Hoja 5: Integrales

1.- Calcular, aplicando directamente la definición, $\int_0^2 x\,dx$.

2.- Probar que la función $y = \lfloor x \rfloor$ es integrable en $[0,5]$ y calcular $\int_0^5 \lfloor x \rfloor\,dx$.

3.- Expresar como integrales los siguientes límites:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,n+k}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k)\,k}{n^3}.$$

4.- Sea una función continua en $[a,b]$. Definimos la *media integral* de f sobre $[a,b]$ como

$$E(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

(a) Sean M y m respectivamente el máximo y el mínimo de f sobre $[a,b]$. Demostrar que $m \le E(f) \le M$. Si f es constante, ¿cuál es su valor esperado?.

(b) Usando el teorema de los valores intermedios y el apartado anterior probar el siguiente resultado:

> **Teorema.** *Sea f una función continua en $[a,b]$. Entonces, existe $c \in [a,b]$, tal que,*
>
> $$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = f(c).$$

(c) Supongamos que f es impar (es decir, $f(x) = -f(-x)$). Hallar $E(f)$ sobre $[-a,a]$. Sugerencia: interpretar la integral en términos de áreas.

(d) Evaluar $\int_{-a}^{a} x^7\,\mathrm{sen}(x^4)\,dx$.

5.- Sabiendo que $\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$ para todo $a > 0$, calcular $\int_0^a \sqrt{x}\,dx$.

6.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$F(x) = \int_0^{x^2} (\mathrm{sen}\,t^2)\,\log(1+t^2)\,dt, \qquad G(x) = \int_{-e^x}^{\mathrm{sen}^2 x} \cos(\log(2\,t^2))\,dt.$$

7.- Encontrar una función f definida y continua en $[0,\infty)$ tal que

$$\int_0^{x^2} (1+t)\,f(t)\,dt = 6\,x^4.$$

8.- Evaluar las siguientes integrales indefinidas:

(1) $\displaystyle\int (6\,x^2-8)^{25}\,x\,dx$	(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\,x^2+8}$	(3) $\displaystyle\int \frac{3\,x^2+2\,x-1}{x+2}\,dx$
(4) $\displaystyle\int \frac{e^x}{2\,e^x-1}\,dx$	(5) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x+8}\,dx$	(6) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+4}\,dx$
(7) $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$	(8) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	(9) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$
(10) $\displaystyle\int \frac{dx}{9\,x^2+6\,x+5}$	(11) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^3-3\,x+2}\,dx$	(12) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-x^2+4\,x-4}\,dx$
(13) $\displaystyle\int \frac{e^x+3\,e^{-x}}{e^{2\,x}+1}\,dx$	(14) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+3\,\cos x}$	(15) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$
(16) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx$	(17) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$	(18) $\displaystyle\int \frac{x^5+2\,x+1}{x^4+2\,x^2+1}\,dx$
(19) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2\,(x^2+3)}$	(20) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$	(21) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$
(22) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$	(23) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\,\cos x}$	(24) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$
(25) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 x}$	(26) $\displaystyle\int \log x\,dx$	(27) $\displaystyle\int x\,\log x\,dx$
(28) $\displaystyle\int x^2\,\operatorname{sen} x\,dx$	(29) $\displaystyle\int x^3\,e^{-2\,x}\,dx$	(30) $\displaystyle\int \cos(2\,x)\,e^{3\,x}\,dx$
(31) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\,\cos^6 x\,dx$	(32) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\,\cos^6 x\,dx$	(33) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2\,x)\,\cos(5\,x)\,dx$
(34) $\displaystyle\int \arctan x\,dx$	(35) $\displaystyle\int \left(\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\,dx$	(36) $\displaystyle\int x^2\,\operatorname{arc\,cos} x\,dx$

9.-

(a) Hallar $\int \tan x\,dx$, $\int \tan^2 x\,dx$. Calcular $\int \tan^n x\,dx$, expresando esta integral en términos de $\int \tan^{n-2} x\,dx$. Como aplicación dar una fórmula para $\int \tan^{10} x\,dx$ y para $\int \tan^{13} x\,dx$.

(b) Hallar $\int \sec^2 x\,dx$, $\int \sec^3 x\,dx$. Calcular $\int \sec^n x\,dx$, expresando esta integral en términos de $\int \sec^{n-2} x\,dx$. Como aplicación dar una fórmula para $\int \sec^{14} x\,dx$ y para $\int \sec^9 x\,dx$.

10.-

(a) Calcular el área comprendida entre las curvas $y = x\,e^{-x}$, $y = x^2\,e^{-x}$ para valores de $x \geq 1$.

(b) Hallar el área limitada por la curva $y = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}$, su asíntota vertical y los ejes de coordenadas.