Análisis I - Examen Final - 20 de enero de 2011

---

1) Estudiar si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ convergen, donde:

$$a_n = \frac{\log^2 n}{n+1}, \qquad b_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \qquad c_n = \frac{n+3}{n^3+3}.$$

2) Calcular el área de la región comprendida entre las curvas $y = 0$ e $y = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$.

3) Calcular los siguientes límites

a) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 1}$,

b) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos(6x))}{\log(\cos(3x))}$,

c) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$,

d) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} x \operatorname{sen}(1/x)$.

4) Dada la función

$$F(x) = \int_0^{\cos x} \frac{dt}{1+t^2},$$

a) Calcular $F'(x)$ y $F''(x)$.
b) Calcular el polinomio de Taylor de grado 2 de la funcion en $x = 0$.
c) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $F'(x) = 1/2$ en el intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$?

5) Hallar para qué valores de a se cumple la siguiente desigualdad:

$$\int_0^1 (x + a^2) \operatorname{sen}(\pi x)\, dx > 4.$$

Soluciones

1) Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^2 n}{n+1}$, se puede estudiar su convergencia comparando con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^2 n}{n}$, ya que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\log^2 n}{n+1}}{\frac{\log^2 n}{n}} = 1$$

así o las dos series convergen o las dos divergen. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^2 n}{n}$ diverge. Esto se puede ver, por ejemplo, usando por ejemplo el criterio de la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log^2 x}{x}\, dx = \frac{1}{3}(\lim_{x\to+\infty} \log x - \log^3 1) = +\infty - 0 = +\infty\,.$$

Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, usamos el criterio del cociente. Calculamos el límite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!(n+1)^2 n!n!}{2(n+1)(2n+1)(2n!)n!n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1\,,$$

luego la serie converge.

Finalmente, para estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3+3}$, podemos usar de nuevo el criterio de comparación. Tenemos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+3}{n^3+3}}{\frac{1}{n^2}} = 1,$$

por tanto la serie converge, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (visto en clase, se puede demostrar usando el criterio integral).

2) La función $y = \frac{1}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ es positiva para todo $x \in \mathbb{R}$, puesto que lo es e^x. Así que no corta al eje OX y el área pedida viene dada por $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$. Integral que se calcula de manera inmediata, ya que $(e^x)' = e^x$ (o haciendo el cambio de variable $t = e^x$), y queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg}(e^x) - \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg}(e^x) = \lim_{t\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} t - \operatorname{arc\,tg}(0) = \frac{\pi}{2}.$$

3) a) Este límite nos lleva a una indeterminacion $\frac{0}{0}$, podemos usar la regla de L'Hôpital (dos veces) para hallarlo:

$$\lim_{x\to1} \frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to1} \frac{-\pi \mathrm{sen}(\pi x)}{2x-2} = \lim_{x\to1} \frac{-\pi^2\cos(\pi x)}{2} = -\frac{\pi^2}{2}\cos(\pi) = \frac{\pi^2}{2}.$$

b) De nuevo nos encontramos ante una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ (ya que $\cos 0 = 1$ y $\log(1) = 0$). Podemos emplear L'Hôpital, y queda

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos(6x))}{\log(\cos(3x))} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-6\,\mathrm{sen}(6x)}{\cos(6x)}}{\frac{-3\,\mathrm{sen}(3x)}{\cos(3x)}} = 2 \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{sen}(6x)\cos(3x)}{\cos(6x)\,\mathrm{sen}(3x)}\,,$$

esto da de nuevo una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Podríamos usar la regla de L'Hôpital de nuevo, pero también se puede trabajar con identidades trigonométricas: usando que $\mathrm{sen}(6x) = \mathrm{sen}(2\cdot(3x)) = 2\,\mathrm{sen}(3x)\cos(3x)$ y $\cos(6x) = \cos^2(3x) - \mathrm{sen}^2(3x)$, nos queda

$$2 \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{sen}(6x)\cos(3x)}{\cos(6x)\,\mathrm{sen}(3x)} = 2 \lim_{x\to 0^+} \frac{2\,\mathrm{sen}(2x)\cos^2(3x)}{(\cos^(3x) - \mathrm{sen}^3(3x))\,\mathrm{sen}(3x)} = 4 \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos^2(3x)}{(\cos^2(3x) - \mathrm{sen}^3(3x))} = 4\,.$$

c)$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \infty^0$ indeterminación. Escribimos

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln x\cdot\frac{1}{x}}$$

y calculamos el límite del exponente: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$, luego usando la regla de L'Hôpital obtenemos $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Finalmente, $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$.

d) $\lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{sen}(1/x) = \infty \cdot 0$, indeterminación. Podemos escribir $\lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{sen}(1/x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{sen}(1/x)}{1/x}$ y usar la regla de L'Hôpital,$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{sen}(1/x)}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \cos(1/x) = 1$.

4) a) $F'(x) = -\frac{\mathrm{sen}\,x}{1+\cos^2 x}$ (usando el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena), $F''(x) = -\frac{\cos x(\cos^2 x+1) - \mathrm{sen}\,x\cdot 2\cdot\cos x(-\mathrm{sen}\,x)}{(1+\cos^2 x)^2} = -\cos x\frac{\cos^2 x + 1 + 2\,\mathrm{sen}^2 x}{(1+\cos^2 x)} = -\cos x\frac{2+\mathrm{sen}^2 x}{(1+\cos^2 x)^2}$.

b)El polinomio de Taylor de grado 2 en $x = 0$ es $P(x) = F(0) + F'(0)x + F''(0)/2$. Para calcular $F'(0)$ y $F''(0)$ sustituímos el valor $x = 0$ en las expresiones obtenidas en el apartado anterior, así $F'(0) = 0$ y $F''(0) = -1/2$ (usando $\mathrm{sen}\,0 = 0$ y $\cos 0 = 1$). Ahora $F(0) = \int_0^{\cos 0} dt/(1+t^2) = \mathrm{arc\,tg}(1) - \mathrm{arc\,tg}(0) = \pi/4$, luego el polinomio queda $P(x) = (\pi - x^2)/4$.

c) Se nos pide hallar el número de soluciones de $-\mathrm{sen}\,x = \frac{1}{2}(1+\cos^2 x)$. La opción por la que han optado la mayoría es la de escribir esta ecuación como una ecuación cadrática para el $\mathrm{sen}\,x$, esto queda:

$$\mathrm{sen}^2 x - 2\,\mathrm{sen}\,x - 2 = 0\,, \quad \mathrm{sen}\,x = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Como $\mathrm{sen}\,x < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sen}\,x = 1 + \sqrt{3}$ no tiene solución. Como $-1 < 1 - \sqrt{3} < 1$ entonces hay infinitas soluciones en $\mathbb{R}$ (por la periodicidad del seno), pero ¿hay alguna en $[\pi/2, 3\pi/2]$? Si uno sabe que el $\mathrm{sen}\,x$ es estrictamente decreciente en los intervalos $(\pi/2 + k\pi, 3\pi/2 + k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$ (y estrictamente creciente en los intervalos $(-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$) y que $\mathrm{sen}\,\pi/2 = 1$ y $\mathrm{sen}\,3\pi/2 = -1$ entonces sólo puede haber una solución a $\mathrm{sen}\,x = 1 - \sqrt{3}$.

Otra posibilidad es usar la ecuacion $F'(x) - 1/2 = 0$ y buscar las raíces de la función $f(x) = F'(x) - 1/2 = -\frac{\operatorname{sen} x}{(1+\cos^2 x)} - \frac{1}{2}$. Calculamos $f(\pi/2) = -3/2 < 0$ y $f(3\pi/2) = 1/2 > 0$, así por continuidad de la función y por el teorema de Bolzano sabemos que existe al menos un cero en el intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$. Ahora, como antes hemos calculado $F''(x)$, sabemos que $f'(x) = F''(x) = -\cos x \frac{2+\operatorname{sen}^2 x}{(1+\cos^2 x)^2}$, que se anula solamente en los extremos del intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$. Así que solo hay una solución a la ecuación (de otra manera se contradiría el teorema de Rolle).

5) a es una constante arbitraria. Primero calculamos el valor de la integral:

$$\int_0^1 (x + a^2) \operatorname{sen}(\pi x)\, dx = \int_0^1 x \operatorname{sen}(\pi x)\, dx + a^2 \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x)\, dx$$
$$= -\frac{1}{\pi}[x \cos(\pi x)]_0^1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos(\pi x)\, dx - a^2 \frac{1}{\pi}[\cos(\pi x)]_0^1$$
$$= -\frac{1}{\pi} \cdot 1 \cdot (-1) + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x)\right]_0^1 - a^2 \frac{1}{\pi}(-1-1) = \frac{1}{\pi}(1 + 2a^2).$$

Ahora resolvemos la inecuación: $(1 + 2a^2) > 4\pi$, o $a^2 > (4\pi - 1)/2$, o $|a| > \sqrt{(4\pi - 1)/2}$. Entonces, los valores de a que satisfacen la desigualdad son tales que $a > \sqrt{(4\pi - 1)/2}$ o $a < -\sqrt{(4\pi - 1)/2}$ (¡a muchos se les ha pasado la posibilidad de que a sea negativa!).