Análisis I - Examen Final - 2 de septiembre de 2011

---

1) Estudiar la convergencia de

$$a)\text{ la sucesión } a_n = \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} \qquad \text{y} \qquad b)\text{ la serie } \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1+e^n}{ne^n\log(n)}.$$

2) Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$, con $f(x)$ igual a:

$$a)\, e^{-\sqrt{x}} \qquad \text{y} \qquad b)\, \frac{1}{e^x+4e^{-x}}.$$

3) Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}, \qquad \lim_{x\to\pi} \frac{(1+\cos x)^3}{(x-\pi)^6}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\operatorname{sen} x)-x}{\log(1-\operatorname{sen} x)+x}.$$

4) Calcular el polinomio de Taylor de grado 2 en $a=0$ de la función

$$G(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{(1+t+t^2)^2}\,dt.$$

5) Sean las funciones

$$F(x) = \int_0^x \cos^2(t^2)\,dt \qquad \text{y} \qquad G(x) = F(2x-\operatorname{sen} x).$$

Calcular $\left(G^{-1}\right)'(0)$ y $\left(G^{-1}\right)''(0)$ donde G^{-1} indica la función inversa de G.

Soluciones

1)

a) Dividiendo por 3^{n+1} en numerador y denominador podemos escribir

$$a_n = \frac{(2/3)^{n+1} + 1}{(1/3)(2/3)^n + 1/3}.$$

Como $\lim_{n\to\infty}(2/3)^n = 0$ deducimos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{0+1}{0+1/3} = 3$.

b) Podemos aplicar el criterio de Leibniz si mostramos que la sucesión $b_n = \frac{1+e^n}{ne^n \log(n)}$ cumple que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ y es decreciente para $n \geq 2$. Para calcular el límite, dividiendo por e^n el numerador y el denominador podemos escribir

$$b_n = \frac{e^{-n} + 1}{n \log(n)},$$

luego $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{0+1}{\infty} = 0$. Por otra parte, como $e^{-n} + 1$ es decreciente y $n\log(n)$ es creciente para $n \geq 2$, deducimos que b_n es decreciente para $n \geq 2$. Finalmente, por el criterio de Leibniz, la serie $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n b_n$ es convergente.

2)

a) Primero calculamos una primitiva $\int e^{-\sqrt{x}}\, dx$. Para ello hacemos el cambio de variable $\sqrt{x} = t$, por lo que $x = t^2$ y $dx = 2t\, dt$ y sustituyendo obtenemos

$$\int e^{-\sqrt{x}}\, dx = \int e^{-t} 2t\, dt.$$

Ahora proseguimos integrando por parte tomando $u = 2t$ y $dv = e^{-t}\, dt$. Como $du = 2\, dt$ y $v = -e^{-t}$ tenemos que

$$\int e^{-t} 2t\, dt = 2t(-e^{-t}) - \int (-e^{-t}) 2\, dt = -2te^{-t} - 2e^{-t}.$$

Finalmente, deshaciendo el cambio $t = \sqrt{x}$ llegamos a

$$\int e^{-\sqrt{x}}\, dx = -2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}}.$$

Usando dicha primitiva calculamos

$$\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}\, dx = (-2 \cdot 1 \cdot e^{-1} - 2e^{-1}) - (-2 \cdot 0 \cdot e^{-0} - 2e^{-0}) = 2 - 4e^{-1}.$$

b) Como antes, calculamos $\int \frac{1}{e^x+4e^{-x}}\,dx$. Haciendo el cambio de variable $e^x = t$, como $x = \log t$ y $dx = dt/t$, vemos que

$$\int \frac{1}{e^x + 4e^{-x}}\,dx = \int \frac{1}{t+4/t}\,\frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(1/2)\,dt}{1+(t/2)^2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2},$$

luego deshaciendo el cambio $\int \frac{1}{e^x+4e^{-x}}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\frac{e^x}{2}$. Por tanto

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x+4e^{-x}}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\frac{e}{2} - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}.$$

3) Escribiendo $x = e^{\log x}$ tenemos que

$$\lim_{x\to 0+} x^{\operatorname{sen} x} = e^{\lim_{x\to 0+}\operatorname{sen} x \log x}.$$

Ahora

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{sen} x \log x = \lim_{x\to 0+} \frac{\log x}{1/\operatorname{sen} x}$$

y tenemos una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, luego por L'Hopital

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log x}{1/\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-\cos x/(\operatorname{sen} x)^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{(\operatorname{sen} x)^2}{x}$$

que es una indeterminación $\frac{0}{0}$ y de nuevo por L'Hopital

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(\operatorname{sen} x)^2}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{1} = 0.$$

Por tanto $\lim_{x\to 0+} x^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1$.

En el seguno límite podemos escribir

$$\lim_{x\to\pi} \frac{(1+\cos x)^3}{(x-\pi)^6} = \left(\lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}\right)^3.$$

El límite interior es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ luego aplicando L'Hopital

$$\lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2} = \lim_{x\to\pi} \frac{-\operatorname{sen} x}{2(x-\pi)} = \lim_{x\to\pi} \frac{-\cos x}{2} = \frac{1}{2},$$

donde hemos usado L'Hopital también en la segunda igualdad. Así, el resultado es

$$\lim_{x\to\pi} \frac{(1+\cos x)^3}{(x-\pi)^6} = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}.$$

Por último, en el tercer límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\operatorname{sen}x)-x}{\log(1-\operatorname{sen}x)+x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}x}-1}{\frac{-\cos x}{1-\operatorname{sen}x}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1-\operatorname{sen}x}{-\cos x+1-\operatorname{sen}x}$$

habiendo aplicado en la tercera igualdad L'Hopital. De nuevo por L'Hopital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1-\operatorname{sen}x}{-\cos x+1-\operatorname{sen}x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}x-\cos x}{\operatorname{sen}x-\cos x}=\frac{0-1}{0-1}=1.$$

4) Nos piden calcular el polinomio

$$P(x)=G(0)+G'(0)x+G''(0)\frac{x^2}{2},$$

luego debemos hallar los coeficientes $G(0), G'(0)$ y $G''(0)$. Tenemos que

$$G(0)=\int_0^0\frac{1}{(1+t+t^2)^2}\,dt=0.$$

Para conseguir la derivada usamos el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$G'(x)=\frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen}x+(\operatorname{sen}x)^2)^2},$$

de donde $G'(0)=1$. Por último

$$G''(x)=\frac{(-\operatorname{sen}x)D^2-(\cos x)2D(\cos x+2\operatorname{sen}x\cos x)}{D^4}$$

con $D=1+\operatorname{sen}x+(\operatorname{sen}x)^2$, de donde $G''(0)=-2$. Así

$$P(x)=0+1x+(-2)\frac{x^2}{2}=x-x^2.$$

5) Tenemos que

$$G(x)=\int_0^{2x-\operatorname{sen}x}\cos^2(t^2)\,dt.$$

Por el Teorema de la función inversa

$$(G^{-1})'(x)=\frac{1}{G'(G^{-1}(x))}$$

luego $(G^{-1})'(0) = \frac{1}{G'(G^{-1}(0))}$. Calculamos la derivada por TFC:

$$G'(x) = (2 - \cos x)\cos^2((2x - \operatorname{sen} x)^2);$$

se cumple que $G'(0) > 0$ luego existe la función inversa cerca de cero. Además, $G'(x) \geq 0$ luego G es monótona creciente y $G^{-1}(0) = 0$. Luego

$$(G^{-1})'(0) = \frac{1}{G'(0)} = \frac{1}{(2-1)1} = 1.$$

Para calcular $(G^{-1})''(x)$ derivamos la fórmula anterior para $(G^{-1})'(x)$:

$$(G^{-1})''(x) = \frac{G''(G^{-1}(x))\,(G^{-1})'(x)}{(G'(G^{-1}(x)))^2}$$

de donde

$$(G^{-1})''(0) = \frac{G''(G^{-1}(0))\,(G^{-1})'(0)}{(G'(G^{-1}(0)))^2} = \frac{G''(0)\cdot 1}{G'(0)^2} = G''(0).$$

Sólo nos queda calcular $G''(0)$:

$$G''(x) = \operatorname{sen} x \cos^2 D^2 + (2 - \cos x)2(\cos D^2)\,(-\operatorname{sen} D^2)\,2D(2 - \cos x)$$

con $D = 2x - \operatorname{sen} x$. Así $G''(0) = 0$, luego $(G^{-1})''(0) = 0$.