
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Francisco Javier Pérez González

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Licencia. Este texto se distribuye bajo una licencia *Creative Commons* en virtud de la cual se permite:

- Copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra.
- Hacer obras derivadas.

Bajo las condiciones siguientes:

- Ⓒ **Reconocimiento.** Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciador (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o apoyan el uso que hace de su obra).
- Ⓓ **No comercial.** No puede utilizar esta obra para fines comerciales.
- Ⓔ **Compartir bajo la misma licencia.** Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

Índice general

Prólogo	XVI
Guías de lectura	XX
1. Axiomas de \mathbb{R}. Principio de inducción	1
1.1. Introducción	1
1.1.1. Axiomas, definiciones, teoremas, lemas, corolarios.	1
1.2. Axiomas de los números reales	4
1.2.1. Axiomas algebraicos	4
1.2.2. Axiomas de orden	5
1.2.2.1. Relación de orden	5
1.2.3. Desigualdades y valor absoluto	6
1.2.3.1. La forma correcta de leer las matemáticas	7
1.2.3.2. Una función aparentemente caprichosa	8
1.2.4. Ejercicios propuestos	10
1.2.5. Ejercicios resueltos	12
1.3. Principio de inducción matemática	17
1.3.1. Ejercicios propuestos	21
1.3.2. Ejercicios resueltos	24
1.4. Complementos	26
1.4.1. Números y medida de magnitudes. Segmentos inconmensurables.	26

1.4.1.1.	La razón áurea y el pentagrama	27
1.4.1.2.	Medimos con números racionales	28
1.4.2.	Hacer matemáticas	29
1.4.3.	Algunas razones para estudiar matemáticas	30
1.4.4.	Lo que debes haber aprendido en este Capítulo. Lecturas adicionales	32
2.	Funciones elementales	33
2.1.	Funciones reales	33
2.1.1.	Operaciones con funciones	35
2.1.2.	Intervalos	36
2.2.	Estudio descriptivo de las funciones elementales	39
2.2.1.	Funciones polinómicas y funciones racionales	39
2.2.2.	Raíces de un número real	39
2.2.3.	Potencias racionales	40
2.2.4.	Logaritmos	40
2.2.5.	Exponenciales	41
2.2.5.1.	Interés compuesto	41
2.2.5.2.	Crecimiento demográfico	42
2.2.6.	Función potencia de exponente real a	42
2.2.7.	Funciones trigonométricas	43
2.2.7.1.	Medida de ángulos	43
2.2.7.2.	Funciones seno y coseno	44
2.2.7.3.	Propiedades de las funciones seno y coseno	45
2.2.7.4.	Las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante	46
2.2.7.5.	Las funciones arcoseno, arcocoseno y arcotangente	46
2.2.8.	Las funciones hiperbólicas	48
2.2.8.1.	Las funciones hiperbólicas inversas	49
2.2.9.	Ejercicios propuestos	51
2.2.10.	Ejercicios resueltos	54
2.3.	Sobre el concepto de función	59
2.3.1.	El desarrollo del Álgebra y la invención de los logaritmos	61
2.4.	Lo que debes haber aprendido en este capítulo	63
3.	Números complejos. Exponencial compleja	64

3.1. Un poco de historia	64
3.2. Operaciones básicas con números complejos	65
3.2.1. Comentarios a la definición de número complejo	66
3.2.2. Forma cartesiana de un número complejo	66
3.2.3. Comentarios a la definición usual $i = \sqrt{-1}$	67
3.2.4. No hay un orden en \mathbb{C} compatible con la estructura algebraica	68
3.3. Representación gráfica. Complejo conjugado y módulo	68
3.3.1. Forma polar y argumentos de un número complejo	70
3.3.2. Observaciones a la definición de argumento principal	72
3.3.2.1. Fórmula de De Moivre	73
3.3.3. Raíces de un número complejo	74
3.3.3.1. Notación de las raíces complejas	75
3.3.3.2. La igualdad $\sqrt[n]{z} \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$	76
3.3.4. Ejercicios propuestos	77
3.3.5. Ejercicios resueltos	80
3.4. Funciones elementales complejas	91
3.4.1. La función exponencial	91
3.4.2. Logaritmos complejos	92
3.4.3. Potencias complejas	94
3.4.4. Ejercicios propuestos	94
3.4.5. Ejercicios resueltos	95
3.5. Aplicaciones de los números complejos	97
3.5.1. Movimiento armónico simple	97
3.5.2. Circuitos eléctricos	99
3.5.3. Procesamiento digital de señales	101
4. Funciones Continuas y límite funcional	102
4.1. Introducción	102
4.2. Continuidad	103
4.2.1. Propiedades básicas de las funciones continuas	104
4.2.2. Propiedades locales	106
4.3. Teorema de Bolzano. Supremo e ínfimo	108
4.3.1. La propiedad del supremo	109
4.3.2. Propiedad de extremo inferior	110

4.3.3.	Consecuencias del teorema de Bolzano	112
4.3.3.1.	Continuidad y monotonía	114
4.3.4.	Ejercicios propuestos	116
4.3.5.	Ejercicios resueltos	119
4.4.	Continuidad en intervalos cerrados y acotados	128
4.4.1.	Ejercicios propuestos	132
4.4.2.	Ejercicios resueltos	133
4.5.	Límite funcional	133
4.5.1.	Límites laterales de una función en un punto	134
4.5.2.	Límites infinitos	135
4.5.2.1.	Funciones divergentes en un punto	135
4.5.2.2.	Límites en infinito	136
4.5.2.3.	Funciones divergentes en infinito	136
4.6.	Álgebra de límites	137
4.6.1.	Límites y discontinuidades de funciones monótonas	139
4.6.2.	Comportamientos asintóticos de las funciones elementales	140
4.6.2.1.	Límites de exponenciales y logaritmos	140
4.7.	Indeterminaciones en el cálculo de límites	141
4.7.1.	Ejercicios propuestos	142
4.7.2.	Ejercicios resueltos	144
5.	Números y límites. El infinito matemático	150
5.1.	Introducción	150
5.2.	Evolución del concepto de número	151
5.2.1.	Números y cantidades en la antigua Grecia	151
5.2.2.	De la antigua Grecia a la invención del Cálculo	153
5.2.3.	Infinitésimos y el continuo numérico	157
5.2.4.	El triunfo de Pitágoras	160
5.2.4.1.	Cortaduras de Dedekind	162
5.2.4.2.	Métodos axiomáticos y métodos constructivos	164
5.2.4.3.	El regreso de los pequeñitos	165
5.2.5.	Ejercicios propuestos	165
5.3.	Evolución del concepto de límite funcional	165
5.3.1.	La teoría de las “razones últimas” de Newton	166

5.3.2.	La <i>metafísica del Cálculo</i> en D'Alembert y Lagrange	167
5.3.3.	El premio de la Academia de Berlín de 1784	169
5.3.4.	Cauchy y su <i>Cours D'Analyse</i> de 1821	171
5.3.5.	El innovador trabajo de Bolzano	175
5.3.6.	Weierstrass nos dio los $\varepsilon - \delta$	176
5.3.7.	Ejercicios propuestos	178
5.4.	Breve historia del infinito	178
5.4.1.	La idea de infinito en la filosofía y la matemática Griegas	178
5.4.1.1.	Las aporías de Zenón de Elea	178
5.4.1.2.	Atomismo y divisibilidad infinita	180
5.4.1.3.	La rueda de Aristóteles	183
5.4.2.	El infinito desde la Edad Media hasta el siglo XIX	184
5.4.2.1.	El infinito en la Escolástica	184
5.4.2.2.	Galileo y el infinito	184
5.4.2.3.	El Cálculo y el infinito	187
5.4.3.	El infinito matemático y el nacimiento de la teoría de conjuntos	188
5.4.3.1.	La no numerabilidad del continuo	193
5.4.4.	Ejercicios propuestos	199
6.	Derivadas	201
6.1.	Introducción	201
6.2.	Concepto de derivada. Interpretación física y geométrica	202
6.2.1.	Tangente a una curva	202
6.2.2.	Razón de cambio puntual y velocidad instantánea	202
6.2.2.1.	Elementos de una curva relacionados con la derivada	205
6.2.3.	Derivadas laterales	206
6.2.4.	Propiedades de las funciones derivables. Reglas de derivación	206
6.2.5.	Ejercicios propuestos	210
6.2.6.	Ejercicios resueltos	213
6.2.7.	Derivabilidad de las funciones elementales	219
6.2.7.1.	Derivabilidad de la exponencial y del logaritmo. Criterio de equivalencia logarítmica	219
6.2.7.2.	Derivabilidad de las funciones trigonométricas	221
6.2.7.3.	Derivabilidad de las funciones hiperbólicas	221

6.3.	Teoremas de Rolle y del valor medio	222
6.3.1.	Consecuencias del teorema del valor medio	225
6.3.2.	Reglas de L'Hôpital	229
6.4.	Derivadas sucesivas. Polinomios de Taylor	232
6.4.1.	Notación de Landau	234
6.4.2.	Polinomios de Taylor de las funciones elementales	235
6.5.	Técnicas para calcular límites de funciones	237
6.5.1.	Límites que debes saberte de memoria	238
6.5.2.	Sobre el mal uso de las reglas de L'Hôpital	241
6.5.3.	Sobre el uso de la notación $\lim_{x \rightarrow a}$	242
6.6.	Extremos relativos. Teorema de Taylor	243
6.7.	Funciones convexas y funciones cóncavas	246
6.7.1.	Ejercicios propuestos	248
6.7.2.	Ejercicios resueltos	261
6.8.	Orígenes y desarrollo del concepto de derivada	305
6.8.1.	Las matemáticas en Europa en el siglo XVII	306
6.8.2.	Cálculo de tangentes y de valores extremos	307
6.8.2.1.	El método de máximos y mínimos de Fermat	307
6.8.2.2.	El método de las tangentes de Fermat	308
6.8.2.3.	El método de Roberval y de Torricelli para las tangentes	311
6.8.2.4.	El triángulo diferencial de Barrow	312
6.8.3.	Los inventores del Cálculo	314
6.8.4.	Newton y el cálculo de fluxiones	314
6.8.5.	Leibniz y el cálculo de diferencias	319
6.8.6.	Desarrollo del cálculo diferencial	322
7.	Sucesiones	325
7.1.	Introducción	325
7.2.	Sucesiones de números reales	327
7.2.1.	Sucesiones convergentes	327
7.2.2.	Sucesiones convergentes y estructura de orden de \mathbb{R}	330
7.2.3.	Sucesiones monótonas	331
7.2.3.1.	El número e	333
7.2.4.	Sucesiones convergentes y estructura algebraica de \mathbb{R}	334

7.2.5.	Sucesiones parciales. Teorema de Bolzano–Weierstrass	335
7.2.6.	Condición de Cauchy. Teorema de completitud de \mathbb{R}	338
7.2.7.	Límites superior e inferior de una sucesión	339
7.2.8.	Ejercicios propuestos	340
7.2.9.	Ejercicios resueltos	345
7.3.	Sucesiones divergentes. Indeterminaciones en el cálculo de límites	360
7.3.1.	Sucesiones y límite funcional	363
7.3.2.	Sucesiones asintóticamente equivalentes	365
7.3.3.	Sucesiones de potencias	366
7.3.4.	Ejercicios propuestos	367
7.3.5.	Ejercicios resueltos	370
7.4.	Sucesiones de números complejos	379
7.4.1.	Definición de la exponencial compleja	380
7.4.2.	Ejercicios propuestos	381
7.4.3.	Ejercicios resueltos	381
7.5.	Demostraciones alternativas de los teoremas de Bolzano y de Weierstrass	382
7.6.	Continuidad uniforme	384
8.	Integral de Riemann	386
8.1.	Introducción	386
8.2.	Aproximaciones al área	388
8.2.1.	Definición y propiedades básicas de la integral	391
8.2.2.	El Teorema Fundamental del Cálculo	397
8.2.3.	Primitivas. Regla de Barrow	398
8.2.4.	Las funciones logaritmo y exponencial	400
8.3.	Integrales impropias de Riemann	402
8.3.1.	Criterios de convergencia para integrales	404
8.4.	Teoremas del valor medio para integrales	406
8.5.	Derivadas e integrales de funciones complejas de variable real	409
8.5.1.	Ejercicios propuestos	410
8.5.2.	Ejercicios resueltos	414
8.6.	Técnicas de cálculo de Primitivas	427
8.6.1.	Calcular una primitiva...¿Para qué?	427
8.6.2.	Observaciones sobre la notación y terminología usuales	428

8.6.3.	Primitivas inmediatas	428
8.6.4.	Integración por partes	430
8.6.4.1.	Integración por recurrencia	431
8.6.5.	Ejercicios propuestos	435
8.6.6.	Integración por sustitución o cambio de variable	436
8.6.7.	Ejercicios propuestos	437
8.6.8.	Integración de funciones racionales	438
8.6.8.1.	Método de los coeficientes indeterminados	438
8.6.8.2.	Método de Hermite	439
8.6.9.	Ejercicios propuestos	442
8.6.10.	Integración por racionalización	442
8.6.10.1.	Integración de funciones del tipo $R(\sin x, \cos x)$	443
8.6.10.2.	Integrales del tipo $\int R(x, [L(x)]^r, [L(x)]^s, \dots) dx$	445
8.6.10.3.	Integrales binomias	446
8.6.10.4.	Integrales del tipo $\int R(e^x) dx$	446
8.6.10.5.	Integración de funciones del tipo $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$	447
8.6.11.	Ejercicios propuestos	450
8.6.12.	Ejercicios resueltos	451
8.7.	Aplicaciones de la integral	463
8.7.1.	Cálculo de áreas planas	463
8.7.1.1.	Regiones de tipo I	464
8.7.1.2.	Regiones de tipo II	465
8.7.2.	Ejercicios propuestos	467
8.7.3.	Ejercicios resueltos	469
8.7.4.	Curvas en el plano	474
8.7.4.1.	Área encerrada por una curva	476
8.7.4.2.	Áreas planas en coordenadas polares	476
8.7.5.	Ejercicios propuestos	478
8.7.6.	Longitud de un arco de curva	478
8.7.7.	Ejercicios propuestos	479
8.7.8.	Volúmenes de sólidos	480
8.7.8.1.	Volumen de un cuerpo de revolución	481
8.7.9.	Ejercicios propuestos	483

8.7.10. Ejercicios propuestos	484
8.7.11. Área de una superficie de revolución	485
8.7.12. Ejercicios propuestos	486
8.7.13. Ejercicios resueltos	487
8.8. Evolución de la idea de integral	499
8.8.1. Problemas de cuadraturas en las matemáticas griegas	499
8.8.1.1. Cuadratura de un segmento de parábola por Arquímedes	500
8.8.1.2. <i>El Método</i> de Arquímedes	503
8.8.1.3. Área de una espiral	504
8.8.2. La integración antes del Cálculo	506
8.8.2.1. Los indivisibles de Cavalieri	506
8.8.2.2. Cuadratura de la cicloide por Roberval	507
8.8.2.3. Parábolas e hipérbolas de Fermat	508
8.8.2.4. La integración aritmética de Wallis	509
8.8.2.5. El resultado fundamental de Barrow	512
8.8.3. La relación fundamental entre cuadraturas y tangentes	513
8.8.3.1. El Teorema Fundamental del Cálculo según Newton	513
8.8.3.2. La invención del <i>calculus summatorius</i> por Leibniz	514
9. Series numéricas	518
9.1. Conceptos básicos	518
9.1.1. La particularidad del estudio de las series	522
9.1.2. Propiedades básicas de las series convergentes	525
9.1.3. Propiedades asociativas y conmutativas	526
9.1.4. Ejercicios propuestos	531
9.1.5. Ejercicios resueltos	531
9.2. Criterios de convergencia para series de términos positivos	533
9.2.1. Ejercicios propuestos	542
9.2.2. Ejercicios resueltos	544
9.3. Criterios de convergencia no absoluta	556
9.3.1. Ejercicios propuestos	560
9.3.2. Ejercicios resueltos	560
9.4. Algunas series cuya suma puede calcularse de forma exacta	563
9.4.1. Ejercicios propuestos	567

9.4.2. Ejercicios resueltos	567
9.5. Expresión de un número real en base b	570
9.6. Series de números complejos	575
9.6.1. Ejercicios propuestos	576
9.6.2. Ejercicios resueltos	576
9.7. Cálculo elemental de $\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx$ y de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$	578
10. Sucesiones y series de funciones	581
10.1. Introducción	581
10.2. Conceptos básicos	583
10.2.1. Convergencia puntual	584
10.2.2. Convergencia Uniforme	586
10.2.3. Series de funciones	590
10.3. Series de potencias	598
10.3.1. Radio de convergencia de una serie de potencias	599
10.3.1.1. Cálculo del radio de convergencia	600
10.4. Desarrollos en serie de potencias de las funciones elementales	604
10.4.1. Las funciones trascendentes elementales definidas por series	611
10.4.1.1. La función exponencial	611
10.4.1.2. Las funciones trigonométricas	612
10.5. Teorema de aproximación de Weierstrass	614
10.5.1. Ejercicios propuestos	617
10.5.2. Ejercicios resueltos	627
10.6. Los primeros desarrollos en serie	659
10.6.1. Newton y las series infinitas	660

Índice de figuras

1.1. El pentagrama pitagórico	27
2.1. La función $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$	38
2.2. Función logaritmo de base $a > 1$	40
2.3. Función exponencial de base $a > 1$	41
2.4. La circunferencia unidad	44
2.5. La función seno	45
2.6. La función seno en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	46
2.7. La función arcoseno	46
2.8. La función coseno en $[0, \pi]$	47
2.9. La función arcocoseno	47
2.10. La función tangente en $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	48
2.11. La función arcotangente	48
2.12. La función seno hiperbólico	49
2.13. La función coseno hiperbólico	49
2.14. La función tangente hiperbólica	49
2.15. La función argumento seno hiperbólico	50
2.16. La función argumento coseno hiperbólico	50
2.17. La función argumento tangente hiperbólica	50
2.18. Dirichlet	59
2.19. Euler	59

2.20. John Napier	62
3.1. Representación de un número complejo	68
3.2. Suma de números complejos	69
3.3. Forma polar de un número complejo	71
3.4. Argumento principal	72
3.5. Raíces novenas de la unidad	75
3.6. Igualdad del paralelogramo	85
3.7. Área de un triángulo	91
3.8. Movimiento circular	97
3.9. Composición de movimientos armónicos	98
3.10. Circuito RLC	99
4.1. Función parte entera	107
4.2. La función $x E(1/x)$	121
4.3. Visualización de la demostración del teorema de Weierstrass	130
4.4. La función $f(x) = \text{sen}(1/x)$	147
5.1. Euclides	152
5.2. al-Jwarizmi	153
5.3. Fibonacci	153
5.4. Tartaglia	154
5.5. Viéte	155
5.6. Fermat	155
5.7. Descartes	155
5.8. Dedekind	162
5.9. D'Alembert	167
5.10. Cauchy	171
5.11. Bolzano	175
5.12. Weierstrass	176
5.13. Rueda de Aristóteles	183
5.14. Exágonos de Galileo	185
5.15. Paradoja circunferencia-punto	186
5.16. Cantor	190
5.17. Contando $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	196

5.18. Unión numerable	197
6.1. Secante	202
6.2. Elementos de una curva relacionados con la derivada	205
6.3. Depósito cónico	214
6.4. Cruce de barcos	215
6.5. Extremos relativos	222
6.6. Teorema de Rolle	223
6.7. Teorema del valor medio	225
6.8. Regla de L'Hôpital	230
6.9. Función cóncava	246
6.10. Función convexa	246
6.11. Cálculo de la subtangente	309
6.12. Cálculo de la tangente	311
6.13. Tangente a la cicloide	312
6.14. Triángulo diferencial	313
6.15. Newton	314
6.16. Leibniz	319
6.17. Triángulo característico	321
6.18. Aproximación de una cuadratura	322
7.1. Puntos de sol y de sombra	336
8.1. Conjunto ordenado $G(f, a, b)$ de una función	388
8.2. Partes positiva y negativa de una función	389
8.3. Aproximación por sumas de Riemann	390
8.4. Aproximación del área por sumas inferiores y superiores	391
8.5. Función monótona con infinitas discontinuidades	396
8.6. Logaritmo de 2	400
8.7. Aproximación al área de una región de tipo I	464
8.8. Ejemplo de región de tipo I	465
8.9. Aproximación al área de una región de tipo II	466
8.10. Ejemplo de región de tipo II	467
8.11. Simétrica de la figura 8.8	467
8.12. Cicloide	475

8.13. Cardioide	475
8.14. Astroide	475
8.15. Espiral de Arquímedes	475
8.16. Una curva de Lissajoux	476
8.17. Una curva cerrada	476
8.18. Aproximación por sectores circulares	477
8.19. Rosa de 8 pétalos	478
8.20. Aproximación por poligonales	479
8.21. Cálculo del volumen por secciones	480
8.22. Método de los discos	482
8.23. Método de las láminas o tubos	484
8.24. Superficie de revolución	485
8.25. Área de una región limitada por dos elipses	489
8.26. Cuadratura de un rectángulo	499
8.27. Cuadratura de un segmento de parábola	501
8.28. El <i>Método</i> de Arquímedes	503
8.29. Cuadratura de una espiral	505
8.30. Cuadratura de la cicloide	507
8.31. Cuadratura de la hipérbola de Fermat $y = x^{-2}$	508
8.32. Comparando indivisibles	510
8.33. Teorema Fundamental	512
8.34. $z = z(x) = \text{área } OPB$	513
8.35. Áreas complementarias	515
10.1. ¿Es $\sqrt{2} = 1$?	583
10.2. Convergencia puntual	584
10.3. Interpretación gráfica de la convergencia uniforme	587
10.4. Cuadratura $\int_0^{1/4} \sqrt{x - x^2} dx$	663

Prólogo

Este libro está escrito pensando en un estudiante real que también es, en algunos aspectos, un estudiante ideal. Es un estudiante llegado hace poco a la Universidad, quizá recién llegado, que cursa estudios en alguna ingeniería o licenciatura científico – técnica y debe enfrentarse a una difícil asignatura de cálculo diferencial e integral. Debe ser difícil, porque son muy pocos quienes logran aprobarla en un sólo año y es muy alto el porcentaje de abandono. Con este libro quiero ayudarle en sus estudios de Cálculo o Análisis Matemático, no solamente para que logre una buena calificación sino para que saque de ellos el mayor provecho e incluso aprenda a disfrutarlos.

Se trata, digo, de un estudiante real porque llega a la Universidad con importantes carencias de las que él puede no ser consciente y de las que no es del todo responsable. Es muy posible que nunca haya visto una demostración matemática, que no sepa distinguir entre hipótesis y tesis, que no entienda el significado de que las matemáticas son una ciencia deductiva. Tiene poca agilidad en los cálculos con las operaciones básicas y comete frecuentes errores al intentar simplificarlos, puede calcular derivadas pero lo hace con dificultad porque tiene que ir pensando cada paso y no ha automatizado el proceso, por eso solamente sabe calcular algunas primitivas muy sencillas. Está acostumbrado a realizar ejercicios muy elementales en los que se debe aplicar de forma mecánica una regla recién aprendida. No está acostumbrado a relacionar conceptos y clasifica sus conocimientos en áreas disjuntas: cálculo, álgebra, probabilidad. . .

Pero estas carencias, con ser graves, no son las peores porque son específicas de una materia y podrían solucionarse con facilidad si no vinieran acompañadas por otras mucho más perjudiciales porque afectan a todo el proceso de aprendizaje. Me refiero a la falta de hábitos de estudio, a la pobreza y muy deficiente uso del lenguaje hablado y escrito con la consiguiente dificultad para pensar y expresarse correctamente, a la poca práctica de la lectura comprensiva, a la escasa capacidad de concentración, al poco valor que se da a la memorización de lo estudiado.

Si a este cuadro añadimos que vivimos en una sociedad que valora más el éxito, identificado casi exclusivamente con el éxito económico, que el esfuerzo; el apresuramiento compulsivo, hay que ir a toda velocidad aunque se sepamos a dónde, que la constancia y la dedicación; el

gregarismo unánime que el pensamiento crítico e independiente, la autocomplacencia que la exigencia . . . La conclusión es que no son buenos tiempos para el estudio. Además, los jóvenes están permanente solicitados por todo tipo de reclamos publicitarios, adulados hasta la desvergüenza por políticos y pedagogos que les venden un mensaje falso que en su esencia viene a decir que no son responsables de sus actos: si suspenden, les dicen que es porque el profesor no ha sabido motivarlos para que estudien; si después de un botellón de fin de semana, o de una fiesta de la primavera o de un día de la cruz, las calles amanecen convertidas en un albañal por la suciedad acumulada durante la noche, el argumento apropiado para disculpar tan incívico comportamiento es el de un supuesto derecho a la diversión. Estos políticos y pedagogos parecen haberse puesto de acuerdo para propiciar que los jóvenes vivan en una permanente niñez, acreedora de todos los derechos pero sin obligaciones ni responsabilidades. Y, para acabar, la bazofia, mezquindad, zafiedad y mal gusto de algunos programas de televisión contribuyen de forma notable a difundir el mensaje de que todo vale: puedes vender tus entrañas en uno de esos programas o demostrar tu absoluta ignorancia sin temor a hacer el ridículo porque así lo hacen la mayoría de quienes participan en ellos. ¡Qué añoranza de aquellos programas en los que el saber ocupaba lugar!

El estudiante al que me dirijo es real porque es víctima de este sistema y también, puede que sin tener clara conciencia de ello, porque contribuye a su mantenimiento. Cada vez es más difícil conjugar juventud y lucidez. Pero también es un estudiante ideal porque valora el estudio, quiere prepararse para ejercer eficazmente una profesión y ser útil a los demás y tiene ganas de aprender. Lector, si este no es tu caso, si lo que quieres es solamente aprobar y no tienes curiosidad ni estás interesado en aprender, mejor que no sigas leyendo, este libro no es lo que buscas. Pero si no es así, confío en que las páginas que siguen sean útiles para que avances adecuadamente en tus estudios de cálculo, porque lo único que se necesita para ello es, además del interés y las ganas de aprender, una capacidad básica lógico – deductiva que sin duda tienes.

El contenido de este libro no ofrece sorpresa alguna y responde a un acuerdo general tácito de lo que debe constituir un curso básico de Cálculo de funciones de una variable. La novedad, si la hay, habrá que buscarla en el estilo, en la exposición, en la gran cantidad de ejemplos y de ejercicios, en la minuciosa presentación de los conceptos y de sus relaciones. Comentaré seguidamente algunos de estos aspectos.

Este libro está escrito en un estilo deliberadamente sencillo, he querido huir del estilo pedante que se impuso hace algunos años y que todavía perdura en casos aislados. Escribir matemáticas es un arte que se va aprendiendo poco a poco y, aunque no es ajeno a las modas, tiene unas reglas básicas que deben ser respetadas en cualquier circunstancia. Realmente se trata de una sola regla debida a Nicolás Boileau (1636 - 1711) que dice así “*lo que bien se concibe bien se expresa con palabras que acuden con presteza*”. Que las palabras acudan con mayor o menor presteza es algo anecdótico, pero lo que es indudable es que si algo no se concibe bien es imposible expresarlo con claridad. La primera condición necesaria para escribir matemáticas es entender con todo detalle, a ser posible desde varios puntos de vista diferentes y con distinto grado de generalidad, la génesis y evolución de los conceptos que se exponen, las sutilezas y dificultades de comprensión que encierran, los errores más frecuentes en su interpretación. Esa condición necesaria no es suficiente. Hay que exponer esos conceptos con palabras comprensibles para el lector a quien se dirigen, evitando tecnicismos innecesarios, y ello sin dejar de ser claro y preciso.

Este libro está escrito un poco igual que se explica en clase delante de la pizarra, me he puesto en el lugar de un hipotético estudiante medio algo despistado y me hago eco de sus presumibles dudas, preguntas y confusiones, e intento explicar esas dudas, responder a las preguntas y aclarar las confusiones. Confío en que los muchos años que he dedicado a la docencia en el primer curso de distintas licenciaturas e ingenierías me hayan permitido saber ponerme en tu lugar y cumplir este empeño con decoro. Por todo eso creo que este libro te permitirá estudiar por ti mismo y te ayudará a comprender de forma correcta los conceptos principales del Cálculo.

Este libro incluye una colección de ejercicios muchísimo más amplia que lo que suele ser usual en un libro de texto. De hecho este libro es también un libro de problemas de Cálculo y, se me disculpará la inmodestia, creo que hay muy pocos libros de ejercicios de Cálculo que incluyan una colección tan variada de ejercicios y, sobre todo, que propongan tantos ejercicios no triviales y desarrollen las soluciones con detalle. Los libros de ejercicios de Cálculo dan muchas veces la impresión de que la teoría solamente sirve para proporcionar un conjunto de recetas que después hay que aplicar, sin acabar nunca de entender bien por qué se elige una receta y no otra y sin entender el fundamento que hace que la receta funcione.

Mi intención ha sido escribir un libro de Cálculo que sea útil tanto para el futuro matemático como para el futuro ingeniero, pero cada uno debe leer el libro de la forma adecuada a sus intereses y necesidades. Para ambos será de gran utilidad la extensa colección de ejercicios y de ejemplos, pero uno habrá de prestar mayor atención a los fundamentos teóricos y a las demostraciones y otro a las técnicas de cálculo y de resolución de diversos tipos de ejercicios. Al final de este prólogo propongo dos posibles guías de lectura.

Digamos algo sobre las demostraciones. Claro está que razonar y demostrar son aspectos fundamentales de las matemáticas, pero sé que el valor que las demostraciones tienen para los estudiantes es muy relativo. El empeño en demostrarlo todo puede ser contraproducente y constituir un freno en el progreso de muchos estudiantes. Las demostraciones interesantes son las que contienen ideas que se repiten en otras situaciones semejantes, no deben ser extensas, deben ser elegantes y demostrar resultados importantes que se van a usar con frecuencia. Cuando empecé este libro mi intención era incluir muy pocas demostraciones, al final, para lograr la autonomía del texto he incluido muchas más de lo que inicialmente pensaba. Mi deseo era equilibrar un desarrollo intuitivo con uno lógico deductivo, confío en no haberme desviado mucho de este objetivo. Toda ayuda a la intuición me parece loable, en este sentido, siempre que lo he creído conveniente, no he dudado en incluir una figura para facilitar la comprensión de una definición o de una demostración. Pero también quiero decir respecto de algunas demostraciones que pueden parecer muy complicadas (como los teoremas 4.13 y 4.29 de los que también doy versiones más sencillas 7.54 y 7.55), que las cosas complicadas son complicadas, que no se debe renunciar al razonamiento correcto por el hecho de que sea complicado, los detalles son importantes, en matemáticas no todo vale.

He concedido toda la importancia que merece al desarrollo y evolución histórica de los principales conceptos del Cálculo. He incluido apuntes históricos, mucho más amplios de lo usual en textos de estas características, sobre la evolución de los conceptos de número y magnitud, límite y función, derivadas e integrales, así como al concepto de infinito y a la algebraización del Análisis llevada a cabo en el último tercio del siglo XIX. Incluso hay un capítulo, el quinto, cuyo título ‘*Números y límites. El infinito matemático*’ deja bien claro cuál es su contenido. Naturalmente, nada de original hay en dichas notas históricas pues no he consultado fuentes

originales, y su posible valor está en la particular ordenación y exposición que he llevado a cabo. Mi propósito al escribirlas ha sido presentar la génesis de los conceptos matemáticos en su contexto, su titubeante y confusa evolución, las discrepancias sobre el significado de los mismos... En una palabra, proporcionar al estudiante una visión de la matemática viva.

Con frecuencia los estudiantes tienen la idea de que las matemáticas son algo cerrado y acabado, un conjunto de verdades eternas e inmutables de una fría perfección que se transmiten dogmáticamente de generación en generación y donde no hay lugar para la sorpresa ni la pasión. Nada más lejos de la realidad. La historia de las matemáticas demuestra que el quehacer matemático, la creación matemática, está muy lejos de esa fría perfección formal lógico – deductiva, que la intuición, la inducción, los procedimientos heurísticos son quizá más importantes para el avance de las matemáticas que el razonamiento deductivo. La historia de las matemáticas muestra cómo los conceptos nacen para responder a problemas concretos de cada época, cómo esos mismos conceptos llevan a reformular posteriormente los problemas desde perspectivas más generales, en un avance que no siempre es una línea recta, con intentos fallidos, con controversias y desacuerdos.

La historia pone también muy claramente de manifiesto que las matemáticas son un saber acumulativo. Esto tiene una particular importancia para el aprendizaje, quiere decir que para estudiar y avanzar en matemáticas la memoria es mucho más importante de lo que usualmente se cree. La efímera memoria de los estudiantes que llegan a la Universidad, que con frecuencia han olvidado lo que alguna vez aprendieron de matemáticas, es una de las grandes dificultades que debemos afrontar los profesores.

Un aspecto notable del libro es la atención que dedico a los persistentes errores en matemáticas que suelen tener casi todos los estudiantes al llegar a la Universidad. Confío en que mis observaciones al respecto sean útiles no sólo para los estudiantes sino también para los profesores de matemáticas de las Enseñanzas Medias. También expongo algunas opiniones muy críticas con la forma en que tradicionalmente se explican algunos temas en la Universidad, esto afecta muy especialmente al estudio de los números complejos y de las funciones elementales complejas y de las series, para los que hago propuestas que creo que deben ser tenidas muy en cuenta.

Granada, septiembre de 2008

Guías de lectura

El Capítulo 5 y los diversos complementos de contenido histórico solamente debes leerlos si te gustan. La única forma de saber si te gustan es que empieces a leerlos, y si cuando laves dos páginas sigues interesado en la lectura seguramente llegarás hasta el final.

Los capítulos 1 y 2 deben ser leídos con detenimiento. No hay en ellos demostraciones que merezcan ese nombre. En el Capítulo 1 se dan definiciones básicas cuyo conocimiento es imprescindible para leer todo lo demás. En el Capítulo 2 se define el importantísimo concepto de función y se estudian, desde un punto de vista descriptivo, las funciones elementales. El conocimiento de dichas funciones es absolutamente necesario para leer el resto del libro y realizar ejercicios.

Para estudiantes orientados hacia ingenierías cuyo interés por las matemáticas es de tipo instrumental

El Capítulo 3 está dedicado a los números complejos y a las funciones complejas elementales. Solamente tú puedes saber si necesitas estudiarlo. Si decides omitirlo puedes hacerlo con tranquilidad.

El Capítulo 4 está dedicado a dos importantes conceptos: el de continuidad y el de límite funcional. Son conceptos de importancia teórica y necesarios para hacer ejercicios. Debes estudiar y entender las definiciones y resultados pero no es necesario que leas las demostraciones. El concepto de extremo superior tiene interés desde un punto de vista formativo, para que comprendas que se precisa alguna herramienta que permita probar ciertas afirmaciones de apariencia evidente (o no tan evidente). Muchos libros de Cálculo orientados hacia la ingeniería omiten este concepto. No es un concepto imprescindible para un futuro ingeniero, pero es bueno que sepas de su existencia y tengas una idea de su utilidad y lo que significa.

El Capítulo 6 estudia las derivadas y sus aplicaciones. Creo que debes leerlo todo incluidas las demostraciones de los resultados principales porque son cortas y fáciles de entender, con la excepción, quizás, de las demostraciones de las Reglas de L'Hôpital, no porque sean difíciles sino porque son algo largas. Pero debes leer la explicación de por qué dichas reglas funcionan. Son muy útiles y mi impresión es que se usan como un recurso casi mágico, sin entender bien lo que se está haciendo. La sección en la que se explican técnicas para calcular límites de funciones debes leerla hasta que memorices los límites básicos que allí se indican y entiendas bien los procedimientos que se exponen.

El Capítulo 7 está dedicado al estudio de las sucesiones. Debes aprender y comprender bien las definiciones y lo que dicen los principales teoremas pero, salvo la demostración de que toda sucesión monótona acotada es convergente, no es necesario que leas ninguna otra demostración. Los resultados relativos a la condición de Cauchy son una herramienta teórica fundamental, pero quizás un ingeniero puede prescindir de ellos. La sección en la que se explican técnicas para calcular límites de sucesiones y para resolver las indeterminaciones más usuales, debes leerla hasta que memorices los límites básicos que allí se indican y entiendas bien los procedimientos que se exponen. Las sucesiones que definen al número e y las desigualdades asociadas con dichas sucesiones son muy útiles, debes memorizarlas y aprender a reconocerlas allí donde aparezcan. La continuidad uniforme es algo de lo que puedes prescindir

con tranquilidad.

El Capítulo 8 es muy extenso, en él se estudia la integral de Riemann que es la integral usual del Cálculo, las integrales impropias, el cálculo de primitivas y las aplicaciones del cálculo integral. Con la excepción de las demostraciones del Teorema Fundamental del Cálculo y de la Regla de Barrow, no es necesario que leas otras demostraciones. Procura entender bien la definición de integral y sus propiedades así como el significado del Teorema Fundamental del Cálculo. Todo el tiempo que dediques, y tendrás que dedicar muchas horas, a practicar las técnicas de cálculo de primitivas será ampliamente recompensado. Calcular primitivas es algo que hay que hacer con muchísima frecuencia: en todas las aplicaciones de la integral tienes que calcular una primitiva.

El Capítulo 9 está dedicado al estudio de las series numéricas. Es importante que aprendas y comprendas bien las definiciones principales. Hay muchísima confusión en este tema y los libros que conozco sirven de poca ayuda. Las demostraciones de este capítulo puedes omitirlas salvo las de los criterios de convergencia para series de términos positivos que son cortas y fáciles de entender. Las técnicas para sumar algunos tipos de serie debes estudiarlas, así como el criterio de Leibniz para las series alternadas. El apartado dedicado a la expresión de un número real en una base $b \in \mathbb{Z}$ merece que lo leas, aunque solamente sea un poco por encima, para saber lo que dice y para aclararte de una vez con eso de los decimales infinitos con infinitas cifras que no se repiten.

El Capítulo 10 estudia la convergencia puntual y uniforme de sucesiones y series de funciones. El concepto de convergencia puntual es muy sencillo, no lo es tanto el de convergencia uniforme y puede que un ingeniero no necesite estudiarlo con detenimiento. Es bueno que sepas para qué sirve y que muchas operaciones que consisten en permutar el límite funcional con la integración o con la derivación requieren para su plena justificación un tipo de convergencia mejor que la puntual. Las series de potencias debes estudiarlas con detalle, omitiendo quizás algunas demostraciones. Su estudio es importante y muy útil a efectos de cálculo. Los desarrollos en serie de potencias de las funciones elementales, y la definición por series de potencias de las funciones exponencial y trigonométricas debes estudiarlos bien. Lo que dice el teorema de aproximación de Weierstrass es muy fácil de entender, pero puedes omitir su demostración.

La parte más importante para el aprendizaje es el tiempo que dediques a la realización de ejercicios. He incluido una extensa colección de ejercicios resueltos que te servirá de ayuda para aprender a resolver ejercicios tú solo. Siempre debes intentar resolver algunos de los ejercicios propuestos empezando por los que te parezcan más fáciles, antes de consultar las soluciones. Se aprende más de un ejercicio que al principio se resiste hasta que damos con la idea para resolverlo, que del ejercicio que resolvemos al primer golpe de vista. Los ejercicios que propongo tiene un grado medio de dificultad: no son triviales para no ofender a tu inteligencia ni demasiado difíciles para evitar que puedas desalentarte. Con frecuencia los más difíciles están resueltos. En cualquier caso, siempre debes leer la teoría y comprender los conceptos e ideas básicas, así como el significado preciso de los teoremas, antes de hacer los ejercicios.

Para estudiantes de matemáticas y física

Todo lo dicho arriba se mantiene con algunos añadidos:

El Capítulo 3 debes estudiarlo y entenderlo bien. Los conceptos básicos de los números

complejos están muy confusamente expuestos en gran número de textos y las funciones complejas elementales son definidas con frecuencia de una forma poco correcta.

En el Capítulo 4 debes estudiar y comprender bien las definiciones de extremo superior e inferior. Debes hacer ejercicios hasta que te convenzas de que sabes usarlas con soltura. La diferencia entre un curso de Cálculo y uno de Análisis Matemático está en los conceptos de supremo e ínfimo. Los libros de Análisis Matemático siempre los incluyen, los de Cálculo casi nunca. No es preciso, al menos en una primera lectura, que estudies la demostración del teorema de valores máximos y mínimos de Weierstrass, en el Capítulo 7 hay otra demostración alternativa de dicho teorema que es mucho más fácil. Debes estudiar y comprender la demostración del teorema de Bolzano y sus consecuencias, así como las relaciones entre monotonía e inyectividad.

Para el Capítulo 6 te doy los mismos consejos que arriba. En una segunda lectura debes estudiar la demostración de las reglas de L'Hôpital.

El Capítulo 7 estudia las sucesiones numéricas. Mantengo los mismos consejos de arriba pero, además, en una segunda lectura debes estudiar las demostraciones de los resultados principales, especialmente el teorema de completitud de \mathbb{R} . Por supuesto, debes estudiar la continuidad uniforme.

Para el Capítulo 8 mantengo los mismos consejos de arriba con el añadido de que estudies las demostraciones de integrabilidad de funciones continuas y de funciones monótonas.

En el Capítulo 9 puedes omitir la demostración de la segunda parte del teorema 9.14 pero debes entender lo que se afirma en el mismo. Lo demás debes estudiarlo todo. El tema de las series es muy importante para matemáticos y físicos.

El Capítulo 10 es de estudio obligado para matemáticos y físicos. La convergencia uniforme es tu primer encuentro con algunos conceptos que serán ampliamente generalizados en otros cursos, el tiempo que dediques a su estudio y a la comprensión de sus sutilezas estará bien empleado. Todos los teoremas de este Capítulo tiene demostraciones sencillas y cortas que debes estudiar. El teorema de aproximación de Weierstrass es también uno de esos resultados cuya generalización se estudia en cursos más avanzados, debes entender bien lo que dice y no está de más que leas la demostración. Por lo demás, mantengo los consejos dados arriba.

La parte más importante para el aprendizaje es el tiempo que dediques a la realización de ejercicios. He incluido una extensa colección de ejercicios resueltos que te servirá de ayuda para aprender a resolver ejercicios tú solo. Siempre debes intentar resolver algunos de los ejercicios propuestos empezando por los que te parezcan más fáciles, antes de consultar las soluciones. Se aprende más de un ejercicio que al principio se resiste hasta que damos con la idea para resolverlo, que del ejercicio que resolvemos al primer golpe de vista. Los ejercicios que propongo tiene un grado medio de dificultad: no son triviales para no ofender a tu inteligencia ni demasiado difíciles para evitar que puedas desalentarte. Con frecuencia los más difíciles están resueltos. En cualquier caso, siempre debes leer la teoría y comprender los conceptos e ideas básicas, así como el significado preciso de los teoremas, antes de hacer los ejercicios.