CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Francisco Javier Pérez González

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Índice general

Índice de figuras

Prólogo

Este libro está escrito pensando en un estudiante real que también es, en algunos aspectos, un estudiante ideal. Es un estudiante llegado hace poco a la Universidad, quizá recién llegado, que cursa estudios en alguna ingeniería o licenciatura científico – técnica y debe enfrentarse a una difícil asignatura de cálculo diferencial e integral. Debe ser difícil, porque son muy pocos quienes logran aprobarla en un sólo año y es muy alto el porcentaje de abandono. Con este libro quiero ayudarle en sus estudios de Cálculo o Análisis Matemático, no solamente para que logre una buena calificación sino para que saque de ellos el mayor provecho e incluso aprenda a disfrutarlos.

Se trata, digo, de un estudiante real porque llega a la Universidad con importantes carencias de las que él puede no ser consciente y de las que no es del todo responsable. Es muy posible que nunca haya visto una demostración matemática, que no sepa distinguir entre hipótesis y tesis, que no entienda el significado de que las matemáticas son una ciencia deductiva. Tiene poca agilidad en los cálculos con las operaciones básicas y comete frecuentes errores al intentar simplificarlos, puede calcular derivadas pero lo hace con dificultad porque tiene que ir pensando cada paso y no ha automatizado el proceso, por eso solamente sabe calcular algunas primitivas muy sencillas. Está acostumbrado a realizar ejercicios muy elementales en los que se debe aplicar de forma mecánica una regla recién aprendida. No está acostumbrado a relacionar conceptos y clasifica sus conocimientos en áreas disjuntas: cálculo, álgebra, probabilidad. . .

Pero estas carencias, con ser graves, no son las peores porque son específicas de una materia y podrían solucionarse con facilidad si no vinieran acompañadas por otras mucho más perjudiciales porque afectan a todo el proceso de aprendizaje. Me refiero a la falta de hábitos de estudio, a la pobreza y muy deficiente uso del lenguaje hablado y escrito con la consiguiente dificultad para pensar y expresarse correctamente, a la poca práctica de la lectura comprensiva, a la escasa capacidad de concentración, al poco valor que se da a la memorización de lo estudiado.

Si a este cuadro añadimos que vivimos en una sociedad que valora más el éxito, identificado casi exclusivamente con el éxito económico, que el esfuerzo; el apresuramiento compulsivo, hay que ir a toda velocidad aunque so sepamos a dónde, que la constancia y la dedicación; el gregarismo unánime que el pensamiento crítico e independiente, la autocomplacencia que la exigencia . . . La conclusión es que no son buenos tiempos para el estudio. Además, los jóvenes están permanente solicitados por todo tipo de reclamos publicitarios, adulados hasta la desvergüenza por políticos y pedagogos que les venden un mensaje falso que en su esencia viene a decir que no son responsables de sus actos: si suspenden, les dicen que es porque el profesor no ha sabido motivarlos para que estudien; si después de un botellón de fin de semana, o de una fiesta de la primavera o de un día de la cruz, las calles amanecen convertidas en un albañal por la suciedad acumulada durante la noche, el argumente apropiado para disculpar tan incívico comportamiento es el de un supuesto derecho a la diversión. Estos políticos y pedagogos parecen haberse puesto de acuerdo para propiciar que los jóvenes vivan en una permanente niñez, acreedora de todos los derechos pero sin obligaciones ni responsabilidades. Y, para acabar, la bazofia, mezquindad, zafiedad y mal gusto de algunos programas de televisión contribuyen de forma notable a difundir el mensaje de que todo vale: puedes vender tus entrañas en uno de esos programas o demostrar tu absoluta ignorancia sin temor a hacer el ridículo porque así lo hacen la mayoría de quienes participan en ellos. ¡Qué añoranza de aquellos programas en los que el saber ocupaba lugar!

El estudiante al que me dirijo es real porque es víctima de este sistema y también, puede que sin tener clara conciencia de ello, porque contribuye a su mantenimiento. Cada vez es más difícil conjugar juventud y lucidez. Pero también es un estudiante ideal porque valora el estudio, quiere prepararse para ejercer eficazmente una profesión y ser útil a los demás y tiene ganas de aprender. Lector, si este no es tu caso, si lo que quieres es solamente aprobar y no tienes curiosidad ni estás interesado en aprender, mejor que no sigas leyendo, este libro no es lo que buscas. Pero si no es así, confío en que las páginas que siguen sean útiles para que progreses adecuadamente en tus estudios de cálculo, porque lo único que se necesita para ello es, además del interés y las ganas de aprender, una capacidad básica lógico – deductiva que sin duda tienes.

El contenido de este libro no ofrece sorpresa alguna y responde a un acuerdo general tácito de lo que debe constituir un curso básico de Cálculo de funciones de una variable. La novedad, si la hay, habrá que buscarla en el estilo, en la exposición, en la gran cantidad de ejemplos y de ejercicios, en la minuciosa presentación de los conceptos y de sus relaciones. Comentaré seguidamente algunos de estos aspectos.

Este libro está escrito en un estilo deliberadamente sencillo, he querido huir del estilo pedante que se impuso hace algunos años y que todavía perdura en casos aislados. Escribir matemáticas es un arte que se va aprendiendo poco a poco y, aunque no es ajeno a las modas, tiene unas reglas básicas que deben ser respetadas en cualquier circunstancia. Realmente se trata de una sola regla debida a Nicolás Boileau (1636 - 1711) que dice así *“lo que bien se concibe bien se expresa con palabras que acuden con presteza”*. Que las palabras acudan con mayor o menor presteza es algo anecdótico, pero lo que es indudable es que si algo no se concibe bien es imposible expresarlo con claridad. La primera condición necesaria para escribir matemáticas es entender con todo detalle, a ser posible desde varios puntos de vista diferentes y con distinto grado de generalidad, la génesis y evolución de los conceptos que se exponen, las sutilezas y dificultades de comprensión que encierran, los errores más frecuentes en su interpretación. Esa condición necesaria no es suficiente. Hay que exponer esos conceptos con palabras comprensibles para el lector a quien se dirigen, evitando tecnicismos innecesarios, y ello sin dejar de ser claro y preciso.

Este libro está escrito un poco igual que se explica en clase delante de la pizarra, me he puesto en el lugar de un hipotético estudiante medio algo despistado y me hago eco de sus presumibles dudas, preguntas y confusiones, e intento explicar esas dudas, responder a las preguntas y aclarar las confusiones. Confío en que los muchos años que he dedicado a la docencia en el primer curso de distintas licenciaturas e ingenierías me hayan permitido saber ponerme en tu lugar y cumplir este empeño con decoro. Por todo eso creo que este libro te permitirá estudiar por ti mismo y te ayudará a comprender de forma correcta los conceptos principales del Cálculo.

Este libro incluye una colección de ejercicios muchísimo más amplia que lo que suele ser usual en un libro de texto. De hecho este libro es también un libro de problemas de Cálculo y, se me disculpará la inmodestia, creo que hay muy pocos libros de ejercicios de Cálculo que incluyan una colección tan variada de ejercicios y, sobre todo, que propongan tantos ejercicios no triviales y desarrollen las soluciones con detalle. Los libros de ejercicios de Cálculo dan muchas veces la impresión de que la teoría solamente sirve para proporcionar un conjunto de recetas que después hay que aplicar, sin acabar nunca de entender bien por qué se elige una receta y no otra y sin entender el fundamento que hace que la receta funcione.

Mi intención ha sido escribir un libro de Cálculo que sea útil tanto para el futuro matemático como para el futuro ingeniero, pero cada uno debe leer el libro de la forma adecuada a sus intereses y necesidades. Para ambos será de gran utilidad la extensa colección de ejercicios y de ejemplos, pero uno habrá de prestar mayor atención a los fundamentos teóricos y a las demostraciones y otro a las técnicas de cálculo y de resolución de diversos tipos de ejercicios. Al final de este prólogo propongo dos posibles guías de lectura.

Digamos algo sobre las demostraciones. Claro está que razonar y demostrar son aspectos fundamentales de las matemáticas, pero sé que el valor que las demostraciones tienen para los estudiantes es muy relativo. El empeño en demostrarlo todo puede ser contraproducente y constituir un freno en el progreso de muchos estudiantes. Las demostraciones interesantes son las que contienen ideas que se repiten en otras situaciones semejantes, no deben ser extensas, deben ser elegantes y demostrar resultados importantes que se van a usar con frecuencia. Cuando empecé este libro mi intención era incluir muy pocas demostraciones, al final, para lograr la autonomía del texto he incluido muchas más de lo que inicialmente pensaba. Mi deseo era equilibrar un desarrollo intuitivo con uno lógico deductivo, confío en no haberme desviado mucho de este objetivo. Toda ayuda a la intuición me parece loable, en este sentido, siempre que lo he creído conveniente, no he dudado en incluir una figura para facilitar la comprensión de una definición o de una demostración. Pero también quiero decir respecto de algunas demostraciones que pueden parecer muy complicadas (como los teoremas 4.13 y 4.29 de los que también doy versiones más sencillas 7.54 y 7.55), que las cosas complicadas son complicadas, que no se debe renunciar al razonamiento correcto por el hecho de que sea complicado, los detalles son importantes, en matemáticas no todo vale.

He concedido toda la importancia que merece al desarrollo y evolución histórica de los principales conceptos del Cálculo. He incluido apuntes históricos, mucho más amplios de lo usual en textos de estas características, sobre la evolución de los conceptos de número y magnitud, límite y función, derivadas e integrales, así como al concepto de infinito y a la algebraización del Análisis llevada a cabo en el último tercio del siglo XIX. Incluso hay un capítulo, el quinto, cuyo título ‘‘*Números y límites. El infinito matemático*” deja bien claro cuál es su contenido. Naturalmente, nada de original hay en dichas notas históricas pues no he consultado fuentes originales, y su posible valor está en la particular ordenación y exposición que he llevado a cabo. Mi propósito al escribirlas ha sido presentar la génesis de los conceptos matemáticos en su contexto, su titubeante y confusa evolución, las discrepancias sobre el significado de los mismos... En una palabra, proporcionar al estudiante una visión de la matemática viva.

Con frecuencia los estudiantes tienen la idea de que las matemáticas son algo cerrado y acabado, un conjunto de verdades eternas e inmutables de una fría perfección que se transmiten dogmáticamente de generación en generación y donde no hay lugar para la sorpresa ni la pasión. Nada más lejos de la realidad. La historia de las matemáticas demuestra que el quehacer matemático, la creación matemática, está muy lejos de esa fría perfección formal lógico – deductiva, que la intuición, la inducción, los procedimientos heurísticos son quizá más importantes para el avance de las matemáticas que el razonamiento deductivo. La historia de las matemáticas muestra cómo los conceptos nacen para responder a problemas concretos de cada época, cómo esos mismos conceptos llevan a reformular posteriormente los problemas desde perspectivas más generales, en un avance que no siempre es una línea recta, con intentos fallidos, con controversias y desacuerdos.

La historia pone también muy claramente de manifiesto que las matemáticas son un saber acumulativo. Esto tiene una particular importancia para el aprendizaje, quiere decir que para estudiar y avanzar en matemáticas la memoria es mucho más importante de lo que usualmente se cree. La efímera memoria de los estudiantes que llegan a la Universidad, que con frecuencia han olvidado lo que alguna vez aprendieron de matemáticas, es una de las grandes dificultades que debemos afrontar los profesores.

Un aspecto notable del libro es la atención que dedico a los persistentes errores en matemáticas que suelen tener casi todos los estudiantes al llegar a la Universidad. Confío en que mis observaciones al respecto sean útiles no sólo para los estudiantes sino también para los profesores de matemáticas de las Enseñanzas Medias. También expongo algunas opiniones muy críticas con la forma en que tradicionalmente se explican algunos temas en la Universidad, esto afecta muy especialmente al estudio de los números complejos y de las funciones elementales complejas y de las series, para los que hago propuestas que creo que deben ser tenidas muy en cuenta.

Granada, septiembre de 2008

Guías de lectura

El Capítulo 5 y los diversos complementos de contenido histórico solamente debes leerlos si te gustan. La única forma de saber si te gustan es que empieces a leerlos, y si cuando lleves dos páginas sigues interesado en la lectura seguramente llegarás hasta el final.

Los capítulos 1 y 2 deben ser leídos con detenimiento. No hay en ellos demostraciones que merezcan ese nombre. En el Capítulo 1 se dan definiciones básicas cuyo conocimiento es imprescindible para leer todo lo demás. En el Capítulo 2 se define el importantísimo concepto de función y se estudian, desde un punto de vista descriptivo, las funciones elementales. El conocimiento de dichas funciones es absolutamente necesario para leer el resto del libro y realizar ejercicios.

Para estudiantes orientados hacia ingenierías cuyo interés por las matemáticas es de tipo instrumental

El Capítulo 3 está dedicado a los números complejos y a las funciones complejas elementales. Solamente tú puedes saber si necesitas estudiarlo. Si decides omitirlo puedes hacerlo con tranquilidad.

El Capítulo 4 está dedicado a dos importantes conceptos: el de continuidad y el de límite funcional. Son conceptos de importancia teórica y necesarios para hacer ejercicios. Debes estudiar y entender las definiciones y resultados pero no es necesario que leas las demostraciones. El concepto de extremo superior tiene interés desde un punto de vista formativo, para que comprendas que se precisa alguna herramienta que permita probar ciertas afirmaciones de apariencia evidente (o no tan evidente). Muchos libros de Cálculo orientados hacia la ingeniería omiten este concepto. No es un concepto imprescindible para un futuro ingeniero, pero es bueno que sepas de su existencia y tengas una idea de su utilidad y lo que significa.

El Capítulo 6 estudia las derivadas y sus aplicaciones. Creo que debes leerlo todo incluidas las demostraciones de los resultados principales porque son cortas y fáciles de entender, con la excepción, quizás, de las demostraciones de las Reglas de L'Hôpital, no porque sean difíciles sino porque son algo largas. Pero debes leer la explicación de por qué dichas reglas funcionan. Son muy útiles y mi impresión es que se usan como un recurso casi mágico, sin entender bien lo que se está haciendo. La sección en la que se explican técnicas para calcular límites de funciones debes leerla hasta que memorices los límites básicos que allí se indican y entiendas bien los procedimientos que se exponen.

El Capítulo 7 está dedicado al estudio de las sucesiones. Debes aprender y comprender bien las definiciones y lo que dicen los principales teoremas pero, salvo la demostración de que toda sucesión monótona acotada es convergente, no es necesario que leas ninguna otra demostración. Los resultados relativos a la condición de Cauchy son una herramienta teórica fundamental, pero quizás un ingeniero puede prescindir de ellos. La sección en la que se explican técnicas para calcular límites de sucesiones y para resolver las indeterminaciones más usuales, debes leerla hasta que memorices los límites básicos que allí se indican y entiendas bien los procedimientos que se exponen. Las sucesiones que definen al número e y las desigualdades asociadas con dichas sucesiones son muy útiles, debes memorizarlas y aprender a reconocerlas allí donde aparezcan. La continuidad uniforme es algo de lo que puedes prescindir con tranquilidad.

El Capítulo 8 es muy extenso, en él se estudia la integral de Riemann que es la integral usual del Cálculo, las integrales impropias, el cálculo de primitivas y las aplicaciones del cálculo integral. Con la excepción de las demostraciones del Teorema Fundamental del Cálculo y de la Regla de Barrow, no es necesario que leas otras demostraciones. Procura entender bien la definición de integral y sus propiedades así como el significado del Teorema Fundamental del Cálculo. Todo el tiempo que dediques, y tendrás que dedicar muchas horas, a practicar las técnicas de cálculo de primitivas será ampliamente recompensado. Calcular primitivas es algo que hay que hacer con muchísima frecuencia: en todas las aplicaciones de la integral tienes que calcular una primitiva.

El Capítulo 9 está dedicado al estudio de las series numéricas. Es importante que aprendas y comprendas bien las definiciones principales. Hay muchísima confusión en este tema y los libros que conozco sirven de poca ayuda. Las demostraciones de este capítulo puedes omitirlas salvo las de los criterios de convergencia para series de términos positivos que son cortas y fáciles de entender. Las técnicas para sumar algunos tipos de serie debes estudiarlas, así como el criterio de Leibniz para las series alternadas. El apartado dedicado a la expresión de un número real en una base $b \in \mathbb{Z}$ merece que lo leas, aunque solamente sea un poco por encima, para saber lo que dice y para aclararte de una vez con eso de los decimales infinitos con infinitas cifras que no se repiten.

El Capítulo 10 estudia la convergencia puntual y uniforme de sucesiones y series de funciones. El concepto de convergencia puntual es muy sencillo, no lo es tanto el de convergencia uniforme y puede que un ingeniero no necesite estudiarlo con detenimiento. Es bueno que sepas para qué sirve y que muchas operaciones que consisten en permutar el límite funcional con la integración o con la derivación requieren para su plena justificación un tipo de convergencia mejor que la puntual. Las series de potencias debes estudiarlas con detalle, omitiendo quizás algunas demostraciones. Su estudio es importante y muy útil a efectos de cálculo. Los desarrollos en serie de potencias de las funciones elementales, y la definición por series de potencias de las funciones exponencial y trigonométricas debes estudiarlos bien. Lo que dice el teorema de aproximación de Weierstrass es muy fácil de entender, pero puedes omitir su demostración.

La parte más importante para el aprendizaje es el tiempo que dediques a la realización de ejercicios. He incluido una extensa colección de ejercicios resueltos que te servirá de ayuda para aprender a resolver ejercicios tú solo. Siempre debes intentar resolver algunos de los ejercicios propuestos empezando por los que te parezcan más fáciles, antes de consultar las soluciones. Se aprende más de un ejercicio que al principio se resiste hasta que damos con la idea para resolverlo, que del ejercicio que resolvemos al primer golpe de vista. Los ejercicios que propongo tiene un grado medio de dificultad: no son triviales para no ofender a tu inteligencia ni demasiado difíciles para evitar que puedas desalentarte. Con frecuencia los más difíciles están resueltos. En cualquier caso, siempre debes leer la teoría y comprender los conceptos e ideas básicas, así como el significado preciso de los teoremas, antes de hacer los ejercicios.

Para estudiantes de matemáticas y física

Todo lo dicho arriba se mantiene con algunos añadidos:

El Capítulo 3 debes estudiarlo y entenderlo bien. Los conceptos básicos de los números complejos están muy confusamente expuestos en gran número de textos y las funciones complejas elementales son definidas con frecuencia de una forma poco correcta.

En el Capítulo 4 debes estudiar y comprender bien las definiciones de extremo superior e inferior. Debes hacer ejercicios hasta que te convenzas de que sabes usarlas con soltura. La diferencia entre un curso de Cálculo y uno de Análisis Matemático está en los conceptos de supremo e ínfimo. Los libros de Análisis Matemático siempre los incluyen, los de Cálculo casi nunca. No es preciso, al menos en una primera lectura, que estudies la demostración del teorema de valores máximos y mínimos de Weierstrass, en el Capítulo 7 hay otra demostración alternativa de dicho teorema que es mucho más fácil. Debes estudiar y comprender la demostración del teorema de Bolzano y sus consecuencias, así como las relaciones entre monotonía e inyectividad.

Para el Capítulo 6 te doy los mismos consejos que arriba. En una segunda lectura debes estudiar la demostración de las reglas de L'Hôpital.

El Capítulo 7 estudia las sucesiones numéricas. Mantengo los mismos consejos de arriba pero, además, en una segunda lectura debes estudiar las demostraciones de los resultados principales, especialmente el teorema de completitud de $\mathbb{R}$. Por supuesto, debes estudiar la continuidad uniforme.

Para el Capítulo 8 mantengo los mismos consejos de arriba con el añadido de que estudies las demostraciones de integrabilidad de funciones continuas y de funciones monótonas.

En el Capítulo 9 puedes omitir la demostración de la segunda parte del teorema 9.14 pero debes entender lo que se afirma en el mismo. Lo demás debes estudiarlo todo. El tema de las series es muy importante para matemáticos y físicos.

El Capítulo 10 es de estudio obligado para matemáticos y físicos. La convergencia uniforme es tu primer encuentro con algunos conceptos que serán ampliamente generalizados en otros cursos, el tiempo que dediques a su estudio y a la comprensión de sus sutilezas estará bien empleado. Todos los teoremas de este Capítulo tiene demostraciones sencillas y cortas que debes estudiar. El teorema de aproximación de Weierstrass es también uno de esos resultados cuya generalización se estudia en cursos más avanzados, debes entender bien lo que dice y no está de más que leas la demostración. Por lo demás, mantengo los consejos dados arriba.

La parte más importante para el aprendizaje es el tiempo que dediques a la realización de ejercicios. He incluido una extensa colección de ejercicios resueltos que te servirá de ayuda para aprender a resolver ejercicios tú solo. Siempre debes intentar resolver algunos de los ejercicios propuestos empezando por los que te parezcan más fáciles, antes de consultar las soluciones. Se aprende más de un ejercicio que al principio se resiste hasta que damos con la idea para resolverlo, que del ejercicio que resolvemos al primer golpe de vista. Los ejercicios que propongo tiene un grado medio de dificultad: no son triviales para no ofender a tu inteligencia ni demasiado difíciles para evitar que puedas desalentarte. Con frecuencia los más difíciles están resueltos. En cualquier caso, siempre debes leer la teoría y comprender los conceptos e ideas básicas, así como el significado preciso de los teoremas, antes de hacer los ejercicios.