, v > 0$ ) de la elipse de ecuación  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  tal que la tangente a la elipse en dicho punto determine con los ejes un segmento de longitud mínima.

208. Calcula el área de la elipse de mínima área circunscrita a un rectángulo dado. Recuerda que el área de una elipse de semiejes  $s, t$  es igual a  $\pi st$ .



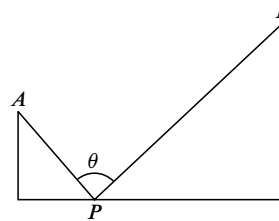
- 209.** La figura representa un espejo rectangular en el que se ha partido una esquina. Las dimensiones del espejo son  $\overline{AB} = 3$ ,  $\overline{AC} = 5$  y las de la esquina rota son las que se indican en la figura donde se supone que  $a$  es un valor conocido. Se pide calcular un punto  $P$  sobre la línea de corte de forma que el espejo de vértices  $A, X, P, Y$  tenga área máxima. ¿Para qué valor de  $a$  se verifica que el espejo de mayor área es un cuadrado?



- 210.** Se quiere construir una caja sin tapa con una lámina metálica rectangular cortando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse de tal modo si los lados de la lámina rectangular miden: a) 10 cm. y 10 cm. b) 12 cm. y 18 cm.
- 211.** Calcula las dimensiones (radio y altura) de una lata cilíndrica de un litro de capacidad cuya superficie total sea mínima.
- 212.** Calcula las dimensiones (radio y altura) de una lata cilíndrica de un litro de capacidad cuyo costo de producción sea mínimo. Se supone que no se desperdicia aluminio al cortar los lados de la lata, pero las tapas de radio  $r$  se cortan de cuadrados de lado  $2r$  por lo que se produce una pérdida de metal.
- 213.** Se necesita construir un depósito de acero de  $500 \text{ m}^3$ , de forma rectangular con base cuadrada y sin tapa. Tu trabajo, como ingeniero de producción, es hallar las dimensiones del depósito para que su costo de producción sea mínimo.
- 214.** Halla el volumen del cilindro circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio ( $a > 0$ ).
- 215.** Halla el volumen del cilindro circular recto más grande que puede inscribirse en un cono circular recto de altura  $h$  y radio  $r$  conocidos.
- 216.** Halla el volumen del cono circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio ( $a > 0$ ).
- 217.** La resistencia de una viga de madera de sección rectangular es proporcional a su anchura y al cuadrado de su altura. Calcula las dimensiones de la viga más resistente que puede cortarse de un tronco de madera de radio  $r$ .
- 218.** Calcula la distancia mínima del punto  $(6, 3)$  a la parábola de ecuación  $y = x^2$ .
- 219.** Una empresa tiene 100 casas para alquilar. Cuando la renta es de 80 libras al mes, todas las casas están ocupadas. Por cada 4 libras de incremento de la renta una casa queda deshabitada. Cada casa alquilada supone a la empresa un coste de 8 libras para reparaciones diversas. ¿Cuál es la renta mensual que permite obtener mayor beneficio?
- 220.** Una empresa produce semanalmente 300 bicicletas de montaña que vende íntegramente al precio de 600 euros cada una. Tras un análisis de mercados observa que si varía el precio, también varían sus ventas (de forma continua) según la siguiente proporción: por cada 7 euros que aumente o disminuya el precio de sus bicicletas, disminuye o aumenta la venta en 3 unidades.

- a) ¿Puede aumentar el precio y obtener mayores ingresos?
- b) ¿A qué precio los ingresos serán máximos?
- 221.** En la orilla de un río de 100 metros de ancho está situada una planta eléctrica y en la orilla opuesta, y a 500 metros río arriba, se está construyendo una fábrica. Sabiendo que el río es rectilíneo entre la planta y la fábrica, que el tendido de cables a lo largo de la orilla cuesta a 9 euros cada metro y que el tendido de cables sobre el agua cuesta a 15 euros cada metro, ¿cuál es la longitud del tendido más económico posible entre la planta eléctrica y la fábrica?
- 222.** Se proyecta un jardín en forma de sector circular de radio  $R$  y ángulo central  $\theta$  (medido en radianes). El área del jardín ha de ser  $A$  fija. ¿Qué valores de  $R$  y  $\theta$  hacen mínimo el perímetro del jardín?
- 223.** Se corta un alambre de longitud  $L$  formando un círculo con uno de los trozos y un cuadrado con el otro. Calcula por dónde se debe cortar para que la suma de las áreas de las dos figuras sea máxima o sea mínima.
- 224.** Dados dos puntos  $A$  y  $B$  situados en el primer cuadrante del plano, calcula cuál es el camino más corto para ir de  $A$  a  $B$  pasando por un punto del eje de abscisas.
- 225.** Se desea construir una ventana con forma de rectángulo coronado de un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. Pondremos cristal blanco en la parte rectangular y cristal de color en el semicírculo. Sabiendo que el cristal coloreado deja pasar la mitad de luz (por unidad de superficie) que el blanco, calcula las dimensiones de la ventana para conseguir la máxima luminosidad si se ha de mantener un perímetro constante dado.
- 226.** Se desea confeccionar una tienda de campaña cónica de un volumen determinado. Calcula sus dimensiones para que la cantidad de lona necesaria sea mínima.
- 227.** En una lámina circular de radio  $R$  se recorta un sector circular de ángulo  $\vartheta$  y con él se construye un cono. Calcula el valor de  $\vartheta$  para que el volumen del cono así construido sea máximo.
- 228.** Se desea construir un silo, con un volumen  $V$  determinado, que tenga la forma de un cilindro rematado por una semiesfera. El costo de construcción (por unidad de superficie) es doble para la semiesfera que para el cilindro (la base es gratis). Calcula las dimensiones óptimas para minimizar el costo de construcción.
- 229.** Demuestra que de todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio  $r$ , el de área mínima es el equilátero de altura  $3r$ .
- 230.** Se considera la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Calcula el triángulo isósceles de área máxima inscrito en dicha elipse, que tiene un vértice en el punto  $(0, b)$  y base paralela al eje de abscisas.
- 231.** Con una cuerda de longitud  $L$ , con un nudo corredizo en uno de sus extremos, rodeamos una columna circular de radio  $R$  haciendo pasar el otro extremo por el nudo. Calcula la máxima distancia posible del extremo libre al centro de la columna.

- 232.** Estás en el desierto con tu vehículo situado en un punto cuyas coordenadas son  $A = (0, 40)$  y tienes que ir a otro punto  $C = (28, 0)$  (la unidad de medida es la milla terrestre). Del punto  $A$  al origen  $O = (0, 0)$  y de éste al punto  $C$  hay una carretera asfaltada. Pero también, para ir de  $A$  a  $C$ , puedes hacer parte o todo el camino sobre la arena. En carretera tu velocidad es de 75 millas por hora; y sobre la arena de 45 millas por hora. ¿Qué camino debes seguir para llegar lo antes posible a  $C$ ?
- 233.** Calcula las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un triángulo equilátero cuyo lado mide 2 centímetros. Se supone que el rectángulo se apoya sobre un lado del triángulo.
- 234.** El principio de Fermat afirma que la luz viaja de un punto  $A$  a otro punto  $B$  siguiendo la trayectoria en la que se invierte el menor tiempo posible. Supongamos que el eje de abscisas,  $y = 0$ , separa dos medios en los que la luz viaja a distinta velocidad (por ejemplo, aire y agua). Sea  $c$  la velocidad de la luz en el semiplano superior  $y > 0$  y sea  $\frac{3}{4}c$  la velocidad correspondiente al semiplano inferior  $y < 0$ . Calcular el punto de dicho eje por el que pasará el rayo que viaje desde el punto  $A = (-4, 3)$  al  $B = (3, -4)$ .
- 235.** Calcula la posición del punto  $P = (x, 0)$  en la figura de la derecha, donde  $A = (0, 1)$  y  $B = (2 + \sqrt{3}, 2)$ , para que el ángulo  $\theta$  sea máximo. ¿Cuál es dicho valor máximo de  $\theta$ ? Justifica con detalle lo que haces.



*Uno de los resultados más útiles del cálculo diferencial son las Reglas de L'Hôpital que permiten resolver las indeterminaciones en el cálculo de límites.*

- 236.** Calcula el límite en el punto  $a$  que en cada caso se indica de las funciones siguientes:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (\sin x + \cos x)^{1/x}, \quad a = 0; & f(x) &= (1 + \operatorname{tg} x)^{1/x^2}, \quad a = 0 \\
 f(x) &= (\cot x)^{\sin x}, \quad a = 0; & f(x) &= \left( \cos^2 x + \frac{x^2}{2} \right)^{1/x^2}, \quad a = 0 \\
 f(x) &= (1 + \sin x)^{\cot x}, \quad a = 0; & f(x) &= \frac{\log(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}, \quad a = \pi/2 \\
 f(x) &= \frac{x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{\sin^3 x}, \quad a = 0; & f(x) &= \frac{(\operatorname{tg} x)(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) - x^2}{x^6}, \quad a = 0 \\
 f(x) &= \frac{e^x - \cos \sqrt{2}x - x}{\operatorname{tg}^2 x}, \quad a = 0; & f(x) &= \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{1/(1 - \cos x)}, \quad a = 0
 \end{aligned}$$

- 237.** Justifica que para todo  $r \in \mathbb{R}$  y para todo  $s > 0$  se verifica que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^r}{x^s} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r}{e^{sx}} = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^s |\log x|^r = 0.$$

- 238.** Calcula el límite en el punto  $a$  que en cada caso se indica de las funciones  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$f(x) = \frac{x^2 \sin 1/x}{\log x}, \quad a = +\infty; \quad f(x) = \sin \sqrt{1+x} - \sin \sqrt{x}, \quad a = +\infty$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \quad a = 0, \quad a = +\infty; \quad f(x) = \left( \cos \frac{\pi}{x+2} \right)^{x^2}, \quad a = +\infty$$

**239.** Sea  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en  $\mathbb{R}$  y dos veces derivable en 0 siendo, además,  $g(0) = 0$ . Definamos  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(x) = \frac{g(x)}{x}$  si  $x \neq 0$ ,  $f(0) = g'(0)$ . Estudia la derivabilidad de  $f$ . ¿Es  $f'$  continua en 0?

**240.** Sean  $f, g: ]-1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones definidas por

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{x}, \quad f(0) = 1; \quad g(x) = e^{f(x)}$$

Calcula las derivadas primera y segunda de  $f$  y  $g$  en 0 y deduce el valor del límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e + \frac{e}{2}x}{x^2}$$

**241.** Sea  $f: ]-1/2, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$  para  $x \neq 0$ , y  $f(0) = e^2$ . Estudia la continuidad y derivabilidad de  $f$  en cero.

**242.** Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones.

- $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = x^{1/(x^2-1)}$ , y  $f(1) = \sqrt{e}$ .
- $f: ]-1/2, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = (x + e^x)^{1/x}$  y  $f(0) = e^2$ .
- $f: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = (1 + x \log x)^{1/x}$ , y  $f(0) = 0$ .
- $f: ]-\pi/2, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^{1/x^2}$  y  $f(0) = e^{-1/6}$ .
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = (1 + x^2)^{\operatorname{sen}(1/x)}$ ,  $f(0) = 1$ .
- $f: ]-\pi/2, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \left( \frac{2 - 2 \cos x}{x^2} \right)^{1/x}$  para  $x \neq 0$  y  $f(0) = 1$ .

**243.** Calcula los límites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{2x} + x e^x - 2 e^{2x} + 2 e^x}{(e^x - 1)^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)}{(\log(1+x))^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log(1 + \operatorname{sen} 2x) \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{sen}^3 x)}{(e^x - 1)(1 - \cos^2(\operatorname{tg}^2 x))}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{arc} \operatorname{sen} x^2)}{(e^{2x} - 1) \log(1 + 2x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \right)^{\frac{1}{\log x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{1/x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x(1 - \cos x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3 \operatorname{sen} x - 3 x \cos x}{x^3} \right)^{1/x}$$

**Sugerencia.** Pueden usarse las reglas de L'Hôpital pero es conveniente realizar previamente alguna transformación.

244. Explica si es correcto usar las reglas de L'Hôpital para calcular los límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}.$$

*El teorema de los ceros de Bolzano, junto con el teorema de Rolle, permiten determinar en muchas ocasiones el número de ceros reales de una función.*

Se dice que **una función polinómica**  $P(x)$  **tiene un cero de orden**  $k \geq 1$  en un punto  $a$ , si el valor de  $P$  y el de sus derivadas hasta la de orden  $k - 1$  en  $a$  es cero, y la derivada de orden  $k$  de  $P$  no se anula en  $a$ . Los ceros de orden 1 se llaman **ceros simples**. El Teorema Fundamental del Álgebra dice que una función polinómica de grado  $n$  (en general, con coeficientes complejos) tiene  $n$  raíces reales o complejas *contando cada raíz tantas veces como indica su orden*. Recuerda también que las raíces complejas de un polinomio con coeficientes reales vienen por pares de raíces complejas conjugadas.

245. Prueba que una función polinómica de grado  $n$  coincide con su polinomio de Taylor de orden  $n$  centrado en un punto cualquiera  $a$ .
246. Prueba que una función polinómica  $P$  tiene un cero de orden  $k$  en  $a$  si, y sólo si, puede escribirse de la forma  $P(x) = (x - a)^k Q(x)$ , donde  $Q(x)$  es una función polinómica que no se anula en  $a$ .
247. Calcula el número de ceros y la imagen de la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$ .
248. Calcula el número de soluciones de la ecuación  $3 \log x - x = 0$ .
249. Estudia el número de soluciones reales de la ecuación  $3x^5 + 5x^3 - 30x = \alpha$  según los valores de  $\alpha$ .
250. Determina el número de soluciones reales de la ecuación  $2x^3 - 3x^2 - 12x = m$  según el valor de  $m$ .
251. Justifica que la ecuación  $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$  tiene exactamente dos soluciones reales.
252. Sea  $f$  una función polinómica que tiene un máximo relativo en  $(-3, 5)$ , un mínimo relativo en  $(1, 1)$  y un máximo relativo en  $(4, 7)$  y no tiene más puntos críticos. ¿Cuántos ceros reales tiene  $f$ ?
253. Prueba por medio del teorema de Rolle que la ecuación  $5x^4 - 4x + 1 = 0$  tiene alguna solución en  $[0, 1]$ .
254. Estudia el número de ceros reales de la función  $f(x) = 2^x - 1 - x^2$ .
255. Prueba que entre cada dos soluciones reales de la ecuación  $e^x \operatorname{sen} x = 1$  hay al menos una solución real de la ecuación  $e^x \cos x = -1$ .
256. Sean  $a_0, a_1, \dots, a_n$  números reales. Prueba que para algún  $x \in [0, 1]$  se verifica que

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1}.$$

- 257.** Sea  $f$  una función polinómica y sea  $a < b$ . Justifica que, contando cada cero tantas veces como su orden, si  $f(a)f(b) < 0$  el número de ceros de  $f$  en  $]a, b[$  es impar; y si  $f(a)f(b) > 0$  dicho número (caso de que haya algún cero) es par. Deduce que si  $f$  tiene grado  $n$ , es condición necesaria y suficiente para que  $f$  tenga  $n$  raíces reales distintas que su derivada tenga  $n - 1$  raíces reales distintas  $c_1 < c_2 < \dots < c_{n-1}$  y que para  $\alpha < c_1$  suficientemente pequeño y para  $\beta > c_{n-1}$  suficientemente grande, los signos de los números  $f(\alpha), f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_{n-1}), f(\beta)$  vayan alternando.
- 258.** Determina para qué valores de  $\alpha$  la función polinómica  $3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + \alpha$  tiene cuatro raíces reales distintas.
- 259.** Dado  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $f(x) = (x^2 - 1)^n$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). Prueba que la derivada  $k$ -ésima ( $1 \leq k \leq n$ ) de  $f$  tiene exactamente  $k$  raíces reales distintas en el intervalo  $] -1, 1[$ .
- 260.** Dado  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $f_n(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n}$ . Prueba que si  $n$  es impar la ecuación  $f_n(x) = 0$  tiene una única solución y ninguna si  $n$  es par.

*El teorema del valor medio permite acotar el incremento de una función por el incremento de la variable y una cota de la derivada. Esto da lugar a muchas desigualdades interesantes. Por otra parte, algunas de las desigualdades más útiles son consecuencia de la convexidad. Los siguientes ejercicios tratan de ello.*

- 261.** Sean  $0 < x < y$ . Prueba que:
- a)  $\frac{y-x}{1+y^2} < \arctan y - \arctan x < \frac{y-x}{1+x^2}$ .
- b)  $\frac{y-x}{y} < \log y - \log x < \frac{y-x}{x}$ .
- 262.** Sean  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  y  $0 < a < b$ . Prueba que

$$na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$$

**Aplicación.** Haciendo  $a = 1 + \frac{1}{n+1}$ ,  $b = 1 + \frac{1}{n}$ , primero en la desigualdad de la derecha y después en la desigualdad de la izquierda, deduce que:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \quad \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

- 263.** Prueba que para todo  $x > -1$  se verifica que

$$\frac{x}{x+1} \leq \log(1+x)$$

¿Cuándo se da la igualdad en la desigualdad anterior?

- 264.** Supuesto que  $a > 0$ , demuestra que  $-a$  e  $\log x \leq x^{-a}$  para todo  $x > 0$ .
- 265.** Dado  $\alpha \in ]0, 1[$ , prueba que  $x^\alpha < \alpha x + 1 - \alpha$  para todo  $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ . Deduce que, dados  $p > 0$  y  $q > 0$  tales que  $1/p + 1/q = 1$ , entonces para todos  $a > 0$  y  $b > 0$  se verifica que  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ . ¿Cuándo se da la igualdad?

**266.** Sean  $0 < a < b$ . Prueba que si  $b \leq e$  entonces  $a^b < b^a$ , y si  $e \leq a$  entonces  $b^a < a^b$ . ¿Qué puede decirse si  $a < e < b$ ?

**Sugerencia.** Considera la función  $x \mapsto \frac{\log x}{x}$ .

**267.** ¿Hay algún número  $a > 0$  que verifique que  $a^{x/a} \geq x$  para todo  $x \in \mathbb{R}^+$ ? ¿Cuál es dicho número?

**268.** Prueba que para todo  $x \in ]0, \pi/2[$  se verifica que

$$i) 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x; \quad ii) \frac{2x}{\pi} < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

**269.** Dados  $a, b \in \mathbb{R}^+$  con  $a \neq b$ , prueba que para todo  $x \in \mathbb{R}$  se verifica la desigualdad:

$$\left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{b+x} > \frac{a}{b}.$$

**270. Desigualdad de Jensen.** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa en el intervalo  $I$ , y sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Dados números  $\alpha_k > 0$ ,  $x_k \in I$  tales que  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$ , prueba que:

$$f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k).$$

Además, si  $f$  es estrictamente convexa, la desigualdad anterior es estricta siempre que al menos dos de los puntos  $x_k$  sean distintos.

**Sugerencia.** Es suficiente considerar el caso  $n = 2$  y proceder por inducción.

**271.** Sean  $x_k, \alpha_k$ , donde  $1 \leq k \leq n$ , números positivos verificando que  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$ . Usando la convexidad de la función  $x \mapsto -\log x$  demuestra la desigualdad:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$$

¿Cuándo se da la igualdad?

**272.** Sean  $p, q$  números reales positivos tales que  $1/p + 1/q = 1$ .

a) Prueba que  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$  y la igualdad ocurre si, y sólo si,  $a^p = b^q$ .

b) Dado  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$  y  $s > 0$ , definamos  $\|\mathbf{z}\|_s = \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^s\right)^{1/s}$ . Prueba que para todo  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y todo  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  en  $\mathbb{R}^n$  se verifica la **desigualdad de Hölder**:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q.$$

¿Cuándo se da la igualdad?

**Sugerencias.** El punto a) puede hacerse como consecuencia del ejercicio anterior. Para

b) hágase  $a = \frac{|x_i|}{\|\mathbf{x}\|_p}$ ,  $b = \frac{|y_i|}{\|\mathbf{y}\|_q}$  en la desigualdad del punto a).

273. Sea  $f$  es una función derivable en un intervalo  $I$ . Prueba que  $f$  es convexa en  $I$  si, y sólo si, la gráfica de  $f$  queda siempre por encima de la recta tangente en cualquier punto, es decir, para todo par de puntos  $x, a \in I$  se verifica que  $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$ .

*Los teoremas de Taylor–Young y de Taylor se usan para obtener aproximaciones polinómicas de una función dada y para calcular valores aproximados con precisión prefijada.*

274. Calcula una función polinómica  $\varphi$  tal que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \varphi(x)}{x^5} = 0$ .

275. Calcula una función polinómica  $\varphi$  tal que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x+1) - \varphi(x)}{x^2} = 0$ .

276. Prueba que las únicas funciones  $n$  veces derivables con derivada de orden  $n$  constante son las funciones polinómicas de grado menor o igual que  $n$ .

277. Prueba que el polinomio de Taylor de orden  $n$  de una función  $f$  es el único polinomio  $P(x)$  de grado menor o igual que  $n$  que verifica que  $f(x) = P(x) + o(x - a)^n$ .

278. Sea  $f: ]-\pi/2, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada para  $x \in ]-\pi/2, \pi/2[, x \neq 0$ , por:

$$f(x) = \frac{\log(1 + \operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x},$$

y  $f(0) = -1/2$ . Calcula el polinomio de Taylor de orden 3 de  $f$  en 0.

279. Sea  $f: ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada para  $x \neq 0$  por:

$$f(x) = \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg}(\log(1+x))}{\log(1+x)},$$

y  $f(0) = 1$ . Calcula el polinomio de Taylor de orden 3 de  $f$  en 0.

280. Calcula, usando un desarrollo de Taylor conveniente, un valor aproximado del número real  $\alpha$  con un error menor de  $10^{-3}$  en cada uno de los casos siguientes:

$$a) \alpha = \sqrt[3]{7} \quad b) \alpha = \sqrt{e} \quad c) \alpha = \operatorname{sen} \frac{1}{2} \quad d) \alpha = \operatorname{sen}(61^\circ)$$

*Una de las aplicaciones más comunes de las derivadas es el trazado de gráficas. Para trazar la gráfica de una función  $f$  se debe tener en cuenta:*

1. *Propiedades de simetría o de periodicidad de  $f$ .*
2. *Los puntos en que se anula la primera o la segunda derivada de  $f$  y los puntos en los que  $f$  no es derivable.*
3. *Los intervalos en que  $f'$  tiene signo constante. Lo que nos informa del crecimiento y decrecimiento de  $f$  y también de la naturaleza de los puntos singulares (máximos y mínimos locales).*
4. *Los intervalos en que la derivada segunda tiene signo constante. Lo que nos informa de la convexidad y concavidad, así como de los puntos de inflexión.*
5. *Hallar las asíntotas.*

*Asíntota vertical. La recta  $x = c$  es una asíntota vertical de la gráfica de  $f$  si alguno*



de los límites laterales de  $f$  en  $c$  es infinito.

**Asíntota horizontal.** La recta  $y = L$  es una asíntota horizontal de la gráfica de  $f$  si  $f$  tiene límite en  $+\infty$  o en  $-\infty$  igual a  $L$ .

**Asíntota oblicua.** Si  $f$  es una función racional con el grado del numerador una unidad mayor que el grado del denominador, entonces puede escribirse de la forma

$$f(x) = mx + b + g(x)$$

donde  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ . En tal caso la recta  $y = mx + b$  es una asíntota oblicua de la gráfica de  $f$ .

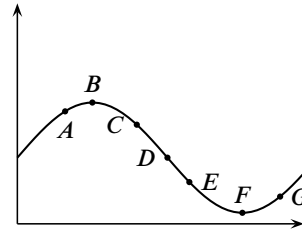
**6.** Dibujar máximos, mínimos, puntos de inflexión, cortes con los ejes y cortes con las asíntotas.

**281.** Dibuja las gráficas de las funciones siguientes:

- |  |  |
|--|--|
| a) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$                      | b) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$          |
| c) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$           | d) $f(x) =  x ^{2x}$                         |
| e) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}(x-2)^2}{x^{2/3}}$ | f) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$                  |
| g) $f(x) = \frac{(x-6)^{2/3}}{x^2 - x - 2}$      | h) $f(x) = 2x^2 \log x  - 5x^2, f(0) = 0$    |
| i) $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$            | j) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 5}{(x+1)(x-2)}$ |
| k) $f(x) = \log(2 + \sin x)$                     |  |

**282.** La figura de la derecha muestra la gráfica de una función  $f$  dos veces derivable. Estudia el signo de la primera y la segunda derivada de  $f$  en cada uno de los puntos indicados.

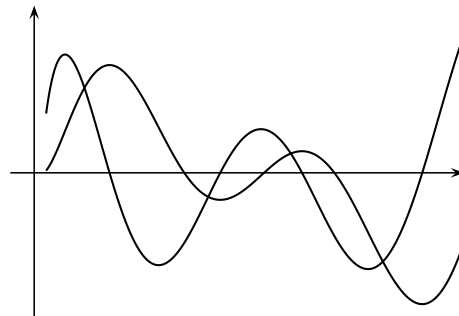
Si suponemos que un móvil se mueve a lo largo de una línea recta y que la gráfica muestra su distancia al origen en el tiempo  $t$ . Indica, a la vista de la gráfica y de forma aproximada:



- Cuándo se está alejando o acercando al origen.
- Cuándo está acelerando y cuándo está frenando.

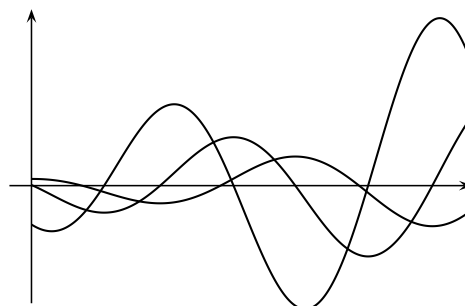
**283.**

La figura de la derecha muestra la gráfica de una función y de su derivada. Debes identificar cada una de ellas y explicar las relaciones entre ambas gráficas.



284.

La figura de la derecha muestra la gráfica de una función y de sus dos primeras derivadas. Debes identificar cada una de ellas y explicar las relaciones entre dichas gráficas.



285. Traza la gráfica de una función  $f$  dos veces derivable en  $\mathbb{R}$ , sabiendo que:

- La gráfica de  $f$  pasa por los puntos  $(-2, 2)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$ .
- $f'$  es positiva en los intervalos  $]-\infty, -2[$  y  $]0, 2[$ , y es negativa en  $]-2, 0[$  y  $]2, +\infty[$ .
- $f''$  es negativa en los intervalos  $]-\infty, -1[$  y  $]1, +\infty[$ , y es positiva en el intervalo  $]-1, 1[$ .

286. a) ¿Es cierto que los puntos donde se anula la derivada segunda son puntos de inflexión?

- b) ¿Qué puedes decir de los puntos de inflexión de una función polinómica de grado 2 o 3?

Justifica tus respuestas.

287. ¿Es cierto que la gráfica de toda función polinómica de grado par tiene tangente horizontal en algún punto? ¿Y si el grado es impar? Justifica tus respuestas.

*Consideraremos ahora el problema de hallar el máximo o mínimo absolutos de una función continua  $f$  en un intervalo cerrado  $[a, b]$ . Para ello puede seguirse el siguiente procedimiento:*

**Paso 1.** Hallar todos los puntos  $x$  de  $[a, b]$  que o bien son puntos singulares de  $f$  o son puntos en los que  $f$  no es derivable.

**Paso 2.** Calcular el valor de  $f$  en cada uno de los puntos obtenidos en el Paso 1 y también en  $a$  y en  $b$ .

**Paso 3.** Comparar los valores obtenidos en el Paso 2. El mayor de todos ellos será el máximo absoluto de  $f$  en  $[a, b]$  y el menor será el mínimo absoluto de  $f$  en  $[a, b]$ .

288. Calcula los valores máximo y mínimo de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

- $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$  en el intervalo  $[-2, 2]$ .
- $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$  en el intervalo  $[-1, 2]$ .
- $f(x) = \frac{1}{2}(\sin^2 x + \cos x) + 2 \sin x - x$  en el intervalo  $[0, \pi/2]$ .
- $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(5-2x)$  en el intervalo  $[-1, 2]$ .

5.  $f(x) = -x^3 + 12x + 5$  en el intervalo  $[-3, 3]$ .

**289.** Para cada número real  $t$  sea  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + t^2x$ . Calcula, para cada valor de  $t \in [-1, 1]$ , el mínimo valor de  $f(x)$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

*Cuando una función no está definida en un intervalo cerrado hay que estudiar el signo de la derivada si queremos calcular máximos o mínimos absolutos cuya existencia habrá que justificar.*

**290.** Definamos  $f(x) = 5x^2 + \alpha x^{-5}$ , donde  $\alpha > 0$  es una constante. Calcula el valor más pequeño de  $\alpha$  tal que  $f(x) \geq 21$  para todo  $x > 0$ .

**291.** Calcula el mínimo valor de  $\sum_{k=1}^n (x - a_k)^2$  donde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son números reales dados.

**292.** Calcula la imagen de  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ .

**293.** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = e^{-1/x^2}$  para  $x \neq 0$ , y  $f(0) = 0$ . Estudia la continuidad y derivabilidad de  $f$  y calcula su imagen.

**294.** Dado  $a \neq 0$ , definamos, para  $x \neq 1/a$ , la función:

$$f(x) = \arctan a + \arctan x - \arctan \frac{a+x}{1-ax}.$$

Calcula la imagen de  $f$ .

*Acabamos esta larga relación con algunos ejercicios que me ha parecido que no encajaban propiamente en ninguno de los apartados anteriores.*

**295.** Supongamos que  $f$  es una función derivable en  $a$  con  $f(a) \neq 0$ . Calcula el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(a+x)}{f(a)} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

**296.** Sea  $f$  dos veces derivable en  $a$ . Calcula el límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}.$$

**297.** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivable y  $f'$  creciente. Prueba que la función  $g: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada para todo  $x \in ]a, b[$  por

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

es creciente.

**298.** Sea  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable verificando que  $f(0) = 0$  y que  $|f'(x)| \leq |f(x)|$  para todo  $x \in [0, 1]$ . Prueba que  $f(x) = 0$  para todo  $x \in [0, 1]$ .

- 299.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$  y derivable dos veces en  $]a, b[$ . Supongamos que el segmento de extremos  $(a, f(a))$ ,  $(b, f(b))$  corta a la gráfica de  $f$  en un punto  $(c, f(c))$  con  $a < c < b$ . Demuestra que existe algún punto  $d \in ]a, b[$  tal que  $f''(d) = 0$ .
- Sugerencia. Interpreta gráficamente el enunciado.
- 300.** Justifica que existe una función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivable y que verifica que  $g(x) + e^{g(x)} = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Calcula  $g'(1)$  y  $g'(1 + e)$ .
- 301.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 17$ . Prueba que  $f$  es una biyección y estudia la derivabilidad de  $f^{-1}$ .
- 302.** Justifica que hay una función derivable  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para todo  $x \in \mathbb{R}$  verifica que  $(\varphi(x))^5 + \varphi(x) + x = 0$ .
- 303.** Sea  $f$  una función derivable que no se anula en ningún punto. Justifica que la función  $h(x) = \log |f(x)|$  es derivable y calcula su derivada.
- 304.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  verificando que  $f(x + y) = f(x)f(y)$  para todos  $x, y \in \mathbb{R}$ ;  $f(0) \neq 0$  y  $f$  es derivable en 0. Justifica que  $f$  es derivable en todo punto y hay un número real  $\alpha$  tal que  $f(x) = e^{\alpha x}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- 305.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función dos veces derivable y tal que para todo  $x \in \mathbb{R}$  se verifica la igualdad  $f''(x) + f(x) = 0$ . Prueba que existen números  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , únicos, de manera que  $f(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Sugerencia. Define  $h(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x$  y considera la función

$$g(x) = (f(x) - h(x))^2 + (f'(x) - h'(x))^2.$$

Calcula  $g'(x)$ .

- 306.** Prueba la llamada “fórmula de Machin”:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

Sugerencia. Sea  $A = \arctan 1/5$ ,  $B = 4A - \pi/4$ . Calcula  $\tan B$ .

Utiliza la fórmula de Machin para calcular  $\pi$  con cinco cifras decimales exactas.

- 307.** Sea  $f$  una función polinómica de grado  $n$  tal que  $f^{(k)}(a) \geq 0$  para  $1 \leq k \leq n$  y  $f(a) > 0$ . Justifica que si  $f(c) = 0$ , entonces  $c < a$ .
- 308.** Sea  $f$  derivable en  $[a, b]$  con  $f'(a) = f'(b) = 0$ . Prueba que hay algún  $z \in ]a, b[$  tal que  $f'(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$ .

Sugerencia. Sea  $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  para  $a < x \leq b$ . Define convenientemente  $g(a)$  y compara  $g'(b)$  con  $\frac{g(b) - g(a)}{b - a}$ .

## 6.7.2. Ejercicios resueltos

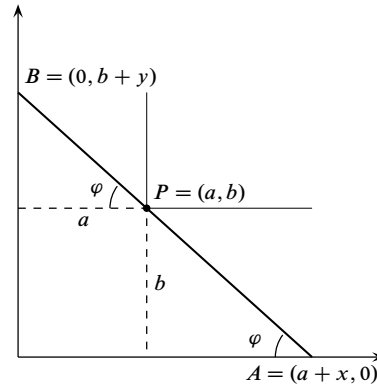
¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

**Ejercicio resuelto 95** Dado un punto  $P = (a, b)$  situado en el primer cuadrante del plano, determinar el segmento con extremos en los ejes coordenados y que pasa por  $P$  que tiene longitud mínima.

**Solución.**

En un ejercicio como este *lo primero que hay que hacer es elegir la variable* en función de la cual vamos a calcular la longitud del segmento  $\overline{AB}$ . Tomando como variable  $\varphi$ , es decir, la medida en radianes del ángulo indicado en la figura, la longitud del segmento  $\overline{AB}$  viene dada por

$$f(\varphi) = \frac{b}{\operatorname{sen} \varphi} + \frac{a}{\operatorname{cos} \varphi} \quad (0 < \varphi < \pi/2)$$



Debemos calcular el mínimo absoluto de  $f$ . Tenemos que:

$$f'(\varphi) = \frac{-b \operatorname{cos} \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi} + \frac{a \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{cos}^2 \varphi}$$

Se obtiene enseguida que  $f'(\varphi)$  se anula en un *único* punto  $\varphi_0 \in ]0, \pi/2[$  que viene dado por la condición  $\operatorname{tg}(\varphi_0) = \sqrt[3]{b/a}$ . Se justifica fácilmente que  $f$  tiene en  $\varphi_0$  un mínimo absoluto.

En efecto, como  $f'$  es continua y no se anula en los intervalos  $]0, \varphi_0[$  y  $]\varphi_0, \pi/2[$ , debe tener signo constante en ellos. Como  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(\varphi) = -\infty$ , y  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} f'(\varphi) = +\infty$  se sigue que:

$$\varphi \in ]0, \varphi_0[ \implies f'(\varphi) < 0, \quad \varphi \in ]\varphi_0, \pi/2[ \implies f'(\varphi) > 0$$

por tanto,  $f$  es estrictamente decreciente en  $]0, \varphi_0[$  y estrictamente creciente en  $]\varphi_0, \pi/2[$ , lo que implica que  $f(\varphi_0) \leq f(\varphi)$  para todo  $\varphi \in ]0, \pi/2[$ .

Para calcular la longitud mínima  $f(\varphi_0)$ , basta tener en cuenta que:

$$1 + \operatorname{tg}^2(\varphi_0) = \frac{1}{\operatorname{cos}^2(\varphi_0)} = 1 + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2} \implies \frac{a}{\operatorname{cos}(\varphi_0)} = a^{2/3} (a^{2/3} + b^{2/3})^{1/2}$$

Fácilmente se obtiene ahora que  $\frac{b}{\operatorname{sen}(\varphi_0)} = b^{2/3} (a^{2/3} + b^{2/3})^{1/2}$  con lo que la longitud mínima buscada viene dada por:

$$f(\varphi_0) = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$$

Otra forma de calcular la longitud del segmento  $\overline{AB}$  consiste en considerar la ecuación general de las rectas que pasan por el punto  $P = (a, b)$ . Dicha ecuación general es de la

forma  $y = \lambda(x - a) + b$ , donde  $\lambda$  es un parámetro. Las intersecciones de dicha recta con los ejes son los puntos  $A = (a - b/\lambda, 0)$  y  $B = (0, -a\lambda + b)$ . Por tanto, la longitud del segmento  $\overline{AB}$  viene dada por:

$$g(\lambda) = \sqrt{\left(a - \frac{b}{\lambda}\right)^2 + (b - a\lambda)^2} \quad (\lambda < 0)$$

Otra forma de calcular la longitud del segmento  $\overline{AB}$  consiste en introducir las variables  $x$  e  $y$  tales que  $A = (a + x, 0)$ ,  $B = (0, b + y)$ , como se indica en la figura. La longitud del segmento  $\overline{AB}$  viene dada por  $H(x, y) = \sqrt{(a + x)^2 + (b + y)^2}$ . Esta función, aparentemente, depende de dos variables, pero dichas variables *no son independientes*, pues los puntos  $A$ ,  $P$  y  $B$  están alineados. Por semejanza de triángulos se obtiene que  $x/b = a/y$ , por lo que  $y = (ab)/x$ . En consecuencia, la longitud del segmento  $\overline{AB}$  viene dada por:  $h(x) = \sqrt{(a + x)^2 + (b + (ab)/x)^2}$  ( $x > 0$ ).

Tanto si se usa la función  $g$  como la  $h$ , debemos obtener un mínimo absoluto y, como son raíces cuadradas, es suficiente que calculemos el mínimo absoluto de la función radicando (las raíces respetan el orden en  $\mathbb{R}_0^+$ ). Es decir, las funciones  $g$  y  $h$  alcanzan su mínimo absoluto en el mismo punto en que lo alcanzan las funciones:

$$G(\lambda) = \left(a - \frac{b}{\lambda}\right)^2 + (b - a\lambda)^2 \quad (\lambda < 0); \quad H(x) = (a + x)^2 + \left(b + \frac{ab}{x}\right)^2 \quad (x > 0)$$

Comprueba que, de cualquier forma que lo hagas, vuelves a obtener la solución anterior.

**Comentario.** Una forma equivalente de enunciar este ejercicio es la siguiente: Calcula la longitud de la escalera más larga que llevada en posición horizontal puede pasar por la esquina que forman dos corredores de anchuras respectivas  $a$  y  $b$ .

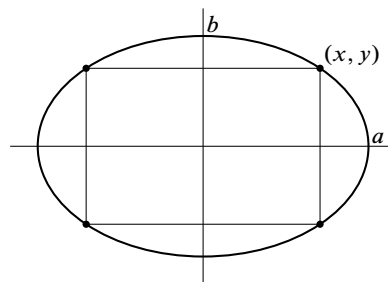
Es evidente que la longitud de la escalera tiene que ser *menor o igual* que la longitud de *cualquier* segmento  $\overline{AB}$  como el de la figura. Por tanto, la longitud de la escalera *más larga* que puede pasar es igual a la *longitud mínima* del segmento  $\overline{AB}$ . ☺

**Ejercicio resuelto 96** Determina el rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados, inscrito en la elipse de ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , y que tenga área máxima.

**Solución.**

Por razones de simetría, es suficiente determinar el vértice del rectángulo situado en el primer cuadrante. Si las coordenadas de dicho vértice son  $(x, y)$ , entonces el área del rectángulo será igual a  $4xy$ . Como el vértice debe estar en la elipse, sus coordenadas  $x$  e  $y$  deberán satisfacer la igualdad  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Deducimos que  $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ . Por tanto, se trata de calcular el máximo absoluto de la función  $f(x) = x b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ , donde  $0 \leq x \leq a$ .



Como se trata de una función positiva, para calcular el valor en que alcanza su máximo podemos elevarla al cuadrado. En definitiva, nuestro problema es calcular el máximo absoluto de la función  $h(x) = x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$  en el intervalo  $[0, a]$ . Tenemos que

$$h'(x) = 2x \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + x^2 \frac{-2x}{a^2} = 2x - \frac{4x^3}{a^2}.$$

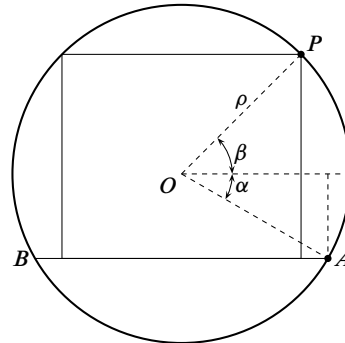
Los puntos críticos de  $h$  son  $x = 0$  que corresponde a un mínimo y  $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$  que corresponde a un máximo absoluto (justificación: la función  $h(x)$  se anula en los extremos del intervalo  $[0, a]$  y es positiva en  $]0, a[$  por lo que su máximo absoluto en  $[0, a]$  tiene que alcanzarse en un punto del intervalo abierto  $]0, a[$  en el cual debe anularse su derivada. Pero el único punto que cumple estas condiciones es  $a/\sqrt{2}$ ).

El rectángulo pedido es el que tiene de vértices  $\left(\pm \frac{a}{\sqrt{2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ , y su área vale  $2ab$ . ☺

**Ejercicio resuelto 97** Calcula el área máxima de un rectángulo que tiene dos vértices sobre una circunferencia y su base está sobre una cuerda dada de dicha circunferencia.

**Solución.**

Sea  $\rho$  el radio de la circunferencia y  $\overline{BA}$  la cuerda. Pongamos  $A = (\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha)$  que es un dato conocido. Observa que  $-\pi/2 < \alpha \leq 0$ . Hay que calcular un punto  $P = (\rho \cos \beta, \rho \sin \beta)$  por la condición de que el rectángulo de la figura tenga máxima área. La altura,  $h$ , del rectángulo viene dada por  $h = \rho(\sin \beta - \sin \alpha)$ , y la base,  $b$ , por  $b = 2\rho \cos \beta$ . Observa que la longitud de la base del rectángulo no puede ser mayor que la longitud de la cuerda  $\overline{BA}$ , lo que implica que  $\cos \beta \leq \cos \alpha = \cos(-\alpha)$ . Como el coseno es decreciente en el intervalo  $[0, \pi/2]$ , deberá ser  $\beta \geq -\alpha$ . Debemos calcular el máximo absoluto de  $2\rho^2 \cos \beta(\sin \beta - \sin \alpha)$  donde  $-\alpha \leq \beta \leq \pi/2$ . Pongamos, por comodidad,  $\beta = x$  y prescindamos del factor  $2\rho^2$ . Sea



$$f(x) = \cos x(\sin x - \sin \alpha) \quad -\alpha \leq x \leq \pi/2 \quad (\text{donde } -\pi/2 < \alpha \leq 0)$$

Tenemos que  $f'(x) = -\sin x(\sin x - \sin \alpha) + \cos^2 x = -2\sin^2 x + \sin \alpha \sin x + 1$ . Haciendo  $t = \sin x$  tenemos que  $f'(x) = 0$  equivale a que  $-2t^2 + t \sin \alpha + 1 = 0$ . Esta ecuación tiene dos raíces reales que vienen dadas por

$$t_0 = \frac{\sin \alpha - \sqrt{\sin^2 \alpha + 8}}{4}, \quad t_1 = \frac{\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + 8}}{4}$$

Además, como

$$\left| \frac{\operatorname{sen} \alpha \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha + 8}}{4} \right| < \frac{1 + \sqrt{9}}{4} = 1$$

Tenemos que  $-1 < t_0 < 0 < t_1 < 1$ . Por tanto, la derivada  $f'$  se anula en dos únicos puntos que vienen dados por:

$$\beta_0 = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left( \frac{\operatorname{sen} \alpha - \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha + 8}}{4} \right), \quad \beta_1 = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left( \frac{\operatorname{sen} \alpha + \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha + 8}}{4} \right)$$

Tenemos que  $-\pi/2 < \beta_0 < 0 < \beta_1 < \pi/2$ . Como  $-2t^2 + t \operatorname{sen} \alpha + 1$  es una parábola hacia abajo, toma valores positivos entre sus dos raíces, es decir  $-2t^2 + t \operatorname{sen} \alpha + 1 > 0$  para  $t_0 < t < t_1$ . Lo que implica que  $f'(x) > 0$  para  $\beta_0 < x < \beta_1$ .

Como  $f'(\pi/2) = \operatorname{sen} \alpha - 1 < 0$  y  $f'$  no se anula en  $]\beta_1, \pi/2]$ , concluimos que  $f'$  debe ser negativa en dicho intervalo y, por tanto  $f$  es estrictamente decreciente en  $[\beta_1, \pi/2]$ .

A la vista de los resultados anteriores, debemos distinguir dos casos:

a)  $-\alpha \leq \beta_1$ . En este caso,  $f$  es creciente en  $[-\alpha, \beta_1]$  y decreciente en  $[\beta_1, \pi/2]$ , por lo que el máximo absoluto de  $f$  en  $[-\alpha, \pi/2]$  se alcanza en  $\beta_1$ .

b)  $\beta_1 < -\alpha$ . En este caso,  $f$  es estrictamente decreciente en  $[-\alpha, \pi/2]$  por lo que el máximo absoluto de  $f$  en  $[-\alpha, \pi/2]$  se alcanza en  $-\alpha$ .

Finalmente, se comprueba con facilidad que la desigualdad  $0 \leq -\alpha \leq \beta_1$ , equivale a  $0 \leq -\operatorname{sen} \alpha \leq 1/\sqrt{3}$ , esto es,  $-\operatorname{arc} \operatorname{sen}(1/\sqrt{3}) \leq \alpha \leq 0$ .

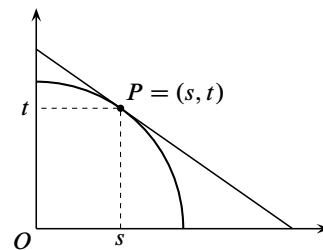
Observa que si  $\alpha = 0$ , entonces  $\beta = \operatorname{arc} \operatorname{sen}(\sqrt{2}/2) = \pi/4$ , es decir, en este caso el rectángulo es la mitad del cuadrado inscrito en la circunferencia. ☺

**Ejercicio resuelto 98** Encuentra un punto  $P$  de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  con coordenadas positivas y tal que el triángulo cuyos vértices son  $(0, 0)$  y las intersecciones de la tangente a la circunferencia en  $P$  con los ejes coordenados tenga área mínima.

**Solución.**

Sean  $(s, t)$  las coordenadas de  $P$ . La ecuación de la recta tangente a la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  en  $P$  es  $xs + yt = 1$ , cuyos cortes con los ejes son los puntos  $A = (0, 1/t)$ ,  $B = (1/s, 0)$ . Por tanto el área del triángulo  $AOB$  es igual a

$$\frac{1}{2} \frac{1}{s} \frac{1}{t} = \frac{1}{2} \frac{1}{s\sqrt{1-s^2}}$$



Para calcular su valor mínimo, como se trata de una función positiva, podemos elevarla al cuadrado para simplificar los cálculos. En definitiva, nuestro problema se reduce a calcular el mínimo de la función  $f(s) = \frac{1}{s^2(1-s^2)}$  en el intervalo  $]0, 1[$ .

Derivando tenemos  $f'(s) = 2 \frac{2s^2 - 1}{s^3(1-s^2)^2}$ . Por tanto el único cero de la derivada en el intervalo  $]0, 1[$  es  $s = 1/\sqrt{2}$ . Como para  $0 < s < 1/\sqrt{2}$  se tiene que  $f'(s) < 0$ , y

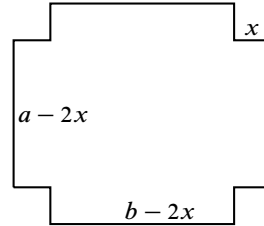


para  $1/\sqrt{2} < s < 1$  es  $f'(s) > 0$ , deducimos que en el punto  $1/\sqrt{2}$  hay un mínimo absoluto de  $f$ . El punto  $P = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  es, por tanto, el que proporciona el triángulo de mínima área. ☺

**Ejercicio resuelto 99** Se quiere construir una caja sin tapa con una lámina metálica rectangular cortando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse de tal modo si los lados de la lámina rectangular miden: a) 10 cm. y 10 cm. b) 12 cm. y 18 cm.

**Solución.**

Sean  $a$  y  $b$  las longitudes de los lados de la lámina y  $x$  la longitud del lado del cuadrado que se cortará en cada esquina. Supongamos que  $a \leq b$ . El volumen de la caja resultante es  $f(x) = (a - 2x)(b - 2x)x$ . Se trata de calcular el máximo absoluto de la función  $f$  en el intervalo  $[0, a/2]$ . Derivando resulta  $f'(x) = 12x^2 - 4(a + b)x + ab$ . Los ceros de la derivada son



$$\alpha = \frac{1}{6} \left( a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - ab} \right), \quad \beta = \frac{1}{6} \left( a + b + \sqrt{a^2 + b^2 - ab} \right)$$

Fíjate que:

$$a^2 + b^2 - ab > a^2 + b^2 - 2ab = (b - a)^2 \geq 0 \implies \sqrt{a^2 + b^2 - ab} > b - a.$$

Deducimos que las raíces de  $f'$  son reales. Veamos si dichas raíces están en el intervalo  $[0, a/2]$ . Tenemos que:

$$\alpha = \frac{1}{6} \left( a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - ab} \right) < \frac{1}{6} (a + b - (b - a)) = \frac{a}{3}$$

También:

$$a^2 + b^2 - ab < a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2 \implies \sqrt{a^2 + b^2 - ab} < a + b \implies \alpha > 0.$$

Por tanto  $0 < \alpha < a/3$  y  $\alpha \in ]0, a/2[$ . Comprobemos que  $\beta \geq a/2$ .

$$\frac{1}{6} \left( a + b + \sqrt{a^2 + b^2 - ab} \right) \geq \frac{a}{2} \iff \sqrt{a^2 + b^2 - ab} \geq 2a - b$$

Si  $2a - b \leq 0$ , esta desigualdad es trivialmente cierta. Supongamos que  $2a - b > 0$ . En tal caso, elevando al cuadrado ambos lados, la desigualdad anterior equivale a la siguiente:

$$a^2 + b^2 - ab \geq 4a^2 - 4ab + b^2 \iff 3a(b - a) \geq 0$$

Lo cual es cierto porque se ha supuesto que  $a \leq b$ , luego  $\beta \notin ]0, a/2[$ .

Por el teorema de Weierstrass, sabemos que  $f$  alcanza un máximo absoluto en algún punto  $x_0 \in [0, a/2]$ . Como  $f(0) = f(a/2) = 0$  y  $f(x) > 0$  para  $0 < x < a/2$ , debe ser  $x_0 \in ]0, a/2[$ . En consecuencia,  $x_0$  también es un extremo relativo de  $f$  en  $[0, a/2]$  por lo que la derivada de  $f$  debe anularse en  $x_0$ . Pero el único punto del intervalo  $[0, a/2]$  en el que se anula la derivada de  $f$  es  $\alpha$ . Concluimos así que  $x_0 = \alpha$ .

Con unos sencillos cálculos se obtiene

$$f(\alpha) = \frac{1}{54}(-2a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 2b^3 + 2(a^2 - ab + b^2)^{3/2})$$

**Comentario.** Otra forma de razonar este ejercicio, algo más indirecta pero con la que te ahorras trabajo, es como sigue.

Como  $f(0) = f(a/2) = 0$ , podemos aplicar el teorema de Rolle, para obtener que la derivada de  $f$  tiene que anularse en algún punto de  $]0, a/2[$ . Además,  $f$  tiene que alcanzar en un punto  $x_0$  de  $[0, a/2]$  un máximo absoluto y como, evidentemente,  $x_0 \in ]0, a/2[$ , deducimos que  $f'$  debe anularse en  $x_0$ . Luego o bien es  $x_0 = \alpha$  o es  $x_0 = \beta$ . El criterio de la derivada segunda nos permite salir de dudas. Tenemos que  $f''(x) = -4(a + b - 6x)$ . Con ello,

$$f''(\alpha) = -4(a + b - 6\alpha) = -4\sqrt{a^2 + b^2 - ab}, \quad f''(\beta) = -4(a + b - 6\beta) = 4\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$$

Por tanto,  $f''(\alpha) < 0$  y  $f''(\beta) > 0$ . Deducimos así que el punto  $\alpha$  está en el intervalo  $]0, a/2[$  y en él la función  $f$  alcanza su máximo absoluto en  $[0, a/2]$ .

Alternativamente, puedes estudiar el signo de la primera derivada. Escribiendo  $f'(x) = 12(x - \alpha)(x - \beta)$ , se sigue que  $f'(x) < 0$  si  $x \in ]\alpha, \beta[$  y  $f'(x) > 0$  si  $x < \alpha$  o si  $x > \beta$ . Deducimos que  $f$  es creciente en el intervalo  $] -\infty, \alpha[$ , decreciente en el intervalo  $[\alpha, \beta]$  y creciente en  $[\beta, +\infty[$ . Luego en  $\alpha$  hay un máximo relativo. Ahora hay que justificar que  $\alpha$  está en  $[0, a/2]$  y que es el punto donde  $f$  alcanza su máximo absoluto en dicho intervalo. ☺

**Ejercicio resuelto 100** Calcular las dimensiones (radio y altura) de una lata cilíndrica de un litro de capacidad cuya superficie total sea mínima.

**Solución.** Sea  $r$  el radio y  $h$  la altura medidos en decímetros. Como el volumen es  $1 \text{ dcm}^3$ , tenemos que  $\pi r^2 h = 1$ , de donde  $h = \frac{1}{\pi r^2}$ . La superficie total de la lata es

$$f(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}. \text{ Se trata, por tanto, de calcular el máximo absoluto de}$$

$$f(r) \text{ cuando } r > 0. \text{ Derivando, } f'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2} = 2\frac{2\pi r^3 - 1}{r^2}. \text{ Deducimos que la de-}$$

rivada tiene un único cero real  $\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ . Como para  $0 < r < \alpha$  es  $f'(r) < 0$ , se sigue

que  $f$  es decreciente en el intervalo  $]0, \alpha[$ ; y como para  $\alpha < r$  es  $f'(r) > 0$ , se sigue que  $f$  es creciente en el intervalo  $[\alpha, +\infty[$ . En consecuencia  $f(\alpha) \leq f(r)$  para todo  $r > 0$ .

Así, las dimensiones de la lata con mínima superficie lateral son  $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \cong 0,542 \text{ dcm}$ , y  $h \cong 1,1 \text{ dcm}$ . ☺

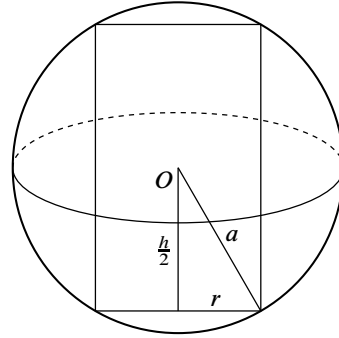
**Ejercicio resuelto 101** Hallar el volumen del cilindro circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio ( $a > 0$ ).

**Solución.**

La relación entre el radio de la esfera  $a$ , el radio de la base del cilindro,  $r$ , y la altura del cilindro,  $h$ , viene dada, como se deduce de la figura, por  $a^2 = r^2 + \frac{h^2}{4}$ . El volumen del cilindro viene dado

por  $\pi r^2 h = \pi \frac{4a^2 - h^2}{4} h$ . El problema se reduce a

calcular el máximo absoluto de  $f(h) = 4a^2 h - h^3$  en el intervalo  $[0, 2a]$ . Tenemos que  $f'(h) = 4a^2 - 3h^2$ . Como la función  $f$  es positiva en  $]0, 2a[$  y se anula en los extremos del intervalo, deducimos, por un razonamiento ya varias veces repetido, que el único cero que tiene la derivada en el intervalo  $]0, 2a[$ , es decir, el punto,  $\alpha = 2a/\sqrt{3}$ , corresponde a un máximo absoluto de  $f$  en  $[0, 2a]$ . ☺



**Ejercicio resuelto 102** Hallar el volumen del cono circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio ( $a > 0$ ).

**Solución.**

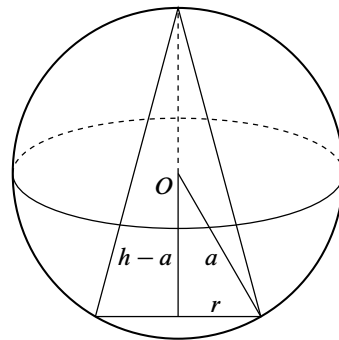
Sean  $r$  y  $h$  el radio y la altura del cono. Tenemos que

$$(h - a)^2 + r^2 = a^2$$

es decir,  $r^2 = a^2 - (h - a)^2$ . El volumen del cilindro viene dado por  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(a^2 - (h - a)^2)h$ . El problema se reduce a calcular el máximo absoluto de

$$f(h) = \frac{1}{3}\pi(a^2 - (h - a)^2)h = \frac{\pi}{3}h^2(2a - h)$$

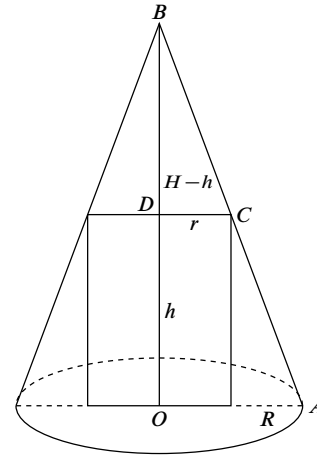
en el intervalo  $[0, 2a]$ . Tenemos que  $f'(h) = \frac{\pi}{3}(4a - 3h)h$ . De donde se deduce enseguida que el cilindro de mayor volumen que puede inscribirse en la esfera dada es el de altura  $h = 4a/3$  y radio  $r = \frac{8a^2}{9}$ ; y su volumen es igual a  $\frac{32a^3\pi}{81}$ . ☺



**Ejercicio resuelto 103** Hallar el volumen del cilindro circular recto más grande que puede inscribirse en un cono circular recto de altura  $H$  y radio  $R$  conocidos.

**Solución.**

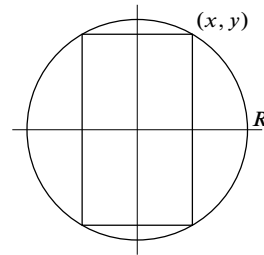
Sean  $r$  y  $h$  el radio y la altura del cilindro. Por ser los triángulos  $OAB$  y  $DCB$  semejantes, tenemos que  $\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}$ , de donde,  $h = H(1 - r/R)$ . El volumen del cilindro viene dado por  $\pi r^2 h = \pi H r^2 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$ . El problema se reduce a calcular el máximo absoluto de  $f(r) = \pi H r^2 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$  en el intervalo  $[0, R]$ . Tenemos que  $f'(r) = \frac{H\pi r(2R - 3r)}{R}$ . De donde se deduce enseguida que el cilindro de mayor volumen que puede inscribirse en el cono dado es el de radio  $r = 2R/3$  y altura  $h = H/3$ ; y su volumen es igual a  $\frac{4\pi R^2 H}{27}$ . ☺



**Ejercicio resuelto 104** La resistencia de una viga de madera de sección rectangular es proporcional a su anchura y al cuadrado de su altura. Calcular las dimensiones de la viga más resistente que puede cortarse de un tronco de madera de radio  $R$ .

**Solución.**

Sean  $x$  e  $y$  las coordenadas del vértice superior derecho de la viga. Será  $x^2 + y^2 = R^2$ . Nos dicen que la resistencia de la viga viene dada por una función de la forma  $kxy^2$  donde  $k$  es una constante. El problema consiste en calcular el máximo absoluto de  $f(x) = kx(R^2 - x^2)$  en el intervalo  $[0, R]$ . Tenemos que  $f'(x) = k(R^2 - 3x^2)$ . De donde se deduce enseguida que la viga más resistente se obtiene para  $x = R/\sqrt{3}$ , e  $y = \sqrt{\frac{2}{3}}R$ . ☺



**Ejercicio resuelto 105** Calcula la distancia mínima del punto  $(6, 3)$  a la parábola de ecuación  $y = x^2$ .

**Solución.**

La distancia del punto  $(6, 3)$  a un punto de la parábola  $(x, x^2)$  viene dada por

$$\sqrt{(x-6)^2 + (x^2-3)^2}.$$

Como se trata de una función positiva, calcularemos el punto donde el cuadrado de la distancia alcanza su mínimo absoluto. Sea

$$f(x) = (x-6)^2 + (x^2-3)^2 = 45 - 12x - 5x^2 + x^4.$$

Se trata de calcular el mínimo absoluto de  $f$  cuando  $x \in \mathbb{R}$ . Observa que, en general, una función continua en  $\mathbb{R}$  no tiene por qué alcanzar un mínimo absoluto, pero  $f$  es una *función polinómica de grado par con coeficiente líder positivo*, por lo que la existencia de un valor mínimo absoluto de  $f$  en  $\mathbb{R}$  está garantizada de antemano, aunque no vamos a usar este resultado.

Tenemos que  $f'(x) = -12 - 10x + 4x^3 = 2(x-2)(3+4x+2x^2)$ , que tiene una única raíz real  $x = 2$ . Como para  $x < 2$  se tiene que  $f'(x) < 0$  y para  $x > 2$  es  $f'(x) > 0$ , deducimos que en el punto  $x = 2$  la función  $f$  alcanza un mínimo absoluto en  $\mathbb{R}$ . Por tanto, el punto de la parábola  $y = x^2$  cuya distancia al punto  $(6, 3)$  es mínima es el punto  $(2, 4)$ . ☺

**Ejercicio resuelto 106** Una empresa tiene 100 casas para alquilar. Cuando la renta es de 80€ al mes, todas las casas están ocupadas. Por cada 4€ de incremento de la renta una casa queda deshabitada. Cada casa alquilada supone a la empresa un coste de 8€ para reparaciones diversas. ¿Cuál es la renta mensual que permite obtener mayor beneficio?

**Solución.**

Todo lo que hay que hacer es calcular la función de beneficio. Sea  $80 + x$  el precio del alquiler expresado en euros. Como es evidente que no interesa bajar la renta de 80€, se considera que  $x \geq 0$ . El beneficio mensual viene dado por

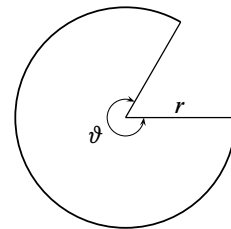
$$f(x) = \left(100 - \frac{x}{4}\right) (80 + x - 8) = 7200 + 82x - \frac{x^2}{4}$$

Tenemos que  $f'(x) = 82 - \frac{x}{2}$ . Deducimos fácilmente que para  $x = 164$  obtenemos al máximo beneficio. Es decir, cobrando un alquiler de 244€, lo que supone alquilar un total de  $100 - \frac{164}{4} = 59$  casas y dejar sin alquilar 41, la empresa obtiene el máximo beneficio  $f(164) = 13.924$ € (así es la economía capitalista. . .). ☺

**Ejercicio resuelto 107** Se proyecta un jardín en forma de sector circular de radio  $r$  y ángulo central  $\vartheta$ . El área del jardín ha de ser  $A$  fija. ¿Qué valores de  $r$  y  $\vartheta$  hacen mínimo el perímetro del jardín?

**Solución.**

El área de un sector circular de amplitud  $\vartheta$  medida en radianes y radio  $r$  es igual a  $\frac{\vartheta}{2}r^2$ , y su longitud viene dada por  $\vartheta r$ . El perímetro del jardín es igual a  $\vartheta r + 2r$ . Como debe ser  $\frac{\vartheta}{2}r^2 = A$ , es decir,  $\vartheta = \frac{2A}{r^2}$ , la función cuyo mínimo absoluto debemos obtener es  $f(r) = \frac{2A}{r} + 2r$ , donde  $r > 0$ . Como  $f'(r) = -\frac{2A}{r^2} + 2 = 2\frac{r^2 - A}{r^2}$ , se deduce fácilmente que en  $r = \sqrt{A}$   $f$  alcanza un mínimo absoluto. El valor mínimo del perímetro es igual a  $4\sqrt{A}$ . ☺



**Ejercicio resuelto 108** Se corta un alambre de longitud  $L$  formando un círculo con uno de los trozos y un cuadrado con el otro. Calcular por dónde se debe cortar para que la suma de las áreas de las dos figuras sea máxima o sea mínima.

**Solución.**

Supongamos que partimos el alambre en dos trozos de longitud  $x$  y  $L - x$ . Con el trozo de longitud  $x$  formamos un cuadrado cuya área será  $x^2/16$ , con el otro trozo formamos

un círculo cuyo radio,  $r$ , vendrá dado por  $2\pi r = L - x$ , y su area será  $\pi r^2 = \frac{(L-x)^2}{4\pi}$ .

El problema consiste en calcular los puntos donde la función  $f(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(L-x)^2}{4\pi}$  alcanza su máximo y su mínimo absolutos en el intervalo  $[0, L]$ . Tenemos que

$$f'(x) = \frac{-4L + (4 + \pi)x}{8\pi}.$$

Deducimos, estudiando el signo de la derivada, que en el punto  $x = \frac{4L}{4 + \pi}$  hay un mínimo absoluto.

Como la derivada tiene un único cero en  $]0, L[$ , deducimos que el máximo absoluto de  $f$  en  $[0, L]$  tiene que alcanzarse en uno de los extremos y, como  $f(L) = 0$ , concluimos que el valor máximo de  $f$  se alcanza para  $x = 0$  y vale  $f(0) = \frac{L^2}{4\pi}$ . ☺

**Ejercicio resuelto 109** Dados dos puntos  $A$  y  $B$  situados en el primer cuadrante del plano, calcula cuál es el camino más corto para ir de  $A$  a  $B$  pasando por un punto del eje de abscisas.

**Solución.**

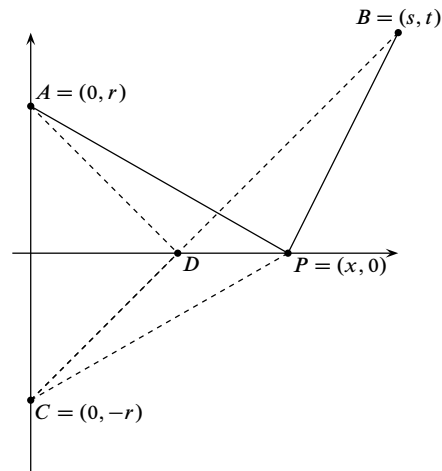
Podemos situar los puntos  $A$  y  $B$  de forma que  $A = (0, r)$  y  $B = (s, t)$  con  $r, s, t$  positivos. La longitud del camino  $APB$  viene dada por  $f(x) = \sqrt{x^2 + r^2} + \sqrt{(s-x)^2 + t^2}$ . Debemos calcular el mínimo absoluto de  $f(x)$  en el intervalo  $[0, s]$ . Tenemos que

$$f'(x) = \frac{x-s}{\sqrt{t^2 + (s-x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

Resolviendo  $f'(x) = 0$  obtenemos la solución  $\alpha = \frac{rs}{r+t}$ . (Si haces los cálculos encontrarás que  $\frac{rs}{r+t}$  es también una posible solución, pero  $f'\left(\frac{rs}{r-t}\right) \neq 0$ ).

Es inmediato que  $\alpha$  está en el intervalo  $[0, s]$ . Por tanto, los valores candidatos para ser mínimo absoluto de  $f$  en  $[0, s]$  son  $f(0)$ ,  $f(s)$  y  $f(\alpha)$ . Como  $f'(0) < 0$  y  $f'$  es continua, se sigue que  $f'(x) < 0$  en un intervalo abierto que contiene a 0. En dicho intervalo abierto la función  $f$  es decreciente, por lo que  $f(0)$  no puede ser el valor mínimo de  $f$  en  $[0, s]$ . Análogamente, como  $f'(s) > 0$  y  $f'$  es continua, se sigue que  $f'(x) > 0$  en un intervalo abierto que contiene a  $s$ , por lo que  $f(s)$  tampoco puede ser el valor mínimo de  $f$  en  $[0, s]$ . Por exclusión, concluimos que  $f(\alpha) = \sqrt{s^2 + (r+t)^2}$  es el valor mínimo de  $f$  en  $[0, s]$ .

**Comentario.** No es del todo inmediato comparar directamente los valores  $f(0)$ ,  $f(s)$  y  $f(\alpha)$  para ver cuál de ellos es el menor. Para salvar esta dificultad lo más cómodo es razonar como lo hemos hecho.



Alternativamente, puedes calcular la derivada segunda

$$f''(x) = \frac{t^2}{(t^2 + (s-x)^2)^{3/2}} + \frac{r^2}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

Como  $f''(x) > 0$ , se sigue que  $f'$  es estrictamente creciente. Luego si  $x < \alpha$  es  $f'(x) < 0$ , y si  $\alpha < x$  es  $f'(x) > 0$ ; de donde se deduce que  $f$  tiene un mínimo absoluto en  $\alpha$ .

En la figura sugiero una elegante y sencilla solución geométrica del problema. El punto  $D$  es el que proporciona el camino más corto  $\overline{AD} + \overline{DB}$ . Cualquier otro camino  $\overline{AP} + \overline{PB}$  es más largo porque un lado de un triángulo  $\overline{CB} = \overline{CD} + \overline{DB} = \overline{AD} + \overline{DB}$  es siempre más pequeño que la suma de los otros dos  $\overline{CP} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PB}$ . ☺

**Ejercicio resuelto 110** Se desea construir una ventana con forma de rectángulo coronado de un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. Pondremos cristal blanco en la parte rectangular y cristal de color en el semicírculo. Sabiendo que el cristal coloreado deja pasar la mitad de luz (por unidad de superficie) que el blanco, calcular las dimensiones de la ventana para conseguir la máxima luminosidad si se ha de mantener un perímetro constante dado.

**Solución.**

Sea  $x$  la longitud de la base de la ventana y  $h$  su altura. El perímetro es igual a una cantidad dada,  $A$ ; es decir,  $2x + h + \pi \frac{x}{2} = A$ . La luminosidad viene dada por

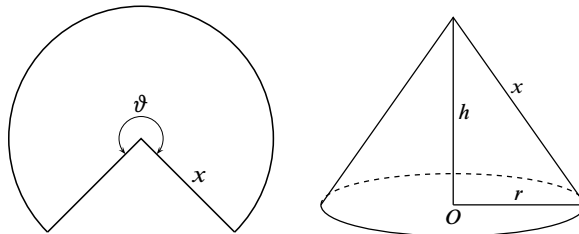
$$f(x) = 2xh + \pi \frac{x^2}{8} = x(A - x - \pi \frac{x}{2}) + \pi \frac{x^2}{8} = Ax - \frac{1}{8}(8 + 3\pi)x^2$$

La derivada  $f'(x) = A - \frac{1}{4}(8 + 3\pi)x$  se anula en  $\frac{4A}{8 + 3\pi}$  y, como  $f''(x) = -\frac{1}{4}(8 + 3\pi) < 0$ , concluimos que  $f$  alcanza un máximo absoluto en el punto  $\frac{4A}{8 + 3\pi}$ . Las dimensiones de la ventana con mayor luminosidad son por tanto  $x = \frac{4A}{8 + 3\pi}$ ,  $h = \frac{A(4 + 4\pi)}{16 + 6\pi}$ . ☺

**Ejercicio resuelto 111** Se desea confeccionar una tienda de campaña cónica de un volumen determinado. Calcular sus dimensiones para que la cantidad de lona necesaria sea mínima.

**Solución.**

Para hacer la tienda necesitamos cortar un sector circular de lona como se indica en la figura. Sea  $\vartheta$  la medida en radianes del ángulo central del sector y  $x$  la medida del radio. La cantidad de



lona que necesitamos es igual al área del sector y viene dada por  $\frac{\vartheta}{2}x^2$  (si el volumen se expresa en  $\text{m}^3$ , las demás medidas se expresarán en metros). Sea  $r$  el radio de la base de la tienda y  $h$  su altura. Nos dicen que el volumen de la tienda debe ser igual a una cantidad prefijada,  $V$ , es decir,  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ .

Nuestro problema es calcular el mínimo absoluto de  $\frac{\vartheta}{2}x^2$  sabiendo que la cantidad  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$  es conocida. Veamos que esta condición nos permite expresar  $x$  en función de  $\vartheta$ .

Observa que la longitud de la base de la tienda,  $2\pi r$ , debe ser igual a la longitud,  $\vartheta x$ , del arco circular que abarca el sector:  $\vartheta x = 2\pi r$ , de donde,  $r = \frac{\vartheta x}{2\pi}$ . Además, es evidente que  $x^2 = h^2 + r^2$ , y deducimos que

$$h^2 = x^2 - r^2 = x^2 - \frac{\vartheta^2 x^2}{4\pi^2} = x^2 \left(1 - \frac{\vartheta^2}{4\pi^2}\right) \implies h = \frac{x\sqrt{4\pi^2 - \vartheta^2}}{2\pi}$$

Por tanto

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{\vartheta^2 x^2}{4\pi^2} \frac{x\sqrt{4\pi^2 - \vartheta^2}}{2\pi} = \frac{x^3 \vartheta^2 \sqrt{4\pi^2 - \vartheta^2}}{24\pi^2}$$

Despejando  $x$ , obtenemos que  $x = \frac{2(3\pi^2 V)^{1/3}}{\vartheta^{2/3}(4\pi^2 - \vartheta^2)^{1/6}}$ . La función de la que tenemos que calcular su mínimo absoluto es

$$f(\vartheta) = \frac{\vartheta}{2}x^2 = \frac{(9\pi^4 V^2)^{1/3}}{(4\pi^2 \vartheta - \vartheta^3)^{1/3}} \quad (0 < \vartheta < 2\pi)$$

Tenemos que  $f'(\vartheta) = (9\pi^4 V^2)^{1/3} \frac{3\vartheta^2 - 4\pi^2}{3(4\pi^2 \vartheta - \vartheta^3)^{4/3}}$ , que tiene un único cero positivo

$\vartheta = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$  que corresponde, como se justifica fácilmente estudiando el signo de la derivada,

a un mínimo absoluto de  $f$ . El correspondiente valor del radio del sector es  $x = \sqrt[6]{\frac{3^5 V^2}{2\pi^2}}$

y el área,  $3\sqrt[6]{\frac{3\pi^2 V^4}{4}}$ .

Para un volumen  $V = 5 \text{ m}^3$ , la cantidad de lona necesaria es  $\approx 12,25 \text{ m}^2$ ; el radio del sector  $x \approx 2,6 \text{ m}$ , la altura de la tienda  $h \approx 2,12 \text{ m}$  y el radio de la tienda  $r \approx 1,5 \text{ m}$ . ☺

**Ejercicio resuelto 112** Se desea construir un silo, con un volumen  $V$  determinado, que tenga la forma de un cilindro rematado por una semiesfera. El costo de construcción (por unidad de superficie) es doble para la semiesfera que para el cilindro (la base es gratis). Calcúlense las dimensiones óptimas para minimizar el costo de construcción.

**Solución.**



Sea  $r$  el radio de la base y  $h$  la altura del cilindro. Nos dicen que el volumen del silo,  $\pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3$ , es un valor conocido,  $V$ , que podemos suponer expresado en  $\text{m}^3$ . Si el coste de construcción de  $1 \text{ m}^2$  de superficie del cilindro es  $\alpha$  euros, la función de coste viene dada por  $\alpha(2\pi r h) + 2\alpha(2\pi r^2)$ . De la condición  $V = \pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3$ , se sigue que  $h = -\frac{2r}{3} + \frac{V}{\pi r^2}$ . Sustituyendo este valor en la función de coste, resulta que la función que debemos minimizar es

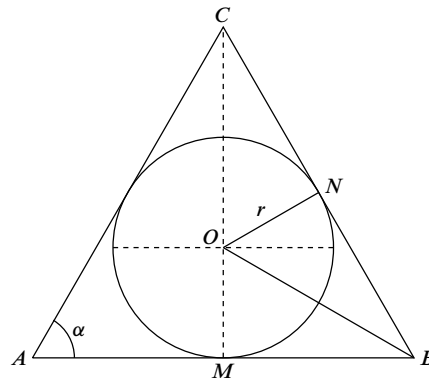
$$f(r) = \frac{8}{3} \pi r^2 \alpha + \frac{2V\alpha}{r} \quad (r > 0)$$

Tenemos  $f'(r) = \frac{2\alpha(8\pi r^3 - 3V)}{3r^2}$  que se anula para  $r = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$  en donde, como se comprueba fácilmente estudiando el signo de  $f'(r)$ , la función  $f$  alcanza un mínimo absoluto. La altura correspondiente es  $h = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$ . Para un volumen  $V = 100 \text{ m}^3$ , tenemos  $r \approx 2,3 \text{ m}$  y  $h \approx 4,6 \text{ m}$ . ☺

**Ejercicio resuelto 113** Demuestra que de todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio  $r$ , el de área mínima es el equilátero de altura  $3r$ .

**Solución.**

Sea  $\alpha$  la medida en radianes de los ángulos  $\angle CAB = \angle ABC$ . El triángulo  $\triangle ONC$  es rectángulo y  $\angle CON = \angle ABC$  por ser ángulos con lados perpendiculares. Obtenemos así que  $\cos(\alpha) = \frac{r}{OC}$ , esto es,  $OC = \frac{r}{\cos \alpha}$ . Considerando el triángulo rectángulo  $\triangle OMB$ , obtenemos  $\text{tg}(\alpha/2) = \frac{OM}{MB} = \frac{r}{MB}$ , de donde  $MB = r \cotg(\alpha/2)$ . El área del triángulo viene dada por  $MB(OC + r)$  y, sustituyendo los valores anteriores, resulta la función



$$f(\alpha) = r^2 \cotg(\alpha/2) \frac{1 + \cos \alpha}{\cos \alpha} \quad (0 < \alpha < \pi/2)$$

Como

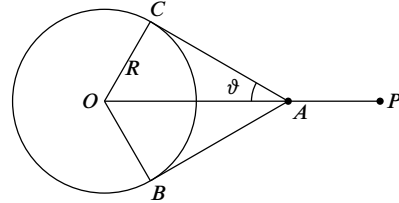
$$f'(\alpha) = r^2 \frac{(1 - 2 \cos \alpha) \cos^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha) \text{sen}^2(\alpha/2)}$$

deducimos que la derivada tiene un único cero que se obtiene cuando  $1 - 2 \cos \alpha = 0$ , lo que implica que  $\alpha = \pi/3$ . Se comprueba fácilmente, estudiando el signo de la derivada, que dicho valor corresponde a un mínimo absoluto del área. Por tanto, de todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio  $r$ , el de área mínima es el equilátero; su altura es igual a  $OC + r = \frac{r}{\cos \alpha} + r = 2r + r = 3r$  y su área vale  $3r^2 \sqrt{3}$ . ☺

**Ejercicio resuelto 114** Con una cuerda de longitud  $L$ , con un nudo corredizo en uno de sus extremos, rodeamos una columna circular de radio  $R$  haciendo pasar el otro extremo por el nudo. Calcula la máxima distancia posible del extremo libre al centro de la columna.

**Solución.**

Para hacer este ejercicio debes tener en cuenta que en los puntos donde la cuerda se separa de la columna lo hace en la dirección de la tangente a la circunferencia. En la figura se han representado los radios  $\overline{OC}$  y  $\overline{OB}$  que unen el centro de la circunferencia con los puntos de tangencia. Lo que nos piden es calcular la longitud máxima del segmento  $\overline{OP}$  conociendo la



longitud de la cuerda y el radio de la columna. Tenemos que  $\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP}$ , como el triángulo  $\triangle OCA$  es rectángulo, se verifica que  $\overline{OA} = \frac{R}{\operatorname{sen} \vartheta}$ , donde  $\vartheta$  es la medida en radianes del ángulo  $\angle OAC$ .

La longitud del arco de circunferencia desde  $C$  hasta  $B$  en sentido contrario a las agujas del reloj, es igual a  $R(\pi + 2\vartheta)$ ; además se verifica que  $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\overline{OC}}{\overline{AC}} = \frac{R}{\overline{AC}}$ . Deducimos así que

$$\overline{AP} = L - 2\overline{AC} - \widehat{CB} = L - 2R \frac{\cos \vartheta}{\operatorname{sen} \vartheta} - R(\pi + 2\vartheta)$$

Por tanto

$$f(\vartheta) = \frac{R}{\operatorname{sen} \vartheta} + L - 2R \frac{\cos \vartheta}{\operatorname{sen} \vartheta} - R(\pi + 2\vartheta) \quad 0 < \vartheta \leq \pi/2$$

es la función que nos da la longitud del segmento  $\overline{OP}$ . Calculando su derivada y simplificando resulta

$$f'(\vartheta) = R \frac{\cos \vartheta (2 \cos \vartheta - 1)}{\operatorname{sen}^2 \vartheta}.$$

La derivada se anula solamente cuando  $2 \cos \vartheta - 1 = 0$ , es decir,  $\vartheta = \pi/3$ . Se comprueba fácilmente, por ejemplo estudiando el signo de  $f'(\vartheta)$ , que dicho valor corresponde a un máximo absoluto de  $f$  en  $]0, \pi/2]$ . La longitud máxima del segmento  $\overline{OP}$  es igual a  $f(\pi/3) = L - \frac{5\pi R}{3}$ .

**Comentario.** Es claro que la longitud de la cuerda debe ser suficiente para rodear la columna, es decir,  $L \geq 2\pi R$ . Pero observa que si  $L = 2\pi R$  no podemos separarnos de la columna. Para que el ejercicio *tenga sentido* es necesario que podamos alejarnos más o menos de la columna, dependiendo de la posición del nudo corredizo, y para eso es preciso que  $L > 2\pi R$ .

Fíjate también en que  $\lim_{\substack{\vartheta \rightarrow 0 \\ \vartheta > 0}} f(\vartheta) = -\infty$ , por lo que  $f(\vartheta)$  toma valores negativos cuando  $\vartheta$  es suficientemente pequeño. Esto nos dice que la función  $f(\vartheta)$  no siempre representa la longitud del segmento  $\overline{OP}$ . De hecho, como  $\operatorname{sen} \vartheta = \frac{R}{\overline{OA}}$  y  $\overline{OA} \leq L + R$ , se sigue

que  $\sin \vartheta \geq \frac{R}{L+R}$ , lo que implica que  $\vartheta \geq \vartheta_0$  donde  $\vartheta_0 = \arcsin\left(\frac{R}{L+R}\right)$ . Estas consideraciones no afectan a la solución obtenida porque hemos calculado el máximo absoluto de  $f$  en *todo* el intervalo  $]0, \pi/2]$ , salvo por un detalle: debemos asegurarnos de que es posible separar el nudo de la columna hasta que  $\vartheta \leq \pi/3$ . Para eso *es suficiente que la longitud de la cuerda sea mayor o igual que*  $R(\pi + 2\pi/3) + 2R/\sqrt{3}$  (la longitud del arco  $\widehat{CB}$  más dos veces la longitud del segmento  $\overline{AC}$  correspondientes a  $\vartheta = \pi/3$ ). Observa que  $R(\pi + 2\pi/3) + 2R/\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}R + 5\pi R}{3} > 2\pi R$ . ☺

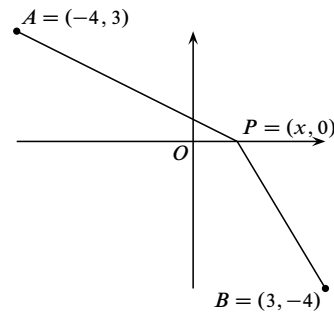
**Ejercicio resuelto 115** El principio de Fermat afirma que la luz viaja de un punto  $A$  a otro punto  $B$  siguiendo la trayectoria en la que se invierte el menor tiempo posible. Supongamos que el eje de abscisas,  $y = 0$ , separa dos medios en los que la luz viaja a distinta velocidad (por ejemplo, aire y agua). Sea  $c$  la velocidad de la luz en el semiplano superior  $y > 0$  y sea  $\frac{3}{4}c$  la velocidad en el semiplano inferior  $y < 0$ . Calcula el punto del eje de abscisas por el que pasará el rayo que viaje desde el punto  $A = (-4, 3)$  al  $B = (3, -4)$ .

**Solución.**

Se trata de calcular  $P = (x, 0)$  por la condición de que el tiempo total invertido por el rayo de luz para recorrer el camino  $\overline{APB}$  sea mínimo. Sea  $t_1$  el tiempo que tarda la luz en recorrer el segmento  $\overline{AP}$  y  $t_2$  el tiempo que tarda la luz en recorrer el segmento  $\overline{PB}$ . Tenemos que:

$$\text{longitud}(\overline{AP}) = \sqrt{(x+4)^2 + 9} = c t_1$$

$$\text{longitud}(\overline{PB}) = \sqrt{(x-3)^2 + 16} = \frac{3}{4} c t_2$$



La función cuyo mínimo debemos calcular es

$$f(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{(x+4)^2 + 9}}{c} + \frac{4\sqrt{(x-3)^2 + 16}}{3c}$$

Cuya derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{3c} \frac{3(x+4)}{\sqrt{(x+4)^2 + 9}} + \frac{1}{3c} \frac{4(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2 + 16}}$$

Es claro que  $x=0$  es un cero de la derivada. Veamos si corresponde a un mínimo absoluto de  $f(x)$ . Calculando la derivada segunda y simplificando obtenemos que

$$f''(x) = \frac{1}{3c} \frac{27}{\sqrt{((x+4)^2 + 9)^3}} + \frac{1}{3c} \frac{64}{\sqrt{((x-3)^2 + 16)^3}}$$

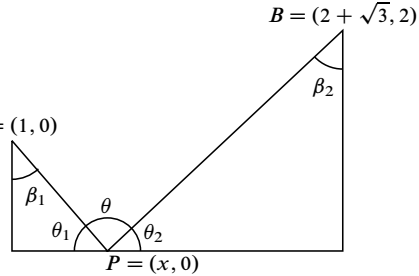
Resulta así que  $f''(x) > 0$  para todo  $x$  por lo que la derivada  $f'$  es estrictamente creciente y, al ser  $f'(0) = 0$ , se sigue que  $f'(x) < 0$  para  $x < 0$  y  $f'(x) > 0$  para  $x > 0$ , luego  $f$  es decreciente en  $]-\infty, 0]$  y creciente en  $[0, +\infty[$  y, en consecuencia,  $f$  tiene un mínimo absoluto en  $x = 0$ . ☺

**Ejercicio resuelto 116** Calcula la posición del punto  $P = (x, 0)$  en la figura de la derecha, donde  $A = (0, 1)$  y  $B = (2 + \sqrt{3}, 2)$ , para que el ángulo  $\theta$  sea máximo. ¿Cuál es dicho valor máximo de  $\theta$ ? Justifica con detalle lo que haces.

**Solución.**

Tenemos que  $\theta = \pi - \theta_1 - \theta_2$ , es decir  $\theta = (\frac{\pi}{2} - \theta_1) + (\frac{\pi}{2} - \theta_2) = \beta_1 + \beta_2$  y deducimos fácilmente que

$$\theta(x) = \arctg x + \arctg \left( \frac{2 + \sqrt{3} - x}{2} \right)$$



Derivando, tenemos

$$\theta'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1/2}{1 + \left( \frac{2 + \sqrt{3} - x}{2} \right)^2}$$

Simplificando resulta

$$\theta'(x) = \frac{9 + 4\sqrt{3} - (4 + 2\sqrt{3})x - x^2}{(1+x^2)(4 + (2 + \sqrt{3} - x)^2)}$$

Los ceros de la derivada son las raíces de  $x^2 + (4 + 2\sqrt{3})x - 4\sqrt{3} - 9 = 0$ , que vienen dadas por

$$\alpha = \frac{-4 - 2\sqrt{3} + \sqrt{(4 + 2\sqrt{3})^2 + 4(4\sqrt{3} + 9)}}{2}, \quad \beta = \frac{-4 - 2\sqrt{3} - \sqrt{(4 + 2\sqrt{3})^2 + 4(4\sqrt{3} + 9)}}{2}$$

Como  $(4 + 2\sqrt{3})^2 + 4(4\sqrt{3} + 9) = 32(2 - \sqrt{3}) = 16(4 + 2\sqrt{3}) = 16(\sqrt{3} + 1)^2$ . Naturalmente, como  $0 \leq x \leq 2 + \sqrt{3}$ , y  $\beta < 0$  se sigue que

$$\alpha = \frac{-4 - 2\sqrt{3} + \sqrt{16(\sqrt{3} + 1)^2}}{2} = \sqrt{3}$$

es el único cero de la derivada en el intervalo  $[0, 2 + \sqrt{3}]$ .

Estudiemos ahora el signo de la derivada. Como el denominador de  $\theta'(x)$  es positivo, el signo de  $\theta'(x)$  es igual al de  $9 + 4\sqrt{3} - (4 + 2\sqrt{3})x - x^2$ . Pero

$$9 + 4\sqrt{3} - (4 + 2\sqrt{3})x - x^2 = -(x - \alpha)(x - \beta)$$

que es positivo cuando  $\beta < x < \alpha$  y negativo si  $x < \beta$  o  $\alpha < x$ . Deducimos que  $\theta'(x) > 0$  si  $0 \leq x < \sqrt{3}$  y  $\theta'(x) < 0$  si  $\sqrt{3} < x \leq 2 + \sqrt{3}$ . Por tanto, la función  $\theta$  es creciente en  $[0, \sqrt{3}]$  y decreciente en  $[\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]$ . Concluimos que en  $\sqrt{3}$  la función  $\theta$  alcanza un máximo absoluto en  $[0, 2 + \sqrt{3}]$ . El valor máximo es  $\theta(\sqrt{3}) = \arctg(\sqrt{3}) + \arctg(1) = \pi/3 + \pi/4 = 7\pi/12$ . ☺

**Ejercicio resuelto 116** Calcula el límite en el punto  $a$  que en cada caso se indica de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} f(x) &= (\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x)^{1/x}, \quad a = 0; & f(x) &= (1 + \operatorname{tg} x)^{1/x^2}, \quad a = 0 \\ f(x) &= (\operatorname{cot} x)^{\operatorname{sen} x}, \quad a = 0, \pi/2; & f(x) &= \left(\operatorname{cos}^2 x + \frac{x^2}{2}\right)^{1/x^2}, \quad a = 0 \\ f(x) &= (1 + \operatorname{sen} x)^{\operatorname{cot} x}, \quad a = 0, \pi/2; & f(x) &= \frac{\log(\operatorname{sen} x)}{(\pi - 2x)^2}, \quad a = \pi/2 \\ f(x) &= \frac{x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen}^3 x}, \quad a = 0; & f(x) &= \frac{(\operatorname{tg} x)(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) - x^2}{x^6}, \quad a = 0 \\ f(x) &= \frac{e^x - \operatorname{cos} \sqrt{2}x - x}{\operatorname{tg}^2 x}, \quad a = 0; & f(x) &= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/(1-\operatorname{cos} x)}, \quad a = 0 \end{aligned}$$

**Solución.**

• El límite  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x)^{1/x}$  es de la forma  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$  cuando  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$ . Se trata, por tanto, de una indeterminación del tipo  $1^\infty$ . Estos límites suelen poderse calcular haciendo uso del criterio de equivalencia logarítmica (teorema 6.11) que, en las condiciones anteriores para  $f$  y  $g$ , nos dice que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^L &\iff \lim_{x \rightarrow a} g(x)(f(x) - 1) = L \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = 0 &\iff \lim_{x \rightarrow a} g(x)(f(x) - 1) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = +\infty &\iff \lim_{x \rightarrow a} g(x)(f(x) - 1) = +\infty \end{aligned}$$

En nuestro caso:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{cos} x - 1}{x} = 1.$$

Donde hemos usado que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x - 0} = \operatorname{cos} 0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{cos} x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{cos} x - \operatorname{cos} 0}{x - 0} = \operatorname{sen} 0 = 0 \end{aligned}$$

sin más que recordar la definición de derivada de una función en un punto. Concluimos así que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x)^{1/x} = e$$

• El límite  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{1/x^2}$  es del mismo tipo anterior. Ahora, el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \frac{1}{x \operatorname{cos} x}$$

no existe, pues

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x \operatorname{cos} x} = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x \operatorname{cos} x} = -\infty.$$

Luego  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1 + \operatorname{tg} x)^{1/x^2} = +\infty$  y  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (1 + \operatorname{tg} x)^{1/x^2} = 0$ .

- El límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \cos^2 x + \frac{x^2}{2} \right)^{1/x^2}$  es del mismo tipo que los anteriores. Tenemos ahora que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x + x^2/2 - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 x + x^2/2}{x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Luego,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \cos^2 x + \frac{x^2}{2} \right)^{1/x^2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ .

- El límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^{1/(1-\cos x)}$  es del mismo tipo que los anteriores. Tenemos ahora que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 \right) \frac{1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x(1 - \cos x)}$$

Este último límite no tiene dificultad y puede hacerse por L'Hôpital. Pero es más fácil usar los límites "bien conocidos":

$$\frac{\operatorname{sen} x - x}{x(1 - \cos x)} = \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} \frac{x^2}{1 - \cos x}.$$

Deducimos que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x(1 - \cos x)} = \frac{-1}{3}$ . Luego  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^{1/(1-\cos x)} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ .

- El límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos \sqrt{2}x - x}{\operatorname{tg}^2 x}$  es una indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$  y puede hacerse por L'Hôpital, pero antes es conveniente sustituir  $\operatorname{tg} x$  por  $x$  pues son funciones asintóticamente equivalentes para  $x \rightarrow 0$ . Escribiendo:

$$\frac{e^x - \cos \sqrt{2}x - x}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{x^2}{\operatorname{tg}^2 x} \frac{e^x - \cos \sqrt{2}x - x}{x^2}$$

y teniendo en cuenta que  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\operatorname{tg} x} \right)^2 = 1$ , basta calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos \sqrt{2}x - x}{x^2}$  lo que puedes hacer por L'Hôpital muy fácilmente.

- El límite  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\log(\operatorname{sen} x)}{(\pi - 2x)^2}$  es también una indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$  y, en principio, puede hacerse por L'Hôpital. Hazlo tú aplicando L'Hôpital. Yo voy a reducirlo a límites "bien conocidos".

Lo primero que voy a hacer es convertir el límite para  $x \rightarrow \pi/2$  en un límite para  $x \rightarrow 0$ . Para ello basta sustituir  $x$  por  $\pi/2 - x$  como sigue:

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\log(\operatorname{sen} x)}{(\pi - 2x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\operatorname{sen}(\pi/2 - x))}{(\pi - 2(\pi/2 - x))^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{4x^2}$$

Ahora, la presencia de  $x^2$  y de  $\cos x$  me sugiere escribir  $\frac{\log(\cos x)}{4x^2} = \frac{\log(\cos x)}{\cos x - 1} \frac{\cos x - 1}{x^2}$ .

El límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -1/2$  porque es uno de los límites “bien conocidos”. El límite

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{\cos x - 1} = 1$  porque también es uno de los límites “bien conocidos”, pues es de

la forma  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\log t}{t - 1}$  donde se ha sustituido  $t$  por  $\cos x$ .

Por tanto  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\log(\operatorname{sen} x)}{(\pi - 2x)^2} = -\frac{1}{2}$ .

Los restantes límites de este ejercicio te los dejo para que los hagas tú. ☺

**Ejercicio resuelto 117** Justifica que para todo  $r \in \mathbb{R}$  y para todo  $s > 0$  se verifica que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^r}{x^s} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r}{e^{sx}} = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^s |\log x|^r = 0.$$

**Solución.**

Es suficiente probar que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se verifica  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^n}{x^s} = 0$ . Podemos hacerlo por inducción. Para  $n = 1$ , tenemos, aplicando L'Hôpital por tratarse de una indeterminación  $\frac{\infty}{\infty}$ , que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^s} = \frac{1}{s} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^s} = 0.$$

Supuesto demostrado que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^n}{x^s} = 0$ , tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^{n+1}}{x^s} = \frac{n+1}{s} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^n}{x^s} = 0.$$

Lo que concluye la demostración por inducción.

Haciendo la sustitución de  $x$  por  $e^x$  en el límite anterior, obtenemos:

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^r}{x^s} = [x \leftrightarrow e^x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r}{e^{sx}}$$

Haciendo la sustitución de  $x$  por  $1/x$  en el límite primero, obtenemos:

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^r}{x^s} = [x \leftrightarrow 1/x] = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^s |\log x|^r$$

☺

**Ejercicio resuelto 117** Calcula el límite en el punto  $a$  que en cada caso se indica de las funciones  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$f(x) = \frac{x^2 \operatorname{sen} 1/x}{\log x}, \quad a = +\infty; \quad f(x) = \operatorname{sen} \sqrt{1+x} - \operatorname{sen} \sqrt{x}, \quad a = +\infty$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \quad a = 0, \quad a = +\infty; \quad f(x) = \left( \cos \frac{\pi}{x+2} \right)^{x^2}, \quad a = +\infty$$

**Solución.**

El límite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \operatorname{sen} 1/x}{\log x}$  es, de hecho, una indeterminación del tipo  $\frac{\infty}{\infty}$  y puedes intentar hacerlo por L'Hôpital. Prueba a ver qué pasa. En este caso el marqués de L'Hôpital no resuelve el límite. Pero es fácil ver que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen}(1/x) \frac{x}{\log x} = +\infty$ , porque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen}(1/x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\log x} = +\infty.$$

El límite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{sen} \sqrt{1+x} - \operatorname{sen} \sqrt{x})$  no entra dentro de ninguna de las indeterminaciones usuales. De hecho, el límite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sen} \sqrt{x}$  no existe (¿sabes probarlo?). Está claro que el límite que nos piden calcular requiere un tratamiento particular. Después de pensarlo un poco, a la vista de cómo es la función, se me ocurre usar el teorema del valor medio. Dicho teorema, aplicado a la función  $\operatorname{sen} \sqrt{x}$  en el intervalo  $[x, x+1]$ , me dice que hay algún punto  $z \in ]x, x+1[$  tal que  $\operatorname{sen} \sqrt{x+1} - \operatorname{sen} \sqrt{x} = \frac{\cos z}{2\sqrt{z}}$ , y tomando valores absolutos deducimos

$$\left| \operatorname{sen} \sqrt{x+1} - \operatorname{sen} \sqrt{x} \right| = \left| \frac{\cos z}{2\sqrt{z}} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

de donde se deduce que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{sen} \sqrt{1+x} - \operatorname{sen} \sqrt{x}) = 0$ .

El límite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \cos \frac{\pi}{x+2} \right)^{x^2}$  es una indeterminación  $1^\infty$  y aplicaremos el criterio de equivalencia logarítmica. Para ello, calculamos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \cos \left( \frac{\pi}{x+2} \right) - 1 \right) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\cos \left( \frac{\pi x}{1+2x} \right) - 1}{x^2} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\cos \left( \frac{\pi x}{1+2x} \right) - 1}{\left( \frac{\pi x}{1+2x} \right)^2} \frac{\left( \frac{\pi x}{1+2x} \right)^2}{x^2} = \frac{-\pi^2}{2} \end{aligned}$$

Luego  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \cos \frac{\pi}{x+2} \right)^{x^2} = e^{-\pi^2/2}$ . El límite que queda por hacer es inmediato. ☺

**Ejercicio resuelto 118** Sea  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en  $\mathbb{R}$  y dos veces derivable en 0 siendo, además,  $g(0) = 0$ . Definamos  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(x) = \frac{g(x)}{x}$  si  $x \neq 0$  y  $f(0) = g'(0)$ . Estudia la derivabilidad de  $f$ . ¿Es  $f'$  continua en 0?

**Solución.** Por la regla de la cadena,  $f$  es derivable en todo punto  $x \neq 0$  y, por la regla de derivación de un cociente, tenemos que  $f'(x) = \frac{x g'(x) - g(x)}{x^2}$  para  $x \neq 0$ . Para



estudiar si  $f$  es derivable en  $x = 0$  no hay otra forma de hacerlo (pero lee más abajo) que recurriendo a la definición. Tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g'(0)x}{x^2} = \frac{g''(0)}{2}$$

en virtud del teorema de Taylor-Young (si lo prefieres, puedes aplicar -¡una vez solo!- L'Hôpital). Por tanto,  $f$  es derivable en  $x = 0$  y  $f'(0) = \frac{g''(0)}{2}$ .

Estudiamos si  $f'$  es continua en  $x = 0$ . Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x g'(x) - g(x)}{x^2}$  y para calcular este límite *no* se puede aplicar L'Hôpital porque no sabemos si  $g'$  es derivable (nos dicen que  $g$  es *una* vez derivable en  $\mathbb{R}$ ). Intentaremos relacionar el cociente con las hipótesis que nos dan sobre  $g$ . Después de pensarlo un poco, parece conveniente escribir:

$$\frac{x g'(x) - g(x)}{x^2} = \frac{x g'(x) - x g'(0) + x g'(0) - g(x)}{x^2} = \frac{g'(x) - g'(0)}{x} - \frac{g(x) - g'(0)x}{x^2}$$

y deducimos que  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{g''(0)}{2}$ , luego  $f'$  es continua en  $x = 0$ .

También puedes usar para hacer este ejercicio un resultado de teoría que dice que si una función  $f$  es continua en un intervalo  $I$ ,  $a$  es un punto de  $I$ , y sabemos que  $f$  es derivable en  $I \setminus \{a\}$  y que  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = L$ , entonces  $f$  también es derivable en  $a$  con  $f'(a) = L$  y, por tanto,  $f'$  es continua en  $a$ .

Es evidente (¿o no lo es?) que la función  $f$  del ejercicio es continua en el intervalo  $I = \mathbb{R}$  y es derivable en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Como  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{g''(0)}{2}$ , esto prueba de golpe que  $f$  es derivable en  $x = 0$ , que  $f'(0) = \frac{g''(0)}{2}$  y que  $f'$  es continua en  $x = 0$ . ☺

**Ejercicio resuelto** 119 Sean  $f, g: ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones definidas por

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{x}, \quad f(0) = 1; \quad g(x) = e^{f(x)}$$

Calcula las derivadas primera y segunda de  $f$  y  $g$  en 0 y deduce el valor del límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e + \frac{e}{2}x}{x^2}$$

**Solución.** Observa que si  $x > -1$  y  $x \neq 0$  es  $g(x) = (1+x)^{1/x}$  y  $g(0) = e$ . Es claro también que  $f(x) = \log g(x)$ . El ejercicio consiste en calcular las dos primeras derivadas de  $g$  en  $x = 0$ . Por la regla de la cadena es suficiente para ello calcular las dos primeras derivadas de  $f$  en  $x = 0$ . Pues entonces  $g'(x) = e^{f(x)} f'(x)$ , y  $g''(x) = e^{f(x)} ((f'(x))^2 + f''(x))$ . Fíjate en que la función  $f$  es más sencilla que la  $g$ . De hecho, no es inmediato calcular directamente  $g'(0)$  porque el límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$  se complica un poco si

tratas de hacerlo por L'Hôpital. Las funciones como la  $g$ , esto es, las del tipo  $u(x)^{v(x)}$ , tienen derivadas complicadas.

Derivar  $f$  es fácil. El límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2} = \frac{-1}{2}$  es bien conocido. Deducimos que  $f'(0) = \frac{-1}{2}$ . Ahora, para  $x \neq 0$ , se calcula fácilmente, por la regla de derivación de un cociente, que  $f'(x) = \frac{x - \log(1+x) - x \log(1+x)}{x^2(1+x)}$ .

Tenemos

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{x - \log(1+x) - x \log(1+x) + \frac{1}{2}x^2(1+x)}{x^3(1+x)}$$

Se trata de calcular el límite para  $x \rightarrow 0$  de este cociente. Lo primero es quitar el factor  $(1+x)$  del denominador (evidentemente,  $(1+x) \sim 1$  para  $x \rightarrow 0$ ). Hecho esto, nos damos cuenta de que se trata de comparar  $x - \log(1+x) - x \log(1+x) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3$  con  $x^3$ . Utilizando el teorema de Taylor-Young (o, simplemente, recordando los polinomios de Taylor de  $\log(1+x)$  en  $x=0$ ), tenemos que:

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

Deducimos que:

$$x - \log(1+x) - x \log(1+x) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 = \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

por lo que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{2}{3}$ , es decir,  $f''(0) = \frac{2}{3}$ .

Resulta así que  $g'(0) = e^{f(0)} f'(0) = -\frac{e}{2}$  y

$$g''(0) = e^{f(0)} ((f'(0))^2 + f''(0)) = e \left( \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \right) = \frac{11}{12} e.$$

Finalmente, como consecuencia del teorema de Taylor-Young, tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e + \frac{e}{2}x}{x^2} = \frac{11}{24} e.$$

Porque dicho límite es de la forma  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0) - g'(0)x}{x^2} = \frac{1}{2}g''(0)$ . ☺

**Ejercicio resuelto 119** Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones.

1.  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = x^{1/(x^2-1)}$ , y  $f(1) = \sqrt{e}$ .
2.  $f: ]-1/2, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = (x + e^x)^{1/x}$  y  $f(0) = e^2$ .
3.  $f: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = (1 + x \log x)^{1/x}$ , y  $f(0) = 0$ .

4.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = (1 + x^2)^{\operatorname{sen}(1/x)}$  y  $f(0) = 1$ .
5.  $f: ]-\pi/2, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x^2}$  y  $f(0) = e^{-1/6}$ .
6.  $f: ]-\pi/2, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \left(\frac{2 - 2 \cos x}{x^2}\right)^{1/x}$  para  $x \neq 0$  y  $f(0) = 1$ .

**Solución.** En todos los casos nos piden estudiar la derivabilidad de una función de la forma  $F(x) = u(x)^{v(x)}$  en un punto “conflictivo” en el que no puedes aplicar las reglas de derivación. En este tipo de ejercicios la mejor forma de proceder consiste en estudiar la derivabilidad de la función  $\varphi(x) = \log F(x) = v(x) \log u(x)$  en el punto conflictivo. Para ello debes recurrir a la definición de derivada. Observa que como  $F(x) = e^{\varphi(x)}$ , la derivabilidad de  $\varphi$  equivale a la derivabilidad de  $F$ . Como en el ejercicio anterior ya hemos usado esta estrategia, un par de ejemplos más deben ser suficiente para que la comprendas bien. Consideraremos las dos últimas funciones propuestas.

5)

$$f(x) = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x^2}, \quad f(0) = e^{-1/6}$$

Tenemos que  $\varphi(x) = \log f(x) = \frac{\log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x^2}$ ,  $\varphi(0) = \log f(0) = \frac{-1}{6}$ . Tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) + \frac{1}{6}x^2}{x^3} =$$

Podemos aplicar L'Hôpital para quitar el logaritmo.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\operatorname{sen} x} \left(\frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}\right) + \frac{1}{3}x}{3x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}x^2 \operatorname{sen} x}{3x^3 \operatorname{sen} x} \end{aligned}$$

Sustituimos en el denominador  $\operatorname{sen} x$  por  $x$ . Usando que

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4), \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

deducimos que  $x \cos x - \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}x^2 \operatorname{sen} x = o(x^4)$ , por lo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}x^2 \operatorname{sen} x}{3x^4} = 0$$

Concluimos que  $\varphi$  es derivable en  $x = 0$  y  $\varphi'(0) = 0$  por lo que también  $f$  es derivable en  $x = 0$  y  $f'(0) = f(0)\varphi'(0) = 0$ .

6)

$$f(x) = \left( \frac{2 - 2 \cos x}{x^2} \right)^{1/x}, \quad f(0) = 1$$

Es más fácil estudiar la derivabilidad de  $\varphi(x) = \log f(x)$ . Nótese que al ser  $f(x) = \exp(\varphi(x))$ , en todo punto  $a$  en que sea derivable  $\varphi$  también, en virtud de la regla de la cadena, será derivable  $f$  siendo  $f'(a) = \varphi'(a) \exp(\varphi(a)) = \varphi'(a) f(a)$ . Tenemos que

$$\varphi(x) = \frac{\log \left( \frac{2 - 2 \cos x}{x^2} \right)}{x}$$

para  $x \neq 0$ , y  $\varphi(0) = 0$ . Para estudiar la derivabilidad de  $\varphi$  en  $x = 0$  consideremos el cociente:

$$H(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \frac{\log \left( \frac{2 - 2 \cos x}{x^2} \right)}{x^2}$$

Se trata de calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} H(x)$ . Puesto que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos x}{x^2} = 1 \quad (6.25)$$

el límite buscado es una indeterminación de la forma  $\frac{0}{0}$  y se dan las condiciones que permiten aplicar la regla de L'Hôpital. Tenemos entonces, supuesto que los límites en cuestión existen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 - 2 \cos x} \frac{2x^2 \sin x - 2x(2 - 2 \cos x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x + 2 \cos x - 2}{x^4}$$

donde hemos tenido en cuenta (6.25). Podemos volver a usar la regla de L'Hôpital para calcular el último límite, obteniendo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x + 2 \cos x - 2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{12x^2} = \frac{-1}{12}$$

Hemos probado así que  $f$  es derivable en 0 y  $f'(0) = -1/12$ .

**Comentario.** No debe calcularse la derivada de  $f$  en 0 aplicando la regla de L'Hôpital para calcular el límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ , pues entonces lo que haremos será calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ . La existencia de este límite, junto con la continuidad de  $f$  en 0, implican que  $f$  tiene derivada continua en 0 y eso es más de lo que se pide y, por eso mismo, suele ser más complicado. ☺

**Ejercicio resuelto** 120 Calcula los límites

- |   |  |
|---|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$   | 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right)$                                  |
| 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{2x} + x e^x - 2 e^{2x} + 2 e^x}{(e^x - 1)^3}$   | 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x \right)^{\frac{1}{\log x}}$ |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)}{(\log(1+x))^2}$  | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{1/x^2}$                             |
| 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log(1 + \operatorname{sen} 2x) \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sen}^3 x)}{(e^x - 1)(1 - \cos^2(\operatorname{tg}^2 x))}$ | 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{sen} x}{x(1 - \cos x)}$            |
| 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{arc\,sen} x^2)}{(e^{2x} - 1) \log(1 + 2x)}$   | 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3 \operatorname{sen} x - 3 x \cos x}{x^3} \right)^{1/x}$            |

**Sugerencia.** Pueden usarse las reglas de L'Hôpital pero es conveniente realizar previamente alguna transformación.

**Solución.**

1) Recuerda: antes de calcular un límite debemos simplificar todo lo que podamos la función. Tenemos que:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^2 \operatorname{sen}^2 x}$$

Como  $\operatorname{sen} x \sim x$  para  $x \rightarrow 0$ , podemos sustituir  $\operatorname{sen} x$  por  $x$  en el denominador (¡no en el numerador!). Con ello:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2} \sim \frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^4}$$

Ahora recordamos que  $x - \operatorname{sen} x \sim x^3/6$  para  $x \rightarrow 0$ , con lo cual:

$$\frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^4} = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} \quad (6.26)$$

Finalmente, deducimos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{3}$$

Observa que una descomposición como la hecha en (6.26) solamente se te ocurre si recuerdas que  $x - \operatorname{sen} x \sim x^3/6$  para  $x \rightarrow 0$  (que es uno de los límites que debes saber de memoria). En general, descomponer una función en producto (o en suma) de otras dos solamente debe hacerse si sabes el comportamiento de cada una de las nuevas funciones. Hay que tener cuidado en esto porque es fácil equivocarse. Por ejemplo, podríamos haber puesto:

$$\frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^4} = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x^2}$$

Con lo que introducimos una función  $\frac{x + \operatorname{sen} x}{x^2}$  que no tiene límite en 0.

2) Es muy fácil y parecido al anterior.

3) Este límite se hace muy fácilmente por L'Hôpital pero, antes de derivar, debes sustituir  $e^x - 1$  por  $x$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x\right)^{\frac{1}{\log x}}$  es una indeterminación tipo  $0^0$ . Sea  $f(x) = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x\right)^{\frac{1}{\log x}}$ .

Tomando logaritmos tenemos que  $\log f(x) = \frac{\log\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x\right)}{\log x}$ . Teniendo en cuenta

que para  $x > 0$  es  $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$ , se sigue que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}\right)}{-\log \frac{1}{x}} = -\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{\log(\operatorname{arc\,tg} t)}{\log t}$$

Este último límite puede calcularse por L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log f(x) = -\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{t}{(1+t^2)\operatorname{arc\,tg} t} = -1$$

Deducimos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{e}$ .

5) También puede hacerse por L'Hôpital pero, antes de derivar, debes sustituir  $\log(1+x)$  por  $x$ . Te recuerdo que puedes sustituir funciones asintóticamente equivalentes en un producto o en un cociente, nunca en una suma. Tampoco se pueden hacer estas sustituciones en una función, es decir, si  $g(x) \sim h(x)$  para  $x \rightarrow a$ , y  $F$  es una función, no es cierto en general que  $F(g(x))$  sea asintóticamente equivalente a  $F(h(x))$  para  $x \rightarrow a$ . En este límite, la función  $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \sim 1$  para  $x \rightarrow 0$ , pero no es cierto que  $\log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) \sim \log(1) = 0$ .

6) Es una indeterminación  $1^\infty$ . Ya debes saberlo hacer.

7) Este es el típico límite en el que si aplicas directamente L'Hôpital, sin antes simplificar sustituyendo funciones por otras asintóticamente equivalentes, lo más probable es que acabes por equivocarte al derivar. Apliquemos la primera regla: simplificar todo lo que se pueda la función.

Tenemos que:

$$1 - \cos^2(\operatorname{tg}^2 x) = \operatorname{sen}^2(\operatorname{tg}^2 x) = \left(\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg}^2 x}\right)^2 \operatorname{tg}^4 x \sim \operatorname{tg}^4 x \sim x^4$$

También es  $e^x - 1 \sim x$ ,  $\log(1 + \operatorname{sen} 2x) \sim \operatorname{sen} 2x \sim 2x$  y  $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sen}^3 x) \sim \operatorname{sen}^3 x \sim x^3$ . Todas estas equivalencias asintóticas son para  $x \rightarrow 0$  y todas ellas se deducen de la tabla de los límites que debes saberte de memoria. En consecuencia el límite que nos piden se reduce a calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^5}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2$$

Los demás límites de este ejercicio te los dejo para que los hagas tú. ☺

**Ejercicio resuelto** 121 Explica si es correcto usar las reglas de L'Hôpital para calcular los límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}$$

**Solución.** Las reglas de L'Hôpital dicen que, bajo ciertas hipótesis, la existencia de  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  implica la existencia de  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  en cuyo caso ambos límites coinciden. Una hipótesis de las reglas de L'Hôpital es que la derivada del denominador no se anule en un intervalo que tenga al punto  $a$  por extremo y que el límite  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  sea una indeterminación.

Esto no ocurre en el caso del cociente  $\frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}$  para  $x \rightarrow +\infty$  pues, aunque puede verse como una indeterminación del tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ , la derivada del denominador es  $1 + \cos x$  que se anula en todos los puntos de la forma  $\pi + 2k\pi$ ,  $k = 1, 2, \dots$  por lo que *no tiene sentido* considerar el límite del cociente de las derivadas,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ , pues dicho cociente no está definido en ningún intervalo de la forma  $]c, +\infty[$ . Es claro, sin embargo, que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1$$

En el caso del límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}$ , que puede verse como una indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$ , si formamos el cociente de las derivadas obtenemos la función

$$\frac{2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)}{\cos x}$$

la cual no tiene límite en 0 (el denominador tiene límite 1, pero el numerador no tiene límite), luego no es posible aplicar L'Hôpital para calcular este límite el cual, por otra parte, es evidentemente igual a 0, pues:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} x \operatorname{sen}(1/x) = 0$$

☺

**Ejercicio resuelto** 122 Prueba que una función polinómica de grado  $n$  coincide con su polinomio de Taylor de orden  $n$  centrado en un punto cualquiera  $a$ .

**Solución.** Las funciones polinómicas son indefinidamente derivables, por lo que, dados  $x, a \in \mathbb{R}$ , podemos aplicar el teorema de Taylor con resto de Lagrange para obtener que hay algún punto  $c$  comprendido entre  $a$  y  $x$  tal que:

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{P^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Como  $P$  es una función polinómica de grado  $n$  su derivada de orden  $n + 1$  es nula en todo punto. Luego  $P^{(n+1)}(c) = 0$ , por lo que resulta:

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x - a) + \frac{P''(a)}{2}(x - a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Por tanto  $P(x)$  coincide con su polinomio de Taylor de orden  $n$  centrado en  $a$ . ☺

**Ejercicio resuelto 123** Prueba que una función polinómica  $P$  tiene un cero de orden  $k$  en  $a$  si, y sólo si, puede escribirse de la forma  $P(x) = (x - a)^k Q(x)$ , donde  $Q(x)$  es una función polinómica que no se anula en  $a$ .

**Solución.** Supongamos que  $P(x)$  tiene un cero de orden  $k$  en  $a$ , es decir el valor de  $P$  y el de todas sus derivadas hasta la de orden  $k - 1$  son nulos en  $a$  y la derivada de orden  $k$  de  $P$  no se anula en  $a$ . Entonces, como consecuencia del ejercicio anterior, tenemos que:

$$P(x) = \sum_{j=0}^n \frac{P^{(j)}(a)}{j!}(x - a)^j = \sum_{j=k}^n \frac{P^{(j)}(a)}{j!}(x - a)^j = (x - a)^k \sum_{j=k}^n \frac{P^{(j)}(a)}{j!}(x - a)^{j-k}$$

Poniendo  $Q(x) = \sum_{j=k}^n \frac{P^{(j)}(a)}{j!}(x - a)^{j-k}$ , tenemos que  $Q$  es un polinomio,  $Q(a) = \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \neq 0$  y  $P(x) = (x - a)^k Q(x)$ . El recíproco es inmediato. ☺

**Ejercicio resuelto 124** Calcular el número de ceros y la imagen de la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$ .

**Solución.** Se trata de un polinomio de grado par con coeficiente líder positivo, por tanto, alcanza un mínimo absoluto en  $\mathbb{R}$ , si éste es igual a  $m$ , se tiene que  $f(\mathbb{R}) = [m, +\infty[$ . El punto (o los puntos) en donde  $f$  alcanza su mínimo absoluto debe ser un cero de la derivada. Como

$$f'(x) = 6x^5 - 6x = 6x(x^4 - 1) = 6x(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 6x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

se anula en  $-1, 0$  y  $1$ , se sigue que el mínimo absoluto de  $f$  debe alcanzarse en alguno de estos puntos y, como  $f(1) = f(-1) = 0 < f(0)$ , deducimos que  $f(-1) = f(1) = 0$  es el mínimo absoluto de  $f$  en  $\mathbb{R}$ . Luego  $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$ . Hemos determinado así la imagen de  $f$  y también hemos encontrado que  $-1$  y  $1$  son ceros de  $f$  (cosa fácil sin más que ver cómo es  $f$ ). Observa que  $-1$  y  $1$  son ceros de orden 2 de  $f$  (porque son ceros simples de  $f'$ ). Es claro que  $f$  no puede tener más ceros, porque si  $f(x_0) = 0$  entonces en  $x_0$  la función  $f$  alcanza un mínimo absoluto y, por tanto,  $f'$  debe anularse en  $x_0$ . En conclusión,  $f$  tiene 4 ceros reales (2 ceros reales dobles). ☺

**Ejercicio resuelto 125** Calcula el número de soluciones de la ecuación  $3 \log x - x = 0$ .

**Solución.** Sea  $f(x) = 3 \log x - x$ . Observa que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  y

$f(e) = 3 - e > 0$ . Deducimos, por el teorema de Bolzano, que  $f$  tiene por lo menos un cero en cada intervalo  $]0, e[$  y  $]e, +\infty[$ . Como la derivada  $f'(x) = \frac{3}{x} - 1$  tiene un único cero en  $x = 3$ , concluimos, por el teorema de Rolle, que  $f$  no puede tener más de dos ceros distintos. En conclusión, la ecuación  $3 \log x - x = 0$  tiene una solución en el intervalo  $]0, e[$  y otra en  $]e, +\infty[$ . Si quieres, puedes precisar más. Como  $f(1) < 0$  y  $f(e^2) = 6 - e^2 < 0$ , se sigue que los dos ceros de  $f$  están en el intervalo  $]1, e^2[$ . ☺



**Ejercicio resuelto** 126 Estudia, según los valores de  $\alpha$ , el número de ceros, contando multiplicidades cuando proceda, de la función polinómica  $f(x) = 3x^5 + 5x^3 - 30x - \alpha$ . Explica con detalle lo que haces.

**Solución.** Como consecuencia del teorema de Rolle, si la derivada de una función tiene  $k$  ceros (reales) *distintos* entonces la función *no puede tener más de  $k + 1$  ceros (reales) distintos* (¡pero puede que no tenga ninguno!). Sabemos también, como consecuencia del teorema de los ceros de Bolzano, que todo polinomio de grado impar tiene por lo menos un cero real. Como las raíces complejas, cuando las hay, de polinomios con coeficientes reales, vienen por parejas de raíces complejas conjugadas, deducimos que *contando cada cero tantas veces como indica su multiplicidad, todo polinomio de grado impar y coeficientes reales tiene un número impar de ceros reales*. Por las mismas razones, *contando cada cero tantas veces como indica su multiplicidad, todo polinomio de grado par y coeficientes reales tiene un número par de ceros reales y también puede que no tenga ninguno*.

En nuestro caso:

$$f'(x) = 15x^4 + 15x^2 - 30 = 15(x^2 + 2)(x^2 - 1) = 15(x^2 + 2)(x + 1)(x - 1)$$

resulta que  $f'$  tiene dos ceros reales,  $1$  y  $-1$ , por lo que  $f$  *no puede tener más de tres ceros reales distintos* (pero todavía no sabemos si los tiene). Lo que es seguro es que  $f$ , por ser un polinomio de grado impar, tiene por lo menos un cero real, y en el caso de que tenga más de un cero real debe tener tres (que pueden ser simples o uno simple y otro doble). Veamos cuándo ocurre una cosa u otra. Tenemos que  $f$  es inyectiva en los intervalos  $]-\infty, -1]$ ,  $[-1, 1]$  y  $[1, +\infty[$  (porque su derivada no se anula en ningún punto de dichos intervalos excepto en los extremos). Además  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

Deducimos que para que  $f$  tenga tres ceros reales simples, uno en cada intervalo  $]-\infty, -1]$ ,  $[-1, 1]$  y  $[1, +\infty[$ , *es necesario y suficiente* que  $f(-1) = 22 - \alpha > 0$  y  $f(1) = -22 - \alpha < 0$ . Condiciones que equivalen a  $-22 < \alpha < 22$ .

Cuando  $\alpha = 22$  entonces  $f(-1) = 0$  y  $f(1) < 0$ , por lo que  $f$  tiene también tres ceros reales: uno simple en el intervalo  $]1, +\infty[$  y otro doble (porque también anula a la derivada) en  $-1$ .

Cuando  $\alpha = -22$  entonces  $f(-1) > 0$  y  $f(1) = 0$ , por lo que  $f$  tiene también tres ceros reales: uno simple en el intervalo  $]-\infty, -1]$  y otro doble (porque también anula a la derivada) en  $1$ .

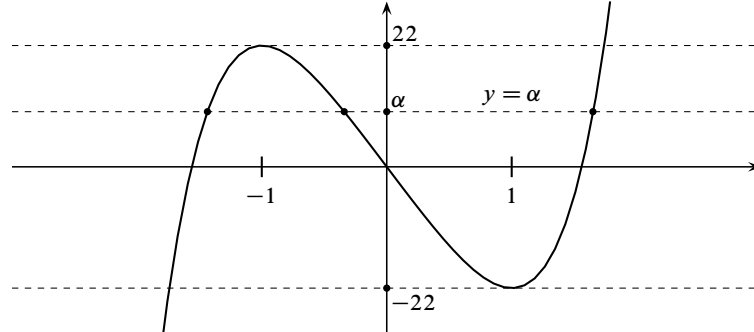
Cuando  $\alpha > 22$  o  $\alpha < -22$ ,  $f$  sólo tiene un cero real (porque no puede tener tres ceros reales simples ni tampoco un cero real doble).

La discusión anterior puede hacerse también representando gráficamente la función polinómica  $h(x) = 3x^5 + 5x^3 - 30x$  y viendo cuántos cortes tiene dicha gráfica con la recta horizontal  $y = \alpha$ . Para ello observemos que  $h$  y  $f$  tienen la misma derivada, por lo que:

$$x < -1 \implies h'(x) > 0, \quad -1 < x < 1 \implies h'(x) < 0, \quad x > 1 \implies h'(x) > 0.$$

Por tanto  $h$  es estrictamente creciente en  $]-\infty, -1]$ , estrictamente decreciente en  $[-1, 1]$  y estrictamente creciente en  $[1, +\infty[$ . Deducimos que  $h$  tiene en  $-1$  un máximo relativo y en  $1$  un mínimo relativo. Además, la derivada segunda  $h''(x) = 30x(x^2 + 1)$  se anula

solamente en  $x=0$ , siendo  $h''(x) < 0$  para  $x < 0$  y  $h''(x) > 0$  para  $x > 0$ , es decir,  $h$  es cóncava en  $]-\infty, 0[$  y convexa en  $]0, +\infty[$ . Con esta información ya podemos representar su gráfica.



De esta gráfica se deducen fácilmente los mismos resultados antes obtenidos. Nótese que como  $f(x) = h(x) + \alpha$ , la gráfica de  $f$  se obtiene trasladando la de  $h$  hacia arriba (si  $\alpha > 0$ ) o hacia abajo (si  $\alpha < 0$ ). Se ve así claramente, que cuando  $\alpha = -22$  o  $\alpha = 22$ , la gráfica de  $f$  es tangente al eje de abscisas en el punto  $-1$  o en el  $1$  donde hay un cero doble. ☺

**Ejercicio resuelto 127** Justifica que la ecuación  $x^2 = x \sin x + \cos x$  tiene exactamente dos soluciones reales.

**Solución.** Sea  $f(x) = x^2 - x \sin x - \cos x$ . Se trata de probar que  $f$  se anula en exactamente dos puntos. La función  $f$  es continua y  $f(0) = -1$ ,  $f(\pi) = f(-\pi) = \pi^2 + 1$ . El teorema de Bolzano nos dice que  $f$  se anula en algún punto del intervalo  $]-\pi, 0[$  y en algún punto del intervalo  $]0, \pi[$ . Luego  $f$  se anula al menos en dos puntos. Veamos que no puede anularse en más de dos puntos. En efecto, la derivada de  $f$  es  $f'(x) = x(2 - \cos x)$ . Como  $2 - \cos x > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , se sigue que la derivada  $f'$  solamente se anula en  $x = 0$ . Si la función  $f$  se anulara en tres o más puntos, en virtud del teorema de Rolle, su derivada debería anularse al menos en dos puntos, lo cual, según acabamos de ver, no ocurre. Concluimos que  $f$  se anula exactamente en dos puntos.

Alternativamente, podemos razonar como sigue. Al ser  $f'(x) < 0$  para todo  $x < 0$ , la función  $f$  es estrictamente decreciente en  $\mathbb{R}^-$ , luego solamente puede anularse una vez en  $\mathbb{R}^-$ . Análogamente, como  $f'(x) > 0$  para todo  $x > 0$ , la función  $f$  es estrictamente creciente en  $\mathbb{R}^+$ , luego solamente puede anularse una vez en  $\mathbb{R}^+$ . ☺

**Ejercicio resuelto 128** Sean  $a_0, a_1, \dots, a_n$  números reales. Prueba que para algún  $x \in [0, 1]$  se verifica que

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1}.$$

**Solución.** Se trata del típico ejercicio que una vez que sabes cómo se hace te parece muy fácil. Pero se te tiene que ocurrir cómo hacerlo. La pista la dan los números  $\frac{a_k}{k+1}$  y el “para algún  $x \in [0, 1]$ ”. El ejercicio recuerda al teorema del valor medio. Después de pensarlo un poco, se nos ocurre considerar la función

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

El teorema del valor medio aplicado a esta función en el intervalo  $[0, 1]$ , nos dice que hay un punto  $x \in ]0, 1[$  tal que

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) = f'(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Eso es justamente lo que había que probar. ☺

**Ejercicio resuelto 129** Sea  $f$  una función polinómica y sea  $a < b$ . Justifica que, contando cada cero tantas veces como su orden, si  $f(a)f(b) < 0$  el número de ceros de  $f$  en  $]a, b[$  es impar; y si  $f(a)f(b) > 0$  dicho número (caso de que haya algún cero) es par. Deduce que si  $f$  tiene grado  $n$ , es condición necesaria y suficiente para que  $f$  tenga  $n$  raíces reales distintas que su derivada tenga  $n - 1$  raíces reales distintas  $c_1 < c_2 < \dots < c_{n-1}$  y que para  $\alpha < c_1$  suficientemente pequeño y para  $\beta > c_{n-1}$  suficientemente grande, los signos de los números  $f(\alpha), f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_{n-1}), f(\beta)$  vayan alternando.

**Solución.** Si  $f$  es un polinomio de grado  $n$  y  $c$  es un cero de orden  $k$  de  $f$ , entonces tenemos que  $f(x) = (x - c)^k h(x)$  donde  $h(x)$  es un polinomio de grado  $n - k$  con  $h(c) \neq 0$ . Podemos suponer, por comodidad, que  $h(c) > 0$ . Por la continuidad de  $h$ , hay un intervalo abierto  $I$  que contiene a  $c$  tal que para todo  $x \in I$  se verifica que  $h(x) > 0$ .

- Si  $k$  es par, tenemos que  $(x - c)^k > 0$  para todo  $x \neq c$  y deducimos que  $f(x) > 0$  para todo  $x \in I \setminus \{c\}$ . Por tanto, la gráfica de  $f$  no atraviesa al eje de abscisas en  $x = c$ .
- Si  $k$  es impar, tenemos que  $(x - c)^k > 0$  para  $x > c$  y  $(x - c)^k < 0$  para  $x < c$ . Deducimos que  $f(x) > 0$  para  $x > c$  y  $f(x) < 0$  para  $x < c$ . Por tanto, la gráfica de  $f$  atraviesa al eje de abscisas en  $x = c$ .

En otros términos, en un cero de orden par la función  $f$  no cambia de signo y en un cero de orden impar sí cambia.

Es claro que si  $f(a)f(b) < 0$  el número de cambios de signo de  $f$  entre  $a$  y  $b$  tiene que ser impar. Deducimos, por lo antes visto, que  $f$  tiene en  $]a, b[$  un número impar de ceros de orden impar, por lo que el número total de ceros de  $f$  en  $]a, b[$ , contando cada cero tantas veces como su orden, es impar.

Análogamente, si  $f(a)f(b) > 0$  el número de cambios de signo de  $f$  entre  $a$  y  $b$  tiene que ser par (o ninguno) y deducimos que el número total de ceros de  $f$  en  $]a, b[$  es par.

Si  $f$  tiene  $n$  ceros (reales) distintos,  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n$ , estos ceros determinan  $n - 1$  intervalos  $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$  y, por el teorema de Rolle, en cada uno de esos intervalos la derivada tiene que tener algún cero  $c_j \in ]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$ . Deducimos así que la derivada tiene  $n - 1$  raíces (reales) distintas  $c_1 < c_2 < \dots < c_{n-1}$ . Como en cada intervalo  $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$  la gráfica de  $f$  atraviesa una vez el eje de abscisas, deducimos que  $f(c_j)f(c_{j+1}) < 0$ , es decir, los números  $f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_{n-1})$  van alternando su signo. Ahora, si  $\alpha < \alpha_1$ , en el intervalo  $]\alpha, \alpha_1[$  la función  $f$  tiene un cero simple  $\alpha_1$  y, por tanto, su gráfica atraviesa una vez al eje de abscisas, luego  $f(\alpha)f(\alpha_1) < 0$ . Análogamente, si  $\alpha_n < \beta$  debe ser  $f(c_{n-1})f(\beta) < 0$ . Hemos probado así que la condición del enunciado es necesaria.

Recíprocamente, la condición del enunciado implica que  $f$  tiene  $n + 1$  cambios de signo, luego tiene  $n$  raíces distintas. ☺

**Ejercicio resuelto 130** Determina para qué valores de  $\alpha$  la función polinómica

$$3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + \alpha$$

tiene cuatro raíces reales distintas.

**Solución.** Sea  $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + \alpha$ . Como

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24 = 12(x+1)(x-1)(x-2)$$

y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , se sigue, en virtud del ejercicio anterior, que  $f$  tiene 4 raíces reales distintas si, y sólo si,  $f(-1) = -19 + \alpha < 0$ ,  $f(1) = 13 + \alpha > 0$  y  $f(2) = 8 + \alpha < 0$ . Estas condiciones equivalen a  $-13 < \alpha < -8$ . ☺

**Ejercicio resuelto 131** Dado  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $f(x) = (x^2 - 1)^n$ . Prueba que la derivada  $k$ -ésima ( $1 \leq k \leq n$ ) de  $f$  tiene exactamente  $k$  raíces reales distintas en el intervalo  $] -1, 1[$ .

**Solución.** Observa que  $f$  es un polinomio de grado  $2n$  que tiene un cero de orden  $n$  en  $x = -1$  y otro cero de orden  $n$  en  $x = 1$ . La derivada de orden  $k$  de  $f$  será un polinomio de grado  $2n - k$  que tendrá un cero de orden  $n - k$  en  $x = -1$  y otro cero de orden  $n - k$  en  $x = 1$ , luego debe ser de la forma  $f^{(k)}(x) = (x^2 - 1)^{n-k} P_k(x)$  donde  $P_k(x)$  es un polinomio de grado  $k$ . Lo que nos piden es probar que para  $1 \leq k \leq n$  el polinomio  $P_k(x)$  tiene  $k$  raíces reales distintas en el intervalo  $] -1, 1[$ . Lo haremos por inducción (finita). Para  $k = 1$ ,  $f'(x) = (x^2 - 1)^{n-1} 2nx$  que tiene un cero en  $] -1, 1[$ . Supongamos que  $1 < k < n - 1$  y que  $P_k(x)$  tiene  $k$  raíces reales distintas,  $a_1 < a_2 < \dots < a_k$  en el intervalo  $] -1, 1[$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (x^2 - 1)^{n-k-1} 2(n-k)xP_k(x) + (x^2 - 1)^{n-k} P_k'(x) \\ &= (x^2 - 1)^{n-k-1} (2(n-k)xP_k(x) + (x^2 - 1)P_k'(x)). \end{aligned}$$

Por tanto

$$P_{k+1}(x) = 2(n-k)xP_k(x) + (x^2 - 1)P_k'(x).$$

El polinomio  $P_k'(x)$  tiene un cero en cada uno de los intervalos  $]a_j, a_{j+1}[$  y, como hay en total  $k - 1$  de ellos, deducimos que  $P_k'(x)$  tiene  $k - 1$  ceros simples  $c_j \in ]a_j, a_{j+1}[$ .

En cada uno de dichos ceros  $P_k'(x)$  cambia de signo, es decir,  $P_k'(a_j)P_k'(a_{j+1}) < 0$ . Supongamos, por comodidad, que  $P_k'(a_1) < 0$ . Entonces  $(-1)^j P_k'(a_j) > 0$  para  $1 \leq j \leq k$ . Como

$$P_{k+1}(a_j) = 2(n-k)a_j P_k(a_j) + (a_j^2 - 1)P_k'(a_j) = (a_j^2 - 1)P_k'(a_j)$$

y  $a_j^2 - 1 < 0$ , deducimos que

$$(-1)^j P_{k+1}(a_j) = (a_j^2 - 1)(-1)^j P_k'(a_j) < 0, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Por tanto  $P_{k+1}(x)$  tiene una raíz en cada uno de los  $k - 1$  intervalos  $]a_j, a_{j+1}[$ .

Probaremos ahora que  $P_{k+1}(x)$  tiene una raíz en  $] -1, a_1[$  y otra en  $]a_k, 1[$ . Como  $(-1)^j P_{k+1}(a_j) < 0$ , se sigue que  $P_{k+1}(a_1) > 0$ . Tenemos también que  $P_{k+1}(-1) = -2(n-k)P_k(-1)$  por lo que, al ser  $n - k > 0$ , será suficiente probar que  $P_k(-1) > 0$ . Para ello basta observar que como  $P_k'(x) \neq 0$  para  $x < a_1$  y como  $P_k'(a_1) < 0$ , se

sigue que  $P_k'(x) < 0$  para todo  $x < c_1$ . Luego  $P_k(x)$  es estrictamente decreciente en el intervalo  $] -\infty, c_1[$  y como se anula en  $a_1 < c_1$ , concluimos que  $P_k(x) > 0$  para  $x < a_1$  y, por tanto,  $P_k(-1) > 0$ . Análogamente se prueba que  $P_k(x)$  tiene una raíz en  $]a_k, 1[$ . ☺

**Ejercicio resuelto 132** Prueba que  $-a \log x \leq x^{-a}$  para todo  $x > 0$  y todo  $a \in \mathbb{R}$ .

**Solución.** La desigualdad propuesta, aparentemente, depende de dos variables  $a \in \mathbb{R}$  y  $x > 0$ . Debemos escribirla en función de una sola variable. Para ello basta escribir dicha desigualdad en la forma:

$$\frac{\log(x^{-a})}{x^{-a}} \leq \frac{1}{e}.$$

Teniendo en cuenta que  $x^{-a} = \exp(-a \log x)$  puede ser cualquier número positivo, vemos que realmente se trata de probar la desigualdad  $\frac{\log t}{t} \leq \frac{1}{e}$  para todo  $t > 0$ .

Sea, pues,  $f(t) = \frac{\log t}{t}$  donde  $t > 0$ . Tenemos que  $f'(t) = \frac{1 - \log t}{t^2}$  y, por tanto,  $f'(t) > 0$  si  $0 < t < e$  y por lo que  $f$  es estrictamente creciente en  $]0, e[$  y  $f'(t) < 0$  si  $t > e$  y por lo que  $f$  es estrictamente decreciente en  $[e, +\infty[$ . Deducimos que  $f$  alcanza en  $t = e$  un máximo absoluto en  $\mathbb{R}^+$ . Luego  $f(t) \leq f(e) = 1/e$ .

Hemos probado que

$$\frac{\log t}{t} \leq \frac{1}{e} \quad (t > 0) \quad (6.27)$$

Además, esta desigualdad es estricta para  $t \neq e$ .

Haciendo en (6.27)  $t = x^{-a}$ , donde  $x > 0$  y  $a \in \mathbb{R}$ , deducimos que la desigualdad  $-a \log x \leq x^{-a}$  es válida para todo  $x > 0$  y para todo  $a \in \mathbb{R}$ . ☺

**Ejercicio resuelto 133** Dado  $\alpha \in ]0, 1[$  demuestra que  $x^\alpha < \alpha x + 1 - \alpha$  para todo  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $x \neq 1$ .

**Solución.** Sea  $f(x) = \alpha x + 1 - \alpha - x^\alpha$ . Es claro que  $f(1) = 0$ , por tanto, todo consiste en probar que la función  $f$  alcanza en  $x = 1$  un mínimo absoluto estricto. Tenemos que  $f'(x) = \alpha - \alpha x^{\alpha-1} = \alpha(1 - x^{\alpha-1})$ . Para  $0 < x < 1$  es  $(\alpha - 1) \log x > 0$  y, por tanto,  $x^{\alpha-1} = \exp((\alpha - 1) \log x) > 1$ , lo que implica, por ser  $\alpha > 0$ , que  $f'(x) < 0$ . Análogamente se justifica que  $f'(x) > 0$  si  $x > 1$ . Por tanto  $f$  es estrictamente decreciente en  $]0, 1[$  y estrictamente creciente en  $[1, +\infty[$ . Concluimos así que  $f(x) > f(1) = 0$  para todo  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ .

Tenemos que:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \iff ab^{1-q} \leq \frac{a^p b^{-q}}{p} + \frac{1}{q} = \frac{a^p b^{-q}}{p} + 1 - \frac{1}{p}$$

Poniendo  $\alpha = \frac{1}{p}$  y  $x = ab^{1-q}$ , con lo que  $x^\alpha = a^p b^{-q}$ , esta desigualdad es un caso particular de la antes probada. La igualdad ocurre si, y sólo si,  $x = 1$ , es decir,  $a^p = b^q$ . ☺

**Ejercicio resuelto 134** Prueba que para todo  $x \in ]0, \pi/2[$  se verifica que:

$$\text{i) } 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x; \quad \text{ii) } \frac{2x}{\pi} < \sin x < x < \operatorname{tg} x$$

**Solución.**

i) Sea  $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ . Tenemos que  $f'(x) = -\operatorname{sen} x + x$  y  $f''(x) = 1 - \cos x$ . Como  $f''(x) > 0$  para todo  $x \in ]0, \pi/2[$ , se sigue que  $f'$  es estrictamente creciente en  $[0, \pi/2]$  y, como  $f'(0) = 0$ , obtenemos que  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in ]0, \pi/2[$ . Por tanto  $f$  es estrictamente creciente en  $[0, \pi/2]$ . Puesto que  $f(0) = 0$ , concluimos finalmente que  $f(x) > 0$  para todo  $x \in ]0, \pi/2[$ .

ii) Sea  $f(x) = \operatorname{sen} x - \frac{2x}{\pi}$ . Tenemos que  $f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$  y  $f''(x) = -\operatorname{sen} x$ . Como  $f''(x) < 0$  para todo  $x \in ]0, \pi/2[$ , se sigue que  $f'$  es estrictamente decreciente en  $[0, \pi/2]$ . Como  $f'(0) > 0$ , y  $f'(\pi/2) < 0$ , deducimos que hay un único punto  $x_0 \in ]0, \pi/2[$  tal que  $f'(x_0) = 0$ , y en dicho punto la función  $f$  alcanza un máximo absoluto en  $[0, \pi/2]$ . Sabemos, por el teorema de valores máximos y mínimos de Weierstrass, que  $f$  tiene que alcanzar un valor mínimo absoluto en  $[0, \pi/2]$ . Dicho mínimo absoluto necesariamente tiene que alcanzarse en los extremos del intervalo ya que si se alcanzara en un punto interior, en dicho punto habría de anularse la derivada y hemos visto que ésta sólo se anula en un punto que es de máximo absoluto. Como  $f(0) = f(\pi/2) = 0$  concluimos que  $f(x) > 0$  para todo  $x \in ]0, \pi/2[$ .

Observa que en ambos casos interesa trabajar en el intervalo cerrado  $[0, \pi/2]$ . ☺

**Ejercicio resuelto 135 Desigualdad de Jensen.** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa en el intervalo  $I$ , y sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Dados números  $\alpha_k > 0$ ,  $x_k \in I$  tales que  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$ , prueba que:

$$f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k). \quad (6.28)$$

Además, si  $f$  es estrictamente convexa, la desigualdad anterior es estricta siempre que al menos dos de los puntos  $x_k$  sean distintos.

**Solución.** Para  $n = 2$  la desigualdad del enunciado es

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son números positivos con  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . Pero esta es justamente la definición de función convexa (si no lo ves claro, pon  $t = \alpha_1$ ,  $1 - t = 1 - \alpha_1 = \alpha_2$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  con lo que dicha desigualdad es exactamente igual que la desigualdad (6.24).)

Supongamos que la desigualdad (6.28) sea cierta para un número natural  $n \geq 2$  y probemos que, en tal caso, también es cierta para  $n + 1$ . Sean  $\alpha_k > 0$  tales que  $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1$  y sean  $x_k \in I$  para  $k = 1, 2, \dots, n + 1$ . Tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k = (1 - \alpha_{n+1}) \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{n+1}} x_k + \alpha_{n+1} x_{n+1} \quad (6.29)$$

Pongamos  $\lambda_k = \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{n+1}} > 0$ . Tenemos que:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = \frac{1}{1 - \alpha_{n+1}} \sum_{k=1}^n \alpha_k = \frac{1 - \alpha_{n+1}}{1 - \alpha_{n+1}} = 1$$

Por tanto, el número  $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$  está en  $I$  porque está comprendido entre el mínimo y el máximo de los  $x_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Escribiendo la igualdad (6.29) en la forma:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k = (1 - \alpha_{n+1})x + \alpha_{n+1}x_{n+1}$$

Y usando que  $f$  es convexa, tenemos que

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) \leq (1 - \alpha_{n+1})f(x) + \alpha_{n+1}f(x_{n+1})$$

Por la hipótesis de inducción aplicada a  $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$  con  $\lambda_k > 0$  y  $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ , tenemos que

$$f(x) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{n+1}} f(x_k)$$

De las dos últimas desigualdades se deduce que:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k f(x_k).$$

Lo que completa la demostración por inducción.

Finalmente, si la función  $f$  es estrictamente convexa, entonces las desigualdades son estrictas salvo en el caso trivial de que todos los puntos  $x_k$  coincidan. ☺

**Ejercicio resuelto 136** Sean  $x_k, \alpha_k$ , donde  $1 \leq k \leq n$ , números positivos verificando que  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$ . Usando de la convexidad de la función  $x \mapsto -\log x$  demuestra la desigualdad:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \quad (6.30)$$

¿Cuándo se da la igualdad?

**Solución.** La función  $f(x) = -\log x$  es estrictamente convexa en  $\mathbb{R}^+$  porque su derivada segunda es positiva en  $\mathbb{R}^+$ . Usando la desigualdad de Jensen, tenemos que

$$-\log\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) \leq -\sum_{k=1}^n \log(\alpha_k x_k) = -\sum_{k=1}^n \log(x_k^{\alpha_k}) = -\log(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n})$$

Teniendo en cuenta que la función logaritmo es estrictamente creciente, la desigualdad anterior es equivalente a la que se pide probar.

La igualdad solamente ocurre cuando todos los  $x_k$  coinciden. ☺

**Ejercicio resuelto** 137 Sean  $p, q$  números reales positivos tales que  $1/p + 1/q = 1$ .

a) Prueba que  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$  y la igualdad ocurre si, y sólo si,  $a^p = b^q$ .

b) Dado  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$  y  $s > 0$ , definamos  $\|\mathbf{z}\|_s = \left( \sum_{i=1}^n |z_i|^s \right)^{1/s}$ . Prueba que para todo  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y todo  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  en  $\mathbb{R}^n$  se verifica la **desigualdad de Hölder**:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q.$$

¿Cuándo se da la igualdad?

**Sugerencias.** El punto a) puede hacerse como consecuencia del ejercicio anterior. Para

b) hágase  $a = \frac{|x_i|}{\|\mathbf{x}\|_p}$ ,  $b = \frac{|y_i|}{\|\mathbf{y}\|_q}$  en la desigualdad del punto a).

**Solución.**

a) Haciendo en la desigualdad (6.30)  $x_1 = a^p$ ,  $x_2 = b^q$ ,  $\alpha_1 = 1/p$  y  $\alpha_2 = 1/q$ , obtenemos la desigualdad:

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

La igualdad ocurre si, y sólo si,  $a^p = b^q$ .

b) Tenemos que:

$$\frac{|x_i|}{\|\mathbf{x}\|_p} \frac{|y_i|}{\|\mathbf{y}\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|\mathbf{x}\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|\mathbf{y}\|_q^q}$$

Sumando estas desigualdades:

$$\sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\|\mathbf{x}\|_p} \frac{|y_i|}{\|\mathbf{y}\|_q} \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|^p}{\|\mathbf{x}\|_p^p} + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n \frac{|y_i|^q}{\|\mathbf{y}\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Lo que prueba la desigualdad de Hölder. La igualdad ocurre si, y solamente si,  $|x_i|^p = \rho |y_i|^q$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , donde  $\rho = \frac{\|\mathbf{x}\|_p^p}{\|\mathbf{y}\|_q^q}$

Para  $s = 2$ , el número  $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$  se llama **norma euclídea** del vector  $\mathbf{x}$ . La desigualdad de Hölder para  $p = q = 2$  se llama **desigualdad de Cauchy-Schwarz**:

$$\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \quad (6.31)$$

La igualdad ocurre si, y sólo si,  $|x_j| = \lambda |y_j|$  para  $j = 1, 2, \dots, n$  donde  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .

La desigualdad (6.31) suele escribirse de la forma:

$$\left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \quad (6.32)$$



Teniendo en cuenta que:

$$\left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |x_j y_j|, \quad (6.33)$$

es claro que la desigualdad (6.32) es consecuencia de la (6.31). Pero basta sustituir en (6.32)  $x_j$  e  $y_j$  por  $|x_j|$  y  $|y_j|$ , lo que no afecta para nada a las respectivas normas euclídeas, para convertir (6.32) en (6.31).

Veamos cuándo se da la igualdad en (6.32). Es claro que para ello tiene que darse la igualdad en (6.33) y en (6.31). La igualdad en (6.33) equivale a que los números  $x_j y_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) sean todos mayores o iguales que cero o todos menores o iguales que cero. La igualdad en (6.31) sabemos que equivale a que  $|x_j| = \lambda |y_j|$  para  $j = 1, 2, \dots, n$  donde  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . Estas dos condiciones juntas equivalen a que  $x_j = \mu y_j$  para  $1 \leq j \leq n$ , donde  $\mu \in \mathbb{R}$ , es decir, los vectores  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  son linealmente dependientes. ☺

**Ejercicio resuelto 138** Sea  $f$  es una función derivable en un intervalo  $I$ . Prueba que  $f$  es convexa en  $I$  si, y sólo si, la gráfica de  $f$  queda siempre por encima de la recta tangente en cualquier punto, es decir, para todo par de puntos  $x, a \in I$  se verifica que  $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$ .

**Solución.** Supongamos que  $f$  es convexas y sea  $x < a$ . De la desigualdad:

$$f(tx + (1-t)a) \leq tf(x) + (1-t)f(a) = t(f(x) - f(a)) + f(a) \quad 0 < t < 1$$

se deduce que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(a + t(x - a)) - f(a)}{t(x - a)}.$$

Como esta desigualdad es cierta para todo  $t \in ]0, 1[$ , tomando límites en la derecha para  $t \rightarrow 0$  se deduce que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq f'(a) \implies f(x) - f(a) \geq f'(a)(x - a)$$

Para el caso en que  $x > a$  se obtiene la misma desigualdad.

Supongamos ahora que  $f$  es derivable en  $I$  y para todo par de puntos  $x, a \in I$  se verifica que:

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a) \quad (6.34)$$

Supongamos que  $a < b$ . Sustituyendo en la desigualdad anterior  $x$  por  $b$  resulta:

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Sustituyendo ahora en (6.34)  $a$  por  $b$  y  $x$  por  $a$ , obtenemos:

$$f(a) \geq f(b) + f'(b)(a - b) \implies \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b)$$

De esta desigualdad y de la anterior, deducimos que  $f'(a) \leq f'(b)$ , lo que prueba que la derivada de  $f$  es creciente en  $I$ . ☺

**Ejercicio resuelto 139** Prueba que las únicas funciones  $n$  veces derivables con derivada de orden  $n$  constante son las funciones polinómicas de grado menor o igual que  $n$ .

**Solución.** Sea  $f$  una función  $n$  veces derivables con derivada de orden  $n$  constante. Naturalmente, dicha función tiene derivada de orden  $n + 1$  idénticamente nula. Dado,  $x \in \mathbb{R}$ , aplicamos el teorema de Taylor con resto de Lagrange a  $f$  en el punto  $a = 0$ , y deducimos que existe un punto  $c$  comprendido entre 0 y  $x$  tal que:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

y como  $f^{(n+1)}(t) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , concluimos que  $f$  coincide con su polinomio de Taylor de orden  $n$  en  $a = 0$  y, por tanto, es una función polinómica de grado  $\leq n$ .

Fíjate que no cabe esperar que este resultado pueda probarse sin usar algún resultado teórico profundo. Recuerda que se necesita el teorema del valor medio para probar que una función con primera derivada nula es constante. ☺

**Ejercicio resuelto 140** Prueba que el polinomio de Taylor de orden  $n$  de una función  $f$  es el único polinomio  $P(x)$  de grado menor o igual que  $n$  tal que  $f(x) = P(x) + o(x - a)^n$ .

**Solución.** Supongamos que  $P(x)$  y  $Q(x)$  son funciones polinómicas de grado menor o igual que  $n$  tales que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - Q(x)}{(x - a)^n} = 0$$

Entonces, se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x) - Q(x)}{(x - a)^n} = 0$$

Pongamos  $H(x) = P(x) - Q(x)$  que es una función polinómica de grado  $\leq n$ . Sea  $T_n(H, a)(x)$  el polinomio de Taylor de orden  $n$  de  $H$  en  $a$ . Por el teorema de Taylor-Young sabemos que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{H(x) - T_n(H, a)(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Como:

$$\frac{T_n(H, a)(x)}{(x - a)^n} = \frac{H(x)}{(x - a)^n} - \frac{H(x) - T_n(H, a)(x)}{(x - a)^n} +$$

Deducimos que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{T_n(H, a)(x)}{(x - a)^n} = 0$$

Evidentemente, la única posibilidad de que esto ocurra es que el polinomio  $T_n(H, a)(x)$  sea idénticamente nulo. Pero, como  $H$  es una función polinómica de grado  $\leq n$ , sabemos que  $T_n(H, a)(x) = H(x)$ , por tanto,  $H$  es idénticamente nulo, es decir,  $P(x) = Q(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . ☺

**Ejercicio resuelto 141** Sea  $f: ]-\pi/2, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por:

$$f(x) = \frac{\log(1 + \operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

para  $x \in ]-\pi/2, \pi/2[$ ,  $x \neq 0$ , y  $f(0) = -1/2$ . Calcula el polinomio de Taylor de orden 3 de  $f$  en 0.

**Solución.** La forma de la función  $f$  sugiere considerar la siguiente función:

$$g(x) = \frac{\log(1+x) - x}{x^2}, \quad g(0) = -\frac{1}{2}.$$

Pues se tiene que  $f(x) = g(\operatorname{sen} x)$ , por lo que si sabemos derivar  $g$  también sabemos derivar  $f$ . En principio, debemos calcular las derivadas  $f'(0)$ ,  $f''(0)$  y  $f'''(0)$ . Pero también podemos intentar calcular directamente un polinomio  $P(x)$  de grado  $\leq 3$  tal que  $f(x) = P(x) + o(x^3)$  pues, por el ejercicio anterior,  $P(x)$  será el polinomio de Taylor de orden 3 de  $f$  en 0. La ventaja de proceder así es que nos ahorramos bastante trabajo y, además, podemos aprovecharnos de que los polinomios de Taylor de  $g$  en 0 se deducen fácilmente de los polinomios de Taylor de  $\log(1+x)$  en 0 y éstos son conocidos. Sabemos que

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o(x^n)$$

Deducimos que

$$g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n-2} + o(x^{n-2})$$

Acabamos de calcular el polinomio de Taylor de orden  $n-2$  de  $g$  en 0. En particular

$$T_3(g, 0)(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{5}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - T_3(g, 0)(x)}{x^3} = 0 &\implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\operatorname{sen}^3 x} \frac{g(\operatorname{sen} x) - T_3(g, 0)(\operatorname{sen} x)}{x^3} = 0 \\ &\implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(\operatorname{sen} x) - T_3(g, 0)(\operatorname{sen} x)}{x^3} = 0 \end{aligned}$$

La idea ahora es obtener un polinomio,  $P(x)$ , de grado  $\leq 3$  tal que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{T_3(g, 0)(\operatorname{sen} x) - P(x)}{x^3} = 0,$$

pues entonces como:

$$\frac{f(x) - P(x)}{x^3} = \frac{g(\operatorname{sen} x) - T_3(g, 0)(\operatorname{sen} x)}{x^3} + \frac{T_3(g, 0)(\operatorname{sen} x) - P(x)}{x^3}$$

tendremos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^3} = 0$$

y, por tanto,  $P(x)$  será el polinomio de Taylor de orden 3 de  $f$  en 0.

Teniendo en cuenta que

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

es muy fácil calcular  $P(x)$ . De hecho, tenemos que:

$$T_3(g, 0)(\sin x) = T_3(g, 0) \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{13}{90}x^3 + o(x^3)$$

Donde deben hacerse los cálculos sabiendo lo que se busca para no hacer trabajo innecesario. Alternativamente, puedes calcular directamente  $P(x)$  porque es el polinomio de Taylor de orden 3 de  $T_3(g, 0)(\sin x)$  en 0. De una forma u otra, concluimos que el polinomio pedido es:

$$P(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{13}{90}x^3$$

Observa que no hemos necesitado calcular las tres primeras derivadas de  $f$  en 0, pero ahora las conocemos:

$$f'(0) = \frac{1}{3}, \quad f''(0) = -\frac{1}{2}, \quad f'''(0) = \frac{13}{15}$$



**Ejercicio resuelto 142** Calcula, usando un desarrollo de Taylor conveniente, un valor aproximado del número real  $\alpha$  con un error menor que  $\varepsilon$  en cada uno de los casos siguientes:

$$a) \alpha = \sqrt[3]{7}, \quad \varepsilon = 10^{-3} \quad b) \alpha = \sqrt{e}, \quad \varepsilon = 10^{-3} \quad c) \alpha = \sin \frac{1}{2}, \quad \varepsilon = 10^{-4} \quad d) \alpha = \sin(61^\circ), \quad \varepsilon = 10^{-8}$$

**Solución.** a) Elegimos un punto  $a$  próximo a  $x = 7$  en el que podamos calcular de forma exacta el valor de  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  y de sus derivadas. El punto  $a = 8$  es un buen candidato, pues está próximo a  $x = 7$  y  $\sqrt[3]{8} = 2$ . El error que se comete al aproximar  $\sqrt[3]{7}$  por el correspondiente valor del polinomio de Taylor  $T_n(f, a)(x)$  viene dado por

$$\frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |x-a|^{n+1} = [a=8, x=7] = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}$$

donde  $7 < c < 8$ . Como

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} - 1 \right) \left( \frac{1}{3} - 2 \right) \cdots \left( \frac{1}{3} - n + 1 \right) x^{1/3-n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3(n-1) - 1)}{3^n} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^n}$$

deducimos que

$$\frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} < \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{(n+1)! 3^{n+1}} \frac{\sqrt[3]{8}}{7^{n+1}} < \frac{2}{7^{n+1}}$$

y basta tomar  $n=4$  para que el error cometido al aproximar  $\sqrt[3]{7}$  por el valor del polinomio de Taylor  $T_3(f, 8)(7)$  sea menor que  $10^{-3}$ .

Si hubiéramos tomado  $a = 1,9^3 = 6,859$  la aproximación obtenida hubiera sido mucho mejor porque  $7 - 6,859 = 0,141$ . Y aún mejor tomando  $a = 1,91^3 = 6,96787$ , pues  $7 - 6,96787 < 0,05$ . En ambos casos el valor de  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  y de sus derivadas puede calcularse de forma exacta en  $a$ .

d) Lo primero que hay que hacer es expresar el seno en radianes. Tenemos que

$$\operatorname{sen}(61^\circ) = \operatorname{sen}\left(\frac{61\pi}{180}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right)$$

Claramente, debemos elegir  $a = \pi/3$ . El error que se comete al aproximar  $\operatorname{sen}\left(\frac{61\pi}{180}\right)$  por el correspondiente valor del polinomio de Taylor  $T_n(\operatorname{sen}, a)(x)$  viene dado por

$$\frac{|\operatorname{sen}^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |x-a|^{n+1} = \left[ a = \frac{\pi}{3}, x = \frac{61\pi}{180} \right] \leq \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{2}{100}\right)^{n+1}$$

donde hemos tenido en cuenta que las derivadas del seno están acotadas por 1 y que  $\frac{\pi}{180} < \frac{3,5}{180} < \frac{2}{100}$ . Deducimos que basta tomar  $n = 3$  para que el error cometido al aproximar  $\operatorname{sen}\left(\frac{61\pi}{180}\right)$  por el valor del polinomio de Taylor  $T_3(\operatorname{sen}, \frac{\pi}{3})\left(\frac{61\pi}{180}\right)$  sea menor que  $10^{-8}$ . ☺

**Ejercicio resuelto 143** Calcula los valores máximo y mínimo de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

1.  $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$  en el intervalo  $[-2, 2]$ .
2.  $\frac{x+1}{x^2+1}$  en el intervalo  $[-1, 2]$ .
3.  $f(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}^2 x + \cos x) + 2 \operatorname{sen} x - x$  en el intervalo  $[0, \pi/2]$ .
4.  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(5-2x)$  en el intervalo  $[-1, 2]$ .
5.  $f(x) = -x^3 + 12x + 5$  en el intervalo  $[-3, 3]$ .

**Solución.**

3) La función  $f(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}^2 x + \cos x) + 2 \operatorname{sen} x - x$ , tiene como derivada

$$f'(x) = \cos x \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x + 2 \cos x - 1 = \frac{1}{2}(-1 + 2 \cos x)(2 + \operatorname{sen} x)$$

Por tanto, el único cero de la derivada en el intervalo  $[0, \pi/2]$  es  $x = \pi/3$ . Como para  $0 \leq x < \pi/3$  es  $f'(x) > 0$  y para  $\pi/3 < x \leq \pi/2$  es  $f'(x) < 0$ , se sigue que el valor máximo absoluto de la función  $f$  en  $[0, \pi/2]$  se alcanza en  $x = \pi/3$  y vale  $f(\pi/3) = \frac{5}{8} + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ . El valor mínimo absoluto debe alcanzarse en alguno de los

extremos del intervalo. Como  $f(0) = \frac{1}{2}$  y  $f(\pi/2) = \frac{5}{2} - \frac{\pi}{2}$ , se sigue que el valor mínimo absoluto de  $f$  en  $[0, \pi/2]$  se alcanza en  $x = 0$ .

4) La función  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(5-2x)$ , tiene como derivada

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{2/3-1}(5-2x) - 2x^{2/3} = x^{2/3} \left( \frac{10-4x}{3x} - 2 \right) = \sqrt[3]{x^2} \frac{10(1-x)}{3x} \quad x \neq 0$$

Claramente,  $f$  no es derivable en  $x=0$ . El único cero de la derivada es  $x=1$ , puesto que  $f'(x) < 0$ , para  $-1 \leq x < 0$ ,  $f'(x) > 0$  para  $0 < x < 1$  y  $f'(x) < 0$  para  $1 < x \leq 3$ ,

se sigue que  $f$  es estrictamente decreciente en  $[-1, 0]$ , estrictamente creciente en  $[0, 1]$  y estrictamente decreciente en  $[1, 3]$ . Por tanto  $x = 0$  es un mínimo relativo y  $x = 1$  es un máximo relativo. Como  $f(-1) = 7$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 3$  y  $f(3) = -\sqrt[3]{9}$ , se sigue que, en el intervalo  $[-1, 3]$ , el mínimo absoluto de  $f$  se alcanza en el punto  $x = 3$  y el máximo absoluto se alcanza en  $x = -1$ . ☺

**Ejercicio resuelto 144** Para cada número real  $t$  sea  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + t^2x$ . Calcula, para cada valor de  $t \in [-1, 1]$ , el mínimo valor de  $f(x)$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

**Solución.** Tenemos que:

$$f'(x) = -x^2 + t^2 = (t+x)(t-x) = 0 \implies x = t \text{ o } x = -t$$

Solamente nos interesa el cero de  $f'$  en  $[0, 1]$ . Distinguiremos dos casos.

a)  $-1 \leq t \leq 0$ . En este caso el único punto de  $[0, 1]$  donde la derivada se anula es  $x_0 = -t$ . Además, se tiene que para  $0 \leq x \leq x_0$  es  $f'(x) \geq 0$  y para  $x_0 \leq x \leq 1$  es  $f'(x) \leq 0$ . Por tanto en  $x_0$  hay un máximo absoluto. El mínimo absoluto de  $f$  debe alcanzarse en alguno de los extremos del intervalo. Tenemos que  $f(0) = 0$  y  $f(1) = t^2 - \frac{1}{3}$ . Por tanto, si  $-1 \leq t < -\frac{1}{\sqrt{3}}$  se tiene que  $f(0) < f(1)$  y el mínimo absoluto se alcanza en  $x = 0$ . Si  $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq 0$  se tiene que  $f(1) \leq f(0)$  y el mínimo absoluto se alcanza en  $x = 1$ .

b)  $0 \leq t \leq 1$ . Se hace de la misma forma. ☺

**Ejercicio resuelto 145** Definamos  $f(x) = 5x^2 + \alpha x^{-5}$ , donde  $\alpha > 0$  es una constante. Calcula el valor más pequeño de  $\alpha$  tal que  $f(x) \geq 21$  para todo  $x > 0$ .

**Solución.** Calcularemos el mínimo de  $f(x)$  en  $\mathbb{R}^+$ , que dependerá de  $\alpha$ , e impondremos que dicho mínimo sea  $\geq 21$ . Tenemos que:

$$f'(x) = 10x - 5\alpha x^{-6} = 5x^{-6}(2x^7 - \alpha)$$

El único cero de  $f'$  en  $\mathbb{R}^+$  es  $x_0 = \sqrt[7]{\frac{\alpha}{2}}$ . Para  $0 < x < x_0$  se tiene que  $f'(x) < 0$  y para  $x > x_0$  es  $f'(x) > 0$ . Deducimos que  $f$  alcanza en  $x_0$  su valor mínimo absoluto en  $\mathbb{R}^+$ . Imponemos la condición de que dicho valor mínimo sea  $\geq 21$ :

$$f(x_0) = 5x_0^2 + \alpha x_0^{-5} = 5\frac{\alpha^{\frac{2}{7}}}{2^{\frac{2}{7}}} + \alpha\frac{2^{\frac{5}{7}}}{\alpha^{\frac{5}{7}}} = \alpha^{\frac{2}{7}}\frac{7}{2^{\frac{2}{7}}} \geq 21 \iff \alpha \geq 2\left(\frac{21}{7}\right)^{\frac{7}{2}} = 54\sqrt{3}$$

El valor mínimo pedido de  $\alpha$  es  $54\sqrt{3}$ . ☺

**Ejercicio resuelto 146** Calcula el mínimo valor de  $\sum_{k=1}^n (x - a_k)^2$  donde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son números reales dados.

**Solución.** Se trata de calcular el mínimo absoluto de la función  $f(x) = \sum_{k=1}^n (x - a_k)^2$  cuando  $x \in \mathbb{R}$ . Cuando una función no está definida en un intervalo cerrado hay que estudiar el signo de la derivada si queremos calcular máximos o mínimos absolutos *cuya existencia habrá que justificar*. Tenemos

$$f'(x) = 2 \sum_{k=1}^n (x - a_k) = 2nx - 2 \sum_{k=1}^n a_k$$

que se anula solamente en

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Como  $f''(x) = 2n > 0$ , se sigue que  $f'(x)$  es creciente y, por tanto,  $f'(x) < 0$  si  $x < \bar{x}$  y  $f'(x) > 0$  si  $x > \bar{x}$ . Luego  $f(\bar{x}) \leq f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Es decir, el valor mínimo buscado se obtiene cuando  $x$  se sustituye por la media aritmética,  $\bar{x}$ , de  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . ☺

**Ejercicio resuelto 147** Calcula la imagen de  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^{1/x}$ .

**Solución.** Como se trata de una función continua, definida en un intervalo, su imagen tiene que ser un intervalo. Escribamos  $f(x) = \exp\left(\frac{\log x}{x}\right)$ . Tenemos que  $f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2} f(x)$ . Es evidente que  $f(x) > 0$  para todo  $x > 0$ . La derivada se anula solamente para  $x = e$ , y  $f'(x) > 0$  para  $0 < x < e$ ,  $f'(x) < 0$  para  $x > e$ . Deducimos que en  $x = e$  la función alcanza un máximo absoluto. Es claro que  $f$  no alcanza ningún mínimo absoluto aunque toma valores arbitrariamente próximos a 0, pues como  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\log x}{x} = -\infty$ , se sigue que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$ . Concluimos que la imagen de  $f$  es el intervalo  $]0, e^{1/e}]$ . ☺

**Ejercicio resuelto 148** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = e^{-1/x^2}$  para  $x \neq 0$ , y  $f(0) = 0$ . Estudia la continuidad y derivabilidad de  $f$  y calcula su imagen.

**Solución.** Consideremos la función  $g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  definida para todo  $x > 0$  por  $g(x) = e^{-1/x} = \frac{1}{e^{1/x}}$ , y  $g(0) = 0$ . Recuerda que para todo número  $r \in \mathbb{R}$  se verifica que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r}{e^x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^r e^{1/x}} = 0$$

Como  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = 0$ , la función  $g$  es continua en  $\mathbb{R}_0^+$ . Para  $x > 0$  es

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x} = \frac{1}{x^2 e^{1/x}},$$

por lo que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g'(x) = 0$  y, por un resultado de teoría usado ya en varias ocasiones,

concluimos que  $g$  es derivable en 0 con  $g'(0) = 0$  siendo, además,  $g'$  continua en 0 y, por tanto, en  $\mathbb{R}_0^+$ . Como para  $x > 0$  es  $g''(x) = (-2x^{-3} + x^{-4}) e^{-1/x}$ , se sigue que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g''(x) = 0$ , luego  $g$  es dos veces derivable en 0 siendo  $g''(0) = 0$ . De esta forma

puedes demostrar por inducción que  $g$  tiene derivadas de todos órdenes en  $x = 0$  siendo  $g^{(n)}(0) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Como  $f(x) = g(x^2)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , se sigue que también  $f$  tiene derivadas de todos órdenes en  $x = 0$  siendo  $f^{(n)}(0) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por tanto,  $f$  tiene derivadas de todos órdenes en  $\mathbb{R}$ , es decir, es una función de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}$ .

Sabemos que la imagen de  $f$  es un intervalo. El mínimo absoluto de  $f$  se alcanza en  $x = 0$ . Como  $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$  ( $x \neq 0$ ), se tiene que  $f'(x) < 0$  si  $x < 0$  y  $f'(x) > 0$  si  $x > 0$ . Luego  $f$  es estrictamente decreciente en  $]-\infty, 0]$  y estrictamente creciente en  $[0, +\infty[$ . Además como  $f(-x) = f(x)$ , tenemos que  $f(\mathbb{R}) = f([0, +\infty[) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[ = [0, 1[$ . ☺

**Ejercicio resuelto 149** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$  y derivable dos veces en  $]a, b[$ . Supongamos que el segmento de extremos  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$  corta a la gráfica de  $f$  en un punto  $(c, f(c))$  con  $a < c < b$ . Demuestra que existe algún punto  $d \in ]a, b[$  tal que  $f''(d) = 0$ .

**Sugerencia.** Interpreta gráficamente el enunciado.

**Solución.**

Basta aplicar el teorema del valor medio a  $f$  en los intervalos  $[a, c]$  y  $[c, b]$  para obtener que hay puntos  $u \in ]a, c[$ ,  $v \in ]c, b[$  tales que

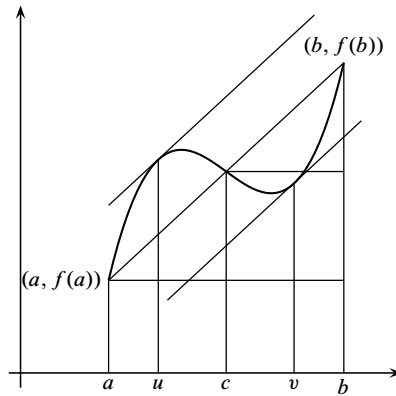
$$f'(u) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}, \quad f'(v) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

Como los puntos  $(a, f(a))$ ,  $(c, f(c))$  y  $(b, f(b))$  están alineados es:

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Por tanto  $f'(u) = f'(v)$ .

Aplicamos ahora el teorema de Rolle a  $f'$  en  $[u, v]$ , para concluir que hay algún  $z \in ]u, v[$  tal que  $f''(z) = 0$ . ☺



**Ejercicio resuelto 150** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivable y  $f'$  creciente. Prueba que la función  $g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada para todo  $x \in ]a, b[$  por  $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  es creciente.

**Solución.**

Podemos derivar  $g(x)$  como se deriva un cociente. Tenemos

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x - a) - (f(x) - f(a))}{(x - a)^2}, \quad (a < x \leq b)$$

Aplicando el teorema del valor medio a  $f$  en el intervalo  $[a, x]$ , tenemos  $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$  para algún  $c \in ]a, x[$ . Por tanto

$$f'(x)(x - a) - (f(x) - f(a)) = (f'(x) - f'(c))(x - a) \geq 0$$

por ser  $f'$  creciente. Concluimos que  $g'(x) \geq 0$  para todo  $x \in ]a, b[$ , lo que implica que  $g$  es creciente en dicho intervalo. ☺



**Ejercicio resuelto** 151 Justifica que existe una función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivable y que verifica que  $g(x) + e^{g(x)} = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Calcula  $g'(1)$  y  $g'(1 + e)$ .

**Solución.**

Se trata de probar que la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = e^x + x$  es una biyección de  $\mathbb{R}$  sobre  $\mathbb{R}$ , pues entonces llamando  $g$  a la función inversa de  $f$ , se tendrá que  $f(g(x)) = x$ , es decir,  $g(x) + e^{g(x)} = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Naturalmente, sería una ingenuidad intentar calcular de forma explícita la función inversa de  $f$ , pues la igualdad  $x + e^x = y$  no permite expresar de forma elemental  $x$  como función de  $y$ . Hemos de contentarnos con demostrar que la función  $g$  existe.

Desde luego, como  $f'(x) = 1 + e^x > 0$ , se sigue que  $f$  es inyectiva, de hecho, estrictamente creciente en  $\mathbb{R}$ . Además como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , se sigue que la imagen de  $f$  es todo  $\mathbb{R}$  (porque debe ser un intervalo no minorado ni mayorado). Luego  $f$  es una biyección y su función inversa,  $g = f^{-1}$  verifica que  $g(x) + e^{g(x)} = x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

En virtud del teorema de la función inversa, sabemos que  $g$  es derivable y la relación entre las respectivas derivadas viene dada por  $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ . Como  $g(1) = 0$  (porque  $f(0) = 1$ ) y  $g(1 + e) = 1$  (porque  $f(1) = 1 + e$ ), deducimos que

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}, \quad g'(1 + e) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1 + e}.$$

☺

## 6.8. Orígenes y desarrollo del concepto de derivada

El concepto de derivada presupone los de función y de límite funcional, los cuales, como ya hemos visto en capítulos anteriores, tuvieron una larga evolución hasta alcanzar su significado actual, por eso la definición de derivada 6.1 es relativamente reciente. No obstante, técnicas en las que podemos reconocer el uso, más o menos explícito, de derivadas, se han venido usando desde el siglo XVII, incluso antes de que Newton y Leibniz, en el último tercio de dicho siglo, las formularan en términos de *fluxiones* y de *cocientes diferenciales* respectivamente. Durante los siglos XVIII y XIX las derivadas fueron ampliamente desarrolladas y aplicadas a campos muy diversos y no fueron definidas en los términos actuales hasta el último tercio del siglo XIX. Todo este proceso lo resume la historiadora de las matemáticas Judith V. Grabiner en una frase feliz [8]: “Primero, la derivada fue usada, después descubierta, explorada y desarrollada y, finalmente, definida”.

En lo que sigue vamos a repasar muy someramente este proceso. Además de la referencia antes citada, he seguido de cerca los trabajos de Kirsti Andersen [1], Israel Kleiner [10] y González Urbaneja [7].

### 6.8.1. Las matemáticas en Europa en el siglo XVII

Es conocido que la carencia de una teoría aritmética satisfactoria de las cantidades inconmensurables, hizo que los matemáticos griegos consideraran la Geometría como una ciencia más general que la Aritmética, lo que condujo al desarrollo de un álgebra geométrica que fue usada por Euclides, Arquímedes y Apolonio para realizar sus cálculos. La consecuencia de esta actitud fue que durante casi 2000 años, en Europa, casi todo razonamiento matemático riguroso se expresó en lenguaje geométrico.

Ya hemos comentado en capítulos anteriores cómo la herencia matemática griega pasó a los árabes de donde regresó a Europa ya en el siglo XII. En estos siglos se desarrolló sobre todo la aritmética y los comienzos del álgebra. Pero hay que esperar hasta el siglo XVII para que en Europa empiecen a notarse cambios significativos en la forma de hacer matemáticas y a lograr avances que abren nuevas perspectivas. Las características principales de las matemáticas en el siglo XVII en Europa son las siguientes.

- Asimilación y síntesis de la tradición clásica griega y del legado árabe.
- Se sigue admirando el rigor demostrativo euclidiano pero se buscan procedimientos heurísticos. Se impone la idea de “primero descubrir y luego demostrar”.
- Progresos decisivos en el simbolismo algebraico (Viète, Stevin). Concepto de cantidad abstracta.
- Invención de la geometría analítica por Fermat y Descartes.
- Multitud de nuevas curvas, muchas de ellas curvas mecánicas, como la cicloide, que llevan consigo problemas de tangentes, cuadraturas, centros de gravedad, máximos y mínimos, rectificaciones.
- Invención de métodos infinitesimales para tratar problemas de cuadraturas, tangentes, máximos y mínimos. Libre uso del infinito.
- Inicios del estudio matemático del movimiento. Concepto de cantidad variable.
- La Revolución Científica protagonizada por Copérnico, Galileo y Kepler. Mecanicismo.
- Invención de los logaritmos por Neper. Progresos de la astronomía y de la trigonometría. Desarrollo de la óptica.
- Creación de instituciones científicas como la Royal Society (1660) en Londres y la Académie des Sciences (1666) en París y comienzo de las publicaciones científicas periódicas.

En el periodo de 1630 a 1660 empiezan a usarse técnicas en las que podemos apreciar el uso de derivadas. Suelen ser técnicas específicas para resolver problemas concretos de forma empírica, con frecuencia dichas técnicas no se justifican sino que, simplemente, se comprueba que proporcionan soluciones correctas. Los matemáticos de la época se interesaban por problemas de óptica, por ejemplo, determinar la forma de una lente que hace que todos los rayos luminosos paralelos entre sí o los que parten de un único foco, después de atravesar la lente, converjan en un único punto. Problemas físicos, como la determinación de la trayectoria de un cuerpo que se mueve alrededor de un centro y que cae al mismo tiempo hacia ese centro con aceleración constante. Otros problemas consistían en el cálculo de tangentes y de valores máximos o mínimos. Estaban, además, los problemas relacionados con la integral (cuadraturas, áreas de superficies, centros de gravedad, rectificaciones de curvas, . . .) que consideraremos en el capítulo correspondiente.

## 6.8.2. Cálculo de tangentes y de valores extremos

Los matemáticos de la antigüedad sabían cómo trazar tangentes a diversos tipos de curvas. El concepto de tangencia de los griegos es estático y, naturalmente, geométrico. Inicialmente, la tangente se considera como una recta que toca a la curva sin cortarla. Esta definición resultaba apropiada para la circunferencia pero no lo era para otras curvas. En el siglo III a.C., Apolonio definió la tangente a una sección cónica y procedió a determinarla en cada caso. Las técnicas para el cálculo de tangentes eran, por supuesto, geométricas. Para curvas como la espiral de Arquímedes o la conoide de Nicomedes estas técnicas no eran de gran utilidad.

Con la invención de la geometría analítica, había una enorme variedad de nuevas curvas para cuyo estudio no servían los métodos tradicionales. Los matemáticos del siglo XVII se vieron en la necesidad de inventar nuevas técnicas para calcular tangentes. Vamos a considerar algunas de las aportaciones más significativas.

### 6.8.2.1. El método de máximos y mínimos de Fermat

En 1637 Fermat escribió una memoria titulada *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (“Método para la investigación de máximos y mínimos”). En ella se establecía el primer procedimiento general conocido para calcular máximos y mínimos. Fermat se expresa como sigue.

Toda la teoría de la investigación de máximos y mínimos supone la consideración de dos incógnitas y la única regla siguiente:

1. Sea  $a$  una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga al enunciado).
2. Se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de  $a$  en términos que pueden ser de cualquier grado.
3. Se sustituirá a continuación la incógnita original  $a$  por  $a + e$ , y se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de  $a$  y  $e$ , en términos que pueden ser de cualquier grado.
4. Se “adigulará” para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima.
5. Se eliminarán los términos comunes de ambos lados, tras lo cual resultará que a ambos lados habrá términos afectados de  $e$  o de una de sus potencias.
6. Se dividirán todos los términos por  $e$ , o por alguna potencia superior de  $e$ , de modo que desaparecerá la  $e$ , de al menos uno de los términos de uno cualquiera de los dos miembros.
7. Se suprimirán, a continuación, todos los términos donde todavía aparece la  $e$  o una de sus potencias, y se iguala lo que queda, o bien si en uno de los miembros no queda nada, se igualará, lo que viene a ser lo mismo, los términos afectados con signo positivo a los afectados con signo negativo.
8. La resolución de esta última ecuación dará el valor de  $a$ , que conducirá al máximo o mínimo, utilizando la expresión original.

Fermat ilustraba su método hallando el punto  $E$  de un segmento  $AC$  que hace máxima el área del rectángulo  $AE.EC$ .

Pongamos  $AC = b$ .

1. Sea  $a$  uno de los segmentos, el otro será  $b - a$ .
2. El producto del que se debe encontrar el máximo es  $ba - a^2$ .

3. Sea ahora  $a + e$  el primer segmento de  $b$ , el segundo segmento será  $b - a - e$ , y el producto de segmentos:  $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$ .
4. Se debe “adigular” al precedente:  $ba - a^2 + be - 2ae - e^2 \sim ba - a^2$ .
5. Suprimiendo términos comunes:  $be \sim 2ae + e^2$ .
6. Dividiendo todos los términos por  $e$ :  $b \sim 2a + e$ .
7. Se suprime la  $e$ :  $b = 2a$ .
8. Para resolver el problema se debe tomar por tanto la mitad de  $b$ .

El recurso de hacer  $e = 0$  es equivalente a lo indicado en la instrucción 7 de Fermat. Esto era precisamente lo que se hacía al aplicar el método, a pesar de que antes era necesario dividir por  $e$ , lo que resultaba algo contradictorio.

Debemos observar que el método de Fermat da una condición necesaria para los máximos y mínimos, pero esa condición no es suficiente y tampoco distingue máximos de mínimos. Es un método puramente algebraico y algorítmico, no geométrico.

Es tentador reproducir este razonamiento en términos actuales. Hagamos  $a = x$ ,  $e = \Delta x$ , y pongamos  $f(x) = x(b - x)$ .

$$1 - 5 \quad f(x + \Delta x) - f(x) \sim 0.$$

$$6 \quad \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \sim 0.$$

$$7, 8 \quad \left( \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)_{\Delta x=0} = 0$$

Para funciones derivables podemos interpretar todo esto como que el valor de  $x$  que hace máximo o mínimo a  $f(x)$  es la solución de resolver la ecuación

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$$

Sin embargo, esto significa extrapolar demasiado el contenido estricto del método. Lo que estamos haciendo es interpretar con nuestra mirada de hoy lo que hizo Fermat. En primer lugar, Fermat no pensaba en una cantidad como una función, y por eso habla de “cantidad máxima o mínima”, no de una función que alcance un máximo o un mínimo. Fermat no tiene clara la noción de variable independiente. Él está pensando en una ecuación algebraica con dos incógnitas que interpreta como segmentos, es decir, magnitudes lineales dadas. Fermat no decía nada acerca de que  $e$  fuese un infinitesimal, ni siquiera una magnitud muy pequeña, y el método no implica ningún concepto de límite, sino que es puramente algebraico. Además, la condición 6 no tiene sentido en esta interpretación. Los problemas a los que Fermat aplicó su método son problemas de construcciones geométricas más que de optimización de cantidades.

### 6.8.2.2. El método de las tangentes de Fermat

En la misma memoria antes referida, Fermat, determina la subtangente a una parábola haciendo uso de su método para máximos y mínimos. Su razonamiento es como sigue.

En la figura (6.12), el segmento  $TQ$  es la subtangente a la parábola en un punto dado  $P$ . El vértice de la parábola es  $V$ . Teniendo en cuenta que los triángulos  $TQP$  y  $TQ_1P_1$  son

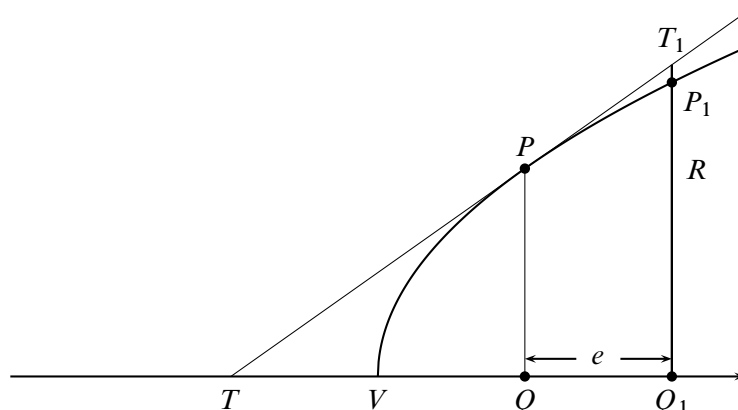


Figura 6.11. Cálculo de la subtangente

semejantes, resulta

$$\frac{T_1Q_1}{PQ} = \frac{TQ_1}{TQ} \quad (6.35)$$

Teniendo en cuenta ahora la propiedad de la parábola

$$\frac{VQ_1}{VQ} = \frac{P_1Q_1^2}{PQ^2}$$

y que  $P_1Q_1 < T_1Q_1$ , deducimos que:

$$\frac{VQ_1}{VQ} < \frac{TQ_1^2}{TQ^2} \quad (6.36)$$

Pongamos ahora  $VQ = a$ , que es la abscisa de la parábola en  $P$ , conocida porque se conoce  $P$ . Hagamos también  $TQ = x$  que es la subtangente que queremos calcular, y  $QQ_1 = e$ . La igualdad (6.36) se expresa por:

$$\frac{a+e}{a} < \frac{(x+e)^2}{x^2} \iff ax^2 + ex^2 < ax^2 + 2aex + ae^2$$

Fermat aplica su método de máximos y mínimos y sustituye esta desigualdad por la *adigualdad*

$$ax^2 + ex^2 \sim ax^2 + 2aex + ae^2$$

Cancelando términos y dividiendo por  $e$  obtenemos

$$x^2 \sim 2ax + ae$$

Eliminando ahora el término que queda en  $e$ , igualando y simplificando por  $x$ , se obtiene que  $x = 2a$ , resultado ya conocido de la Antigüedad y que expresa que la subtangente es el doble de la abscisa.

Realmente no se entiende bien la razón de por qué Fermat usa su método de máximos y mínimos para calcular tangentes y Descartes hizo una dura crítica de esta forma de proceder.

Para responder a estas críticas, Fermat desarrolló, en una memoria de 1638, un procedimiento bastante general para calcular tangentes que, con notación actual, podemos resumir como sigue. Sea  $P = (x, y)$  un punto de una curva  $f(x, y) = 0$  y sea  $P_1 = (x + e, y_1)$  otro punto de la curva próximo a  $P$  como en la figura (6.11). Llamemos  $b = TQ$ , la subtangente en  $P$ . Teniendo en cuenta que  $PQ = y$ , la igualdad (6.35) se escribe como

$$T_1 Q_1 = \frac{y(b + e)}{b}$$

Como  $T_1 Q_1$  es casi igual a  $y_1 = P_1 Q_1$ , Fermat escribe

$$f\left(x + e, \frac{y(b + e)}{b}\right) \sim 0$$

y a esta *adigualdad* le aplica su método para máximos y mínimos. Es fácil ver que ello conducirá a una expresión para  $b$  dada por

$$b = -\frac{y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}$$

Que, usando que la tangente viene dada por  $y/b$ , podemos escribir, viendo  $y$  como función (implícita) de  $x$ , en la forma familiar

$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}$$

La idea de “*adigualdad*” en Fermat puede interpretarse algo así como “cantidades infinitamente próximas”. De alguna forma Fermat está considerando cantidades infinitesimales.

Es tentador expresar en términos actuales las ideas de Fermat para calcular tangentes. Esencialmente, dado un punto  $P = (a, f(a))$  en una curva  $y = f(x)$ , se trata de calcular la pendiente de la curva en  $P$ . Sea  $QQ_1$  un incremento de  $TQ$  en una cantidad  $E$ . Ya que los triángulos  $TQP$  y  $PRT_1$  son semejantes, se tiene

$$\frac{PQ}{TQ} = \frac{T_1 R}{E}$$

Pero, dice Fermat,  $T_1 R$  es casi igual a  $P_1 R$ ; por tanto tenemos la *adigualdad*

$$\frac{PQ}{TQ} \sim \frac{P_1 Q_1 - QP}{E}$$

Poniendo  $PQ = f(a)$ , la igualdad anterior puede escribirse como:

$$\frac{f(a)}{TQ} \sim \frac{f(a + E) - f(a)}{E}$$

Ahora, dice Fermat, se cancelan términos iguales en  $f(a + E) - f(a)$ , se divide por  $E$  y finalmente, se ignoran los términos que aún contengan  $E$  (lo que equivale a hacer  $E = 0$ ), y

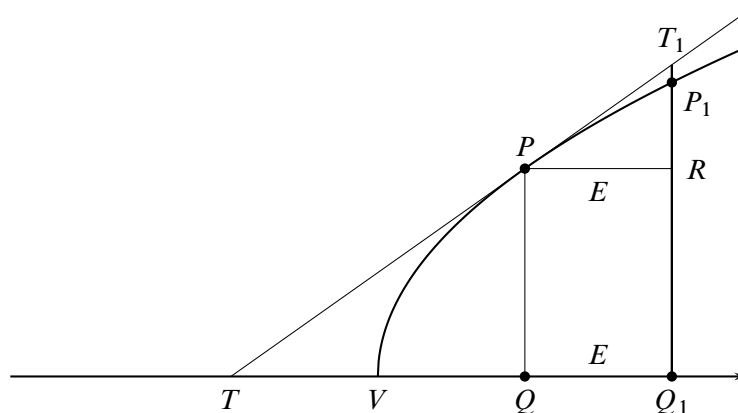


Figura 6.12. Cálculo de la tangente

el resultado es la pendiente de la tangente en  $P$ . Está claro que el procedimiento que indica Fermat es equivalente a calcular

$$\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(a + E) - f(a)}{E}$$

Naturalmente, a esta interpretación se le pueden hacer las mismas observaciones que hicimos a la interpretación análoga del método para máximos y mínimos.

**6.48 Ejemplo.** Sea  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  y  $a = 2$ . Entonces  $f(2) = 3$ . Pongamos  $c = TQ$  la longitud de la subtangente. Tenemos la *adigualdad*:

$$\frac{3}{c} = \frac{f(2 + E) - f(2)}{E} = \frac{2E + E^2}{E} = 2 + E$$

Haciendo  $E = 0$  se obtiene  $3/c = 2$ , por la que la subtangente es  $c = 3/2$  y el valor de la pendiente de la tangente es  $3/c = 2$  que, efectivamente es igual a la derivada de  $f$  en  $x = 2$ . ♦

### 6.8.2.3. El método de Roberval y de Torricelli para las tangentes

En 1630 Roberval y Torricelli descubrieron independientemente un método para calcular tangentes por medio de consideraciones cinemáticas. Este método se apoya en dos ideas básicas: la primera es la de considerar una curva como la trayectoria de un punto móvil que obedece a dos movimientos simultáneamente, y la segunda es la de considerar la tangente en un punto de la curva como la dirección del movimiento en ese mismo punto. Si la razón entre las velocidades de los dos movimientos es conocida, la dirección del movimiento resultante se puede hallar mediante la ley del paralelogramo. Ya en la antigüedad, Arquímedes había usado un método análogo para trazar la tangente a su espiral.

Consideremos una cicloide, esto es la curva que describe un punto de una circunferencia que rueda sin deslizar. El punto que genera la cicloide tiene una velocidad angular igual a la velocidad de avance horizontal, por tanto, su tangente en un punto  $P$  se obtiene sumando el

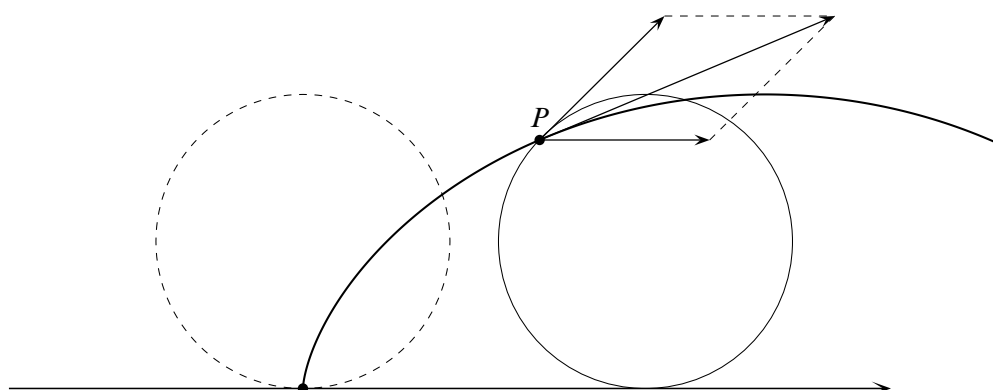


Figura 6.13. Tangente a la cicloide

vector tangente a la circunferencia generadora en  $P$  y un vector horizontal en  $P$ , y ambos vectores tienen igual módulo.

Naturalmente, esta idea de la tangente solamente podía aplicarse a curvas mecánicas, si bien tenía la virtud de relacionar geometría y dinámica siguiendo las ideas de Galileo.

#### 6.8.2.4. El triángulo diferencial de Barrow

Isaac Barrow (1630 - 1677) también dio un método para calcular tangentes. Barrow era un admirador de los geómetras antiguos y editó las obras de Euclides, Apolonio y de Arquímedes, a la vez que publicaba sus propias obras *Lectiones Opticae* (1669) y *Lectiones Geometricae* (1670) en la edición de las cuales colaboró Newton. El tratado *Lectiones Geometricae* se considera una de las principales aportaciones al Cálculo. En él Barrow quiso hacer una puesta al día de todos los últimos descubrimientos, principalmente de problemas de tangentes y cuadraturas. Barrow hace un tratamiento detallado de todos estos problemas incluyendo conceptos como tiempo y movimiento y usando métodos infinitesimales y métodos de indivisibles.

Una de las herramientas a las que saca gran partido es al triángulo característico o triángulo diferencial.

Partiendo del triángulo  $PRQ$ , que resulta de un incremento  $PR$ , como este triángulo es semejante al  $PNM$ , resulta que la pendiente de la tangente  $PM/MN$  es igual a  $QR/PR$ . Barrow afirma que cuando el arco  $PP_1$  es muy pequeño podemos identificarlo con el segmento  $PQ$  de la tangente en  $P$ . El triángulo  $PRP_1$  de la figura de la derecha, en el cual  $PP_1$  es considerado a la vez como un arco de la curva y como parte de la tangente, es el *triángulo característico o diferencial*. Ya había sido usado mucho antes por Pascal y otros en problemas de cuadraturas.

En la Lección X de *Lectiones*, Barrow calcula la tangente a una curva, dada por una ecuación polinómica  $f(x, y) = 0$ , en un punto de la misma  $P = (x, y)$  de la forma siguiente. Pongamos  $P_1 = (x + e, y + a)$  un punto de la curva próximo a  $P$  y sustituyamos estas coor-



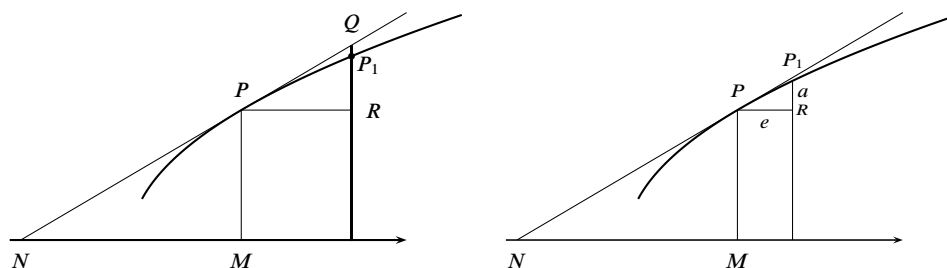


Figura 6.14. Triángulo diferencial

denadas en la ecuación  $f(x, y) = 0$ . En palabras de Barrow:

Rechacemos todos los términos en los que no hay  $a$  o  $e$  (porque se anulan unos a otros por la naturaleza de la curva); rechacemos todos los términos en los que  $a$  o  $e$  están por encima de la primera potencia, o están multiplicados ambos (porque, siendo infinitamente pequeños, no tienen valor en comparación con el resto).

Después de estas operaciones se puede calcular el cociente  $a/e$  que es la pendiente de la curva en el punto  $P$ .

**6.49 Ejemplo.** Consideremos la curva  $x^3 + y^3 = r^3$  y sigamos el método de Barrow para calcular su pendiente en un punto  $P = (x, y)$  de la misma. Como el punto  $P_1 = (x + e, y + a)$  está en la curva se tiene:

$$(x + e)^3 + (y + a)^3 = r^3$$

Esto es

$$x^3 + 3x^2e + 3xe^2 + e^3 + y^3 + 3y^2a + 3ya^2 + a^3 = r^3$$

Simplificamos usando que  $x^3 + y^3 = r^3$  y eliminando las potencias de  $a$  y  $e$  de grado mayor que uno, y obtenemos

$$3x^2e + 3y^2a = 0$$

de donde resulta la pendiente:

$$\frac{a}{e} = -\frac{x^2}{y^2}$$



Observa que este procedimiento equivale a quedarse con la aproximación lineal de la función en el punto  $P$  y eso es como reemplazar el triángulo  $PRP_1$  en la figura de la izquierda por el triángulo diferencial.

El método de Barrow es parecido al de Fermat, la diferencia es que Barrow considera incrementos independientes de las dos variables con el propósito de calcular el cociente  $a/e$ . Parece que Barrow no conocía directamente la obra de Fermat.

### 6.8.3. Los inventores del Cálculo

El método de Fermat para el cálculo de valores máximos o mínimos y la técnica para el cálculo de tangentes que, esencialmente, consistía en calcular el cociente:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

realizando las operaciones algebraicas necesarias para desarrollar y simplificar el numerador y después dividir por  $h$  para, finalmente, hacer  $h = 0$ , fueron aplicados en una gran variedad de situaciones. La relación entre ambos tipos de problemas acabó siendo bien entendida: los valores extremos se obtenían en los puntos donde la pendiente de la tangente se anulaba. Así mismo, de la multitud de casos particulares estudiados, emergieron ciertas regularidades que llevaron a reformular las citadas técnicas de forma más general. De esta forma, aunque en el 1660 no se disponía de un concepto general de derivada ni se conocía la relación crucial entre problemas de tangentes y de áreas, se habían desarrollado bastantes métodos eficaces, aunque no rigurosos, para resolver muchos tipos de problemas de cálculo. Solamente faltaba realizar la gran síntesis de todo el trabajo realizado desde 1630. Eso es lo que hicieron Newton y Leibniz.

La invención del Cálculo es uno de los grandes logros de la humanidad. El Cálculo se ha convertido en la *lingua franca* de todas las ciencias. Ha sido, y sigue siendo, una herramienta fundamental para la comprensión científica de la Naturaleza.

En el último tercio del siglo XVII, Newton (en 1664 - 1666) y Leibniz (en 1675), de forma independiente cada uno, inventaron el Cálculo. Esto quiere decir que:

- Unificaron y resumieron en dos conceptos generales, el de integral y derivada, la gran variedad de técnicas diversas y de problemas que se abordaban con métodos particulares.
- Desarrollaron un simbolismo y unas reglas formales de “cálculo” que podían aplicarse a funciones algebraicas y trascendentes, independientes de cualquier significado geométrico, que hacía fácil, casi automático, el uso de dichos conceptos generales.
- Reconocieron la relación inversa fundamental entre la derivación y la integración.

Newton llamó a nuestra derivada una *fluxión* – una razón de cambio o flujo; Leibniz vio la derivada como una razón de diferencias infinitesimales y la llamó el *cociente diferencial*. Newton hizo sus primeros descubrimientos diez años antes que Leibniz quien, sin embargo, fue el primero en publicar sus resultados.

### 6.8.4. Newton y el cálculo de fluxiones



Los principales descubrimientos matemáticos de Newton en el campo del cálculo infinitesimal datan de los llamados *Anni Mirabiles* 1665 y 1666. La Universidad de Cambridge, en la que Newton se había graduado como *bachelor of arts* en 1664, estuvo cerrada por la peste esos dos años. Newton pasó ese tiempo en su casa de Woolsthorpe y, como él mismo reconoció cincuenta años después, ése fue el período más creativo de su vida.

Figura 6.15. Newton

A principios de 1665 descubre el teorema del binomio y el cálculo con las series infinitas. A finales de ese mismo año, el método de fluxiones, es decir, el cálculo de derivadas. En 1666 el método inverso de fluxiones y la relación entre cuadraturas y fluxiones. En esos dos años también inició las teorías de los colores y de la gravitación universal. Newton tenía 24 años, había nacido el día de Navidad de 1642.

Newton desarrolló tres versiones de su cálculo. En la obra *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, que Newton entregó a su maestro Barrow en 1669, y que puede considerarse el escrito fundacional del Cálculo, Newton usa conceptos infinitesimales de manera similar a como hacía el propio Barrow.

Una segunda presentación del Cálculo es la que realiza Newton en el libro *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, escrito hacia 1671 y que se publicó mucho después en 1736. Newton considera cantidades variables que van fluyendo con el tiempo, a las que llama *fluente*s. Después se introducen las razones de cambio instantáneas de las fuentes, a las que llama *fluxiones*, que son las derivadas respecto al tiempo de las fuentes. Newton representaba a las primeras por letras  $x, y, z, \dots$  y a las segundas por letras punteadas  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dots$ . Los incrementos de las fuentes  $x, y, z, \dots$ , los representa por medio de las correspondientes fluxiones en la forma  $\dot{x}o, \dot{y}o, \dot{z}o, \dots$ , y los llama *momentos*, donde  $o$  es entendido como un incremento infinitesimal de tiempo. Newton desarrolló una serie de algoritmos y redujo muchos problemas como determinación de tangentes, máximos y mínimos, áreas y superficies, curvaturas, longitudes de arcos, centros de gravedad etc., a dos problemas fundamentales que pueden formularse tanto en términos mecánicos como en términos matemáticos:

**Problema 1** Determinación de la velocidad de movimiento en un momento de tiempo dado según un camino dado. De otro modo: dada la relación entre las cantidades fuentes, determinar la relación de las fluxiones.

**Problema 2** Dada la velocidad de movimiento determinar el camino recorrido en un tiempo dado. Matemáticamente: determinar la relación entre las fuentes dada la relación entre las fluxiones.

Hay que notar que Newton no piensa en términos de funciones con el significado actual de ese término, sino que imagina curvas o superficies descritas por las variables, o sea, considera relaciones entre las fuentes del tipo  $f(x, y, z, \dots) = 0$ , donde  $f$  para él es una expresión analítica finita o infinita. Por tanto, el primer problema planteado puede verse como un problema de derivación implícita: supuesta conocida la expresión analítica que satisfacen las fuentes  $f(x, y, z, \dots) = 0$ , obtener la expresión analítica  $F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dots) = 0$  que satisfacen las fluxiones. Para este problema, Newton introdujo un algoritmo que sistematizaba los cálculos necesarios. Por ejemplo, sea la curva de ecuación

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

Sustituyendo  $x$  e  $y$  por  $x + \dot{x}o$  e  $y + \dot{y}o$  respectivamente, tenemos:

$$(x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3) - a(x^2 + 2\dot{x}ox + \dot{x}^2o^2) + \\ + a(xy + \dot{x}oy + \dot{y}ox + \dot{x}\dot{y}o^2) - (y^3 + 3\dot{y}ox^2 + 3\dot{y}^2o^2y + \dot{y}^3o^3) = 0$$

Teniendo en cuenta ahora que  $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ , dividiendo por  $o$  y despreciando los demás términos que contengan a  $o$ , resulta

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + ax\dot{y} - 3\dot{y}y^2 = 0$$

Esta es la relación que satisfacen las fluxiones. A partir de ella puede obtenerse la tangente a la curva  $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$  en cualquier punto  $(x, y)$  de la misma, que viene dada por:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}$$

Como ya hemos indicado, Newton aplica los resultados sobre flujos y fluxiones a la resolución de multitud de problemas. Por ejemplo, con respecto a los problemas de máximos y mínimos, escribe:

Quando una cantidad es la más grande o la más pequeña, en ese momento su fluir ni crece ni decrece: si creciera, eso probaría que era menor y que lo que sigue sería más grande que lo que ahora es, y recíprocamente pasaría si decreciera. Así, calcúlese su fluxión como se ha explicado en el problema 1 e igúlese a cero.

De nuevo, Newton usa el teorema fundamental del cálculo para realizar cuadraturas. Escribe:

Problema 9: Determinar el área de cualquier curva propuesta.

La resolución del problema está basada en el establecimiento de la relación entre la cantidad fuente y su fluxión (problema 2).

Newton reduce la integración al proceso inverso del cálculo de fluxiones, esto es, al cálculo de primitivas.

El problema 2, es mucho más difícil que el problema 1, pues se trata de resolver una ecuación diferencial que puede ser muy general. Newton consideró varias posibilidades resolviendo algunos casos particulares. Para ello utilizó técnicas de cálculo de primitivas y de desarrollos en serie.

En *De Quadratura Curvarum*, escrita en 1676 y publicada en 1704, Newton propone fundamentar su cálculo de fluxiones en lo que llama *razones primera y última de incrementos evanescentes*. De esa forma se refiere Newton a los cocientes de los incrementos infinitesimales de las cantidades variables, y su objetivo es determinarlos en el momento en que dichas cantidades nacen desde cero (“razón primera”) o se anulan (“razón última”). Un ejemplo ayudará a entender el significado de estas ideas. En la introducción de la citada obra, Newton calcula la fluxión de  $x^n$ . Para ello, considera un incremento  $o$  de forma que  $x$  pasa a  $x + o$ . Entonces  $x^n$  se convierte en

$$(x + o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \dots$$

Los incrementos de  $x$  y  $x^n$ , a saber,

$$o \quad \text{y} \quad nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \dots$$

están entre sí en la misma razón que

$$1 \text{ a } nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}ox^{n-2} + \dots$$

Dice Newton “dejemos ahora que los incrementos se anulen y su última proporción será 1 a  $nx^{n-1}$ : por tanto, la fluxión de la cantidad  $x$  es a la fluxión de la cantidad  $x^n$  como 1 :  $nx^{n-1}$ ”.

Hay distintas interpretaciones de las razones que llevaron a Newton a exponer su cálculo de una u otra forma. La más extendida es que su intención era conseguir una fundamentación rigurosa del mismo. La primera exposición, basada en el concepto de cantidad infinitesimal, entendida como una cantidad menor que cualquier cantidad positiva pero no nula, presentaba problemas de coherencia lógica de los que Newton era muy consciente. En sus propias palabras, su cálculo estaba “*concisamente explicado más que exactamente demostrado*”.

En *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* (1671), el concepto básico es el de cantidad en movimiento o que fluye continuamente en el tiempo. Las magnitudes están generadas por el movimiento continuo y no por agregación de cantidades infinitesimales; la idea básica es la de continuidad tal como se observa en los procesos de la Naturaleza. Quizás Newton pretendía de esta forma evitar el uso de “infinitesimales estáticos o geométricos”, pero lo que realmente hizo fue sustituirlos por los infinitesimales de tiempo usados para definir los momentos de las fuentes. Conviene advertir que lo que Newton considera es la abstracción matemática análoga al tiempo, es decir, una magnitud independiente imaginaria abstracta que fluye uniformemente y con la que se relacionan todas las fuentes. Puede verse aquí un intento de Newton por evitar los problemas matemáticos del continuo (infinitesimales, indivisibles) y trasladarlos al mundo físico, a la continuidad de los procesos naturales y al movimiento. Por otra parte, Newton aceptaba como algo dado la idea intuitiva de velocidad instantánea de las fuentes, no le pareció preciso definirla.

En *Quadrature of Curves* (1676), Newton expresa su propósito de abandonar por completo el uso de cantidades infinitesimales. Manifiesta en este sentido que “*errores quam minimi in rebus mathematicis non sunt contemnendi*”, esto es, que en matemáticas ni siquiera los errores más pequeños pueden ser admitidos. Y eso es justamente lo que se hacía cuando se despreciaban en los cálculos cantidades infinitesimales. Seguidamente, enuncia su teoría de las “*razones primera y última de cantidades evanescentes*”. Estas ideas señalan claramente al concepto matemático de límite. Lo que expresa, a su manera, Newton es, en términos actuales, el límite de un cociente de funciones que se anulan. Pero estamos en el siglo XVII y se necesitarán casi 200 años para precisar matemáticamente el concepto de límite. Debemos notar que Newton usa dicho concepto a partir de la intuición mecánica del movimiento.

Por velocidad última se entiende aquella con la que el cuerpo se mueve, no antes de alcanzar el punto final y cesa, por consiguiente, el movimiento, ni tampoco después de haberlo alcanzado, sino aquella con la que se mueve cuando lo alcanza, esto es, aquella velocidad con la que el cuerpo alcanza el punto final y aquella con la que cesa el movimiento. De igual manera, ha de entenderse por razón última de cantidades evanescentes, la razón de cantidades, no antes de que desaparezcan, ni después de desaparecidas, sino aquella con la que desaparecen.

Newton tenía su particular idea de “límite”.

Las razones últimas con las que tales cantidades desaparecen en realidad no son razones de cantidades últimas, sino límites a los que tiende a acercarse siempre las razones de

cantidades continuamente decrecientes, límites a los que pueden acercarse más que una diferencia dada, pero nunca traspasarlo, ni tampoco alcanzarlo antes de que las cantidades disminuyan in infinitum.

La teoría de las razones últimas puede verse como una teoría cinemática de límites. Con esta teoría, Newton pretendía recuperar el rigor de la geometría de la Antigüedad.

[...] investigar las razones primera y última de cantidades finitas, nacientes o evanescentes, está en armonía con la geometría de los antiguos; y me he esforzado en probar que, en el método de fluxiones, no es necesario introducir en la geometría cantidades infinitamente pequeñas.

Otros autores opinan que estos tres métodos empleados por Newton responden, más que a fundamentar con rigor su cálculo, a distintos propósitos. Así, la teoría de fluxiones proporciona métodos heurísticos de descubrimiento y algoritmos útiles para el cálculo; la teoría de “razones primera y última” serviría al propósito de proporcionar demostraciones convincentes y el uso de los infinitesimos serviría para proporcionar atajos a las pruebas más rigurosas. Newton usó simultáneamente estas tres aproximaciones en la resolución de una gran variedad de problemas.

Newton realizó también contribuciones importantes en la teoría de ecuaciones, donde podemos destacar las “identidades de Newton” para la suma de las potencias de las raíces de una ecuación polinómica, y a la teoría de curvas, siendo notable su clasificación de las curvas de tercer grado.

*Considerando la matemática desde el comienzo del mundo hasta la época de Newton, lo que él ha hecho es, con mucho, la mitad mejor.* Leibniz

Las tres obras consideradas, escritas entre 1666 y 1676, se publicaron ya en el siglo XVIII, por eso la primera noticia impresa de la teoría de fluxiones apareció, de forma bastante circunstancial, en la obra magna de Newton *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, cuya primera edición se hizo en 1687. Los *Principia* consta de tres libros escritos en el estilo tradicional a la manera de los *Elementos* de Euclides, y su lenguaje es principalmente el de la geometría sintética.

Los *Principia* están considerados como la obra científica más importante de todos los tiempos y una hazaña intelectual incomparable por sus logros y sus consecuencias. En dicha obra Newton establece los fundamentos de la mecánica y enuncia las tres célebres leyes del movimiento, así como la ley de la gravitación universal. En los dos primeros libros, se estudia el movimiento de los cuerpos en el vacío y en un medio resistente. Newton deduce matemáticamente las tres leyes que Kepler había obtenido empíricamente. En el libro III, titulado *Sobre el Sistema del Mundo*, Newton desarrolla la mecánica celeste. Hace un detallado estudio de los movimientos de la Luna, explicando las causas de las mareas. Calcula la masa del Sol con respecto a la de la Tierra, estudia la precesión de los equinoccios, predice el achatamiento de la Tierra por los polos . . . .

En los *Principia* el mundo aparece como un sistema ordenado y armonioso en el que todo, los cielos, la tierra y el mar, obedecen unas pocas leyes matemáticas fundamentales. A partir de Newton quedará claro que no hay diferencias entre un mundo sublunar y otro supralunar, ni entre la Tierra y el Cielo; las leyes de la Naturaleza no hacen estas distinciones y en todas partes del Universo los procesos obedecen a las mismas leyes naturales inexorables.

El Universo newtoniano es un Cosmos diáfano y sereno ofrecido a la exploración racional del hombre. La gran obra de Newton proporcionará a la Ilustración, en el siglo XVIII, la base científica necesaria para acabar con una concepción conservadora y absolutista del poder político apoyada en dogmáticas concepciones religiosas.

El prestigio y admiración que gozó Newton en vida queda reflejado en las palabras de Alexander Pope:

*Nature, and Nature's Laws lay hid in Night:  
God said, Let Newton be – and All was light.*

Y ¿qué pensaba el propio Newton de sí mismo? Escuchemos sus palabras, ya casi al final de su vida.

No sé cómo puedo ser visto por el mundo, pero a mí me parece haber sido solamente como un niño que juega al borde del mar, y que se divierte al encontrar de vez en cuando una piedra más pulida o una concha más bonita de lo normal, mientras que el gran océano de la verdad yace ante mí completamente desconocido.

Newton murió en la noche del 20 de marzo de 1727, y fue enterrado con grandes honores en la abadía de Westminster entre los grandes hombres de Inglaterra.

### 6.8.5. Leibniz y el cálculo de diferencias



Figura 6.16. Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) nació en Leipzig (Alemania) en el seno de una piadosa familia luterana. A los quince años entró en la Universidad de su ciudad natal donde estudió una gran variedad de materias incluyendo derecho, teología, filosofía y matemáticas. Se doctoró a la edad de 21 años en la Universidad de Altdorf, en Nuremberg, donde le fue ofrecido un puesto de profesor que él rechazó.

A lo largo de su vida, Leibniz realizó múltiples actividades. Como abogado y diplomático trabajó para el Príncipe elector arzobispo de Maguncia y, desde 1676 hasta su muerte, para los Duques de Brunswick-Luneburgo (conocidos como príncipes electores de Hanover desde 1692), lo que le llevó a viajar por gran parte de Europa. Inventó una máquina de calcular, la primera máquina de este tipo capaz de realizar las operaciones de multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas. Como ingeniero trabajó en prensas hidráulicas, molinos de viento y desarrolló proyectos para drenar el agua de las minas de plata de las montañas de Harz en la Baja Sajonia. Como historiador escribió la historia de la casa de Brunswick, realizando muchas investigaciones genealógicas. Trabajó también como bibliotecario en la ciudad de Hanover.

Leibniz fue un pensador profundo. Como filósofo se propuso la creación de un álgebra del pensamiento humano, algo así como un lenguaje simbólico universal para escribir los razonamientos con símbolos y fórmulas, cuyas reglas de combinación permitieran reducir todo discurso racional a cálculos rutinarios. Esto explica el gran interés de Leibniz en desarrollar una notación matemática apropiada para su cálculo; de hecho, su notación, muy superior a la de Newton, es la que usamos actualmente. Leibniz fundó la Academia de Ciencias de Berlín

en 1700 y fue su primer presidente; también fue uno de los fundadores de la primera revista científica alemana, el *Acta Eruditorum*.

Aunque Leibniz publicó poco, mantuvo correspondencia con más de 600 eruditos y se han conservado sus manuscritos que están en el archivo que lleva su nombre en la ciudad de Hannover. Las contribuciones de Leibniz al álgebra (determinantes, resolución de ecuaciones), la historia natural, la geología y la lingüística son también importantes.

En 1672, estando en París en misión diplomática, Leibniz se dedicó intensamente al estudio de la matemática superior teniendo como guía al matemático y físico Christian Huygens (1629 - 1695). En los años 1673 y 1676 realizó, también en misión diplomática, dos viajes a Londres donde tuvo acceso al manuscrito de Newton *De Analysi*, circunstancia que se usó para acusar, hoy sabemos que sin motivo alguno, a Leibniz de plagio cuando se produjo la agria controversia sobre la prioridad en el descubrimiento del Cálculo. Los progresos matemáticos realizados por Leibniz en estos cuatro años fueron extraordinarios.

En las matemáticas de Leibniz son importantes los estudios sobre sucesiones numéricas y sus sucesiones de diferencias consecutivas asociadas. Dada una sucesión de números:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$$

Podemos formar la sucesión de sus diferencias primeras:

$$b_1 = a_1, b_2 = a_2 - a_1, b_3 = a_3 - a_2, b_4 = a_4 - a_3, \dots, b_n = a_n - a_{n-1}, \dots$$

Leibniz se había dado cuenta de la relación:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = a_n$$

lo que indica que las sucesiones de diferencias pueden sumarse fácilmente, y que el proceso de formar la sucesión de diferencias y después sumarla recupera la sucesión inicial, es decir, que se trata de operaciones inversas una de la otra. Esta sencilla idea, cuando se lleva al campo de la geometría, conduce al concepto central del cálculo de Leibniz que es el de “diferencial”, el cual tuvo para él diferentes significados en distintas épocas.

Leibniz consideraba una curva como un polígono de infinitos lados de longitud infinitesimal. Con una tal curva se asocia una sucesión de abscisas  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$  y una sucesión de ordenadas  $y_1, y_2, y_3, y_4, \dots$  donde los puntos  $(x_i, y_i)$  están todos ellos en la curva y son algo así como los “vértices” de la poligonal de infinitos lados que forma la curva. La diferencia entre dos valores sucesivos de  $x$  es llamada la *diferencial* de  $x$  y se representa por  $dx$ , significado análogo tiene  $dy$ . El diferencial  $dx$  es una cantidad fija, no nula, infinitamente pequeña en comparación con  $x$ , de hecho es una cantidad infinitesimal. Los lados del polígono que constituye la curva son representados por  $ds$ . Resulta así el *triángulo característico* de Leibniz que es el mismo que ya había sido considerado por Barrow.

Curiosamente, los términos “abscisa”, “ordenada” y “coordenadas”, tan propios de la geometría analítica, no fueron usados nunca por Descartes sino que son debidos a Leibniz; y mientras que nosotros hablamos de “diferenciales”, Leibniz siempre hablaba de “diferencias”.

El triángulo característico tiene lados infinitesimales  $dx$ ,  $dy$ ,  $ds$  y se verifica la relación  $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ . El lado  $ds$  sobre la curva o polígono se hace coincidir con la tangente a la curva en el punto  $(x, y)$ . La pendiente de dicha tangente viene dada por  $\frac{dy}{dx}$ , que es un



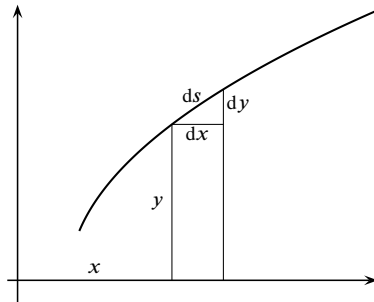


Figura 6.17. Triángulo característico

cociente de diferenciales al que Leibniz llamó *cociente diferencial*. Leibniz nunca consideró la derivada como un límite.

Leibniz investigó durante algún tiempo hasta encontrar las reglas correctas para diferenciar productos y cocientes. Dichas reglas se expresan fácilmente con su notación diferencial:

$$d(xy) = y dx + x dy, \quad d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y dx - x dy}{y^2}$$

La manera en que Leibniz llegó a estas fórmulas pudo ser como sigue. Consideremos

$$z_n = \left(\sum_{j=1}^n x_j\right) \left(\sum_{j=1}^n y_j\right)$$

Entonces

$$z_{n+1} - z_n = x_{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} y_j + y_{n+1} \sum_{j=1}^n x_j \quad (6.37)$$

Si interpretamos, al estilo de Leibniz, que  $x_j$  e  $y_j$  son diferencias de valores consecutivos de las cantidades  $x$  e  $y$  respectivamente, entonces los valores de dichas cantidades vendrán dados por las sumas respectivas  $x = \sum_{j=1}^n x_j$  e  $y = \sum_{j=1}^{n+1} y_j$ , mientras que  $dx = x_{n+1}$  y  $dy = y_{n+1}$  por ser diferencias de valores consecutivos. De la misma forma,  $z_{n+1} - z_n$  sería la diferencial de  $z = xy$ . Por tanto, la igualdad 6.37 es interpretada por Leibniz en la forma  $d(xy) = x dy + y dx$ , lo que lleva a la regla para la diferencial de un producto.

A partir de la regla para la diferencial de un producto, Leibniz obtuvo la regla correspondiente para la diferencial de un cociente  $z = \frac{x}{y}$ . Poniendo  $x = zy$  se tiene que  $dx = y dz + z dy$ , de donde despejando  $dz$ , resulta:

$$dz = \frac{dx - z dy}{y} = \frac{dx - \frac{x}{y} dy}{y} = \frac{y dx - x dy}{y^2}$$

Además, dicha notación tiene una gran potencialidad heurística, como ya hemos visto al estudiar la derivada de una función compuesta.

Consideremos ahora una curva como la de la figura 6.18 con una sucesión de ordenadas trazadas a intervalos de longitud unidad. La suma de las ordenadas es una aproximación de la

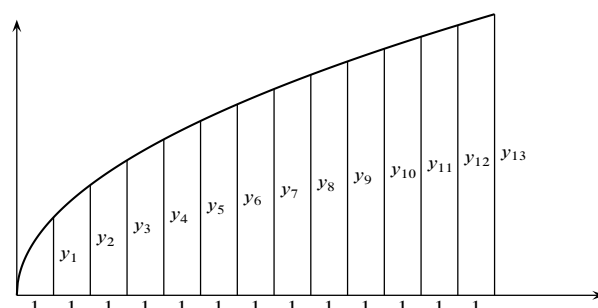


Figura 6.18. Aproximación de una cuadratura

cuadratura de la curva (del área bajo la curva), y la diferencia entre dos ordenadas sucesivas es aproximadamente igual a la pendiente de la correspondiente tangente. Cuanto más pequeña se elija la unidad 1, tanto mejor serán estas aproximaciones. Leibniz razonaba que si la unidad pudiera ser tomada *infinitamente pequeña*, estas aproximaciones se harían exactas, esto es, la cuadratura sería igual a la suma de las ordenadas, y la pendiente de la tangente sería igual a la diferencia de dos ordenadas sucesivas. Como las operaciones de tomar diferencias y sumar son recíprocas entre sí, dedujo Leibniz que el cálculo de cuadraturas y de tangentes también eran operaciones inversas una de otra.

Las investigaciones de Leibniz sobre la integración y el origen de sus notaciones para la integral y los diferenciales, pueden seguirse con todo detalle en una serie de manuscritos del 25 de octubre al 11 de noviembre de 1675. Nos ocuparemos de ello en el capítulo dedicado a la integración. En 1676 Leibniz ya había obtenido prácticamente todos los resultados descubiertos por Newton un poco antes.

La primera publicación sobre cálculo diferencial fue el artículo de Leibniz *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractals nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*, que fue publicado en *Acta Eruditorum* hace ya más de tres siglos, en 1684. En este trabajo, Leibniz definía el diferencial  $dy$  de forma que evitaba el uso de las sospechosas cantidades infinitesimales. Poco después, en 1686, Leibniz publicó un trabajo con sus estudios sobre la integración.

Reconocido hoy día como un genio universal, Leibniz vivió sus últimos años en Hannover en un aislamiento cada vez mayor y murió el 14 de noviembre de 1716. A su entierro solamente asistió su secretario.

### 6.8.6. Desarrollo del cálculo diferencial

Aunque las publicaciones de Leibniz eran breves y difíciles de leer, su cálculo, más sencillo de entender que el de Newton y provisto de una excelente notación, triunfó pronto en el continente europeo logrando grandes éxitos, mientras que en Inglaterra la fidelidad a la teoría de fluxiones y a la notación newtoniana condujo a un cierto aislamiento, agravado por sentimientos nacionales y la disputa sobre la prioridad, y no consiguió éxitos comparables a los del continente.

Los hermanos Jakob y Johann Bernouilli, matemáticos y profesores de la universidad de

Basilea, estudiaron los trabajos de Leibniz con quien iniciaron una productiva correspondencia. A partir de 1690 publicaron una serie de trabajos en el *Acta Eruditorum* y en otras revistas, poniendo de manifiesto que el cálculo de Leibniz era una herramienta poderosa con la que había que contar. Para divulgar dicha herramienta era preciso un buen libro de texto que explicara con detalle los pormenores del nuevo cálculo. Dicho libro apareció bien pronto, en 1696, y su autor fue el matemático y noble francés Guillaume François, marqués de L'Hôpital. El título del libro, del que ya hemos dado noticia en anteriores capítulos, era *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Hoy sabemos que los resultados originales que aparecen en dicho libro son debidos no a L'Hôpital sino a su profesor Johann Bernouilli.

En su libro, L'Hôpital desarrollaba el cálculo diferencial tal como había sido concebido por Leibniz, es decir, usando cantidades infinitesimales para las que se establecían ciertas reglas de cálculo. La definición de diferencial es como sigue: “*La parte infinitamente pequeña en que una cantidad variable es aumentada o disminuida de manera continua, se llama la diferencial de esta cantidad*”. Para trabajar con infinitésimos se establece la siguiente regla: “*Dos cantidades cuya diferencia es otra cantidad infinitamente pequeña pueden intercambiarse una por la otra*”.

Los escritos de los Bernouilli, Leibniz y L'Hôpital popularizaron el cálculo leibniziano y ya en la primera década del siglo XVIII otros matemáticos se interesaron por él. La potencialidad del concepto de derivada se puso de manifiesto en las aplicaciones del cálculo a la física newtoniana.

Para no hacer excesivamente larga esta exposición, voy a resumir muy esquemáticamente los puntos clave en el desarrollo del cálculo diferencial.

- El descubrimiento en 1715 por Brook Taylor de las llamadas series de Taylor, que se convirtieron en una herramienta básica para el desarrollo del cálculo y la resolución de ecuaciones diferenciales.
- El extraordinario trabajo, tanto por su asombrosa amplitud como por sus notables descubrimientos, de Leonhard Euler (1707 - 1783) que, sin duda, es la figura principal de las matemáticas en el siglo XVIII. En sus tres grandes tratados, escritos en latín, *Introductio in analysin infinitorum* (1748), *Institutiones calculi differentiales* (1755) e *Institutiones calculi integralis* (1768), Euler dio al cálculo la forma que conservó hasta el primer tercio del siglo XIX. El cálculo, que inicialmente era un cálculo de variables o, más exactamente, de cantidades geométricas variables, y de ecuaciones, se fue transformando, por influencia de Euler, en un cálculo de funciones.
- La propuesta de Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) de fundamentar el cálculo sobre un álgebra formal de series de potencias. Si bien la idea de Lagrange de evitar el uso de límites no era acertada, su propuesta, concretada en su obra *Théorie des fonctions analytiques* (1797), tuvo el efecto de liberar el concepto de derivada de sus significaciones más tradicionales. De hecho, la terminología “función derivada”, así como la notación  $f'(x)$  para representar la derivada de una función  $f$ , fueron introducidas por Lagrange en dicho texto. A partir de este momento la derivada deja de ser algo de naturaleza imprecisa (fluxión o cociente diferencial) y empieza a ser considerada simplemente como una función.
- Los problemas planteados por las series de Fourier. Dichas series hacen sus primeras apariciones a mitad del siglo XVIII en relación con el problema de la cuerda vibrante,

y nacen oficialmente en el trabajo de Joseph Fourier (1768 - 1830) *Théorie analytique de la chaleur* (1822). Tales series plantean problemas relacionados con las ideas centrales del análisis: el concepto de función, el significado de la integral y los procesos de convergencia.

- El proceso de “algebraización del análisis” que tiene lugar en los dos últimos tercios del siglo XIX y que culmina con la fundamentación del análisis sobre el concepto de límite (Bolzano, Cauchy, Weierstrass) y la teoría de los números reales (Dedekind, Cantor). Lo esencial de este proceso ya ha sido considerado en el capítulo anterior.

Si el tema te interesa, puedes encontrar mucha más información en las referencias citadas al principio.