Cálculo I. Grado en Ingeniería Informática. Curso 2009-2010.

Hoja 1: El número real

1.- Indicar en la recta real todos los valores de x que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $|6x+5| < 1$,

(ii) $|x+1| \leq |x-1|$,

(iii) $x^3 - 2x^2 + 2 < x$,

(iv) $|x^2 - 8| \leq 1$,

(v) $\frac{x^2-2}{x^2+2} < 0$,

(vi) $\frac{x-1}{(x+2)(x-3)} > 0$,

(vii) $|(x+2)(x+3)| < 1$,

(viii) $|x+1| + |x+2| > 1$.

2.- Demostrar las siguientes desigualdades para todo $x, y \in R$:

(i) $|x-y| \leq |x| + |y|$

(ii) $||x| - |y|| \leq |x-y|$.

(iii) Si $x, y > 0$, entonces $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

(iv) Si $x, y > 0$, entonces $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$.

(v) Si $x, y > 0$, entonces $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

3.- Demostrar por inducción

(i) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(ii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2$

(iii) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$

(iv) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

(v) $1 + \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot (k!) = n!$ para todo $n \geq 2$;

(vi) $n! \leq n^n$

(vii) $n! \geq 2^n$, para todo $n \geq 4$;

(viii) *Desigualdad de Bernoulli:* $(1+x)^n \geq 1 + nx$, para todo $x \geq -1$, $n \geq 1$;

(ix) $2^{2n} + 15n - 1$ es múltiplo de 9 para todo $n \in \mathbb{N}$.

4.- Demostrar que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es un múltiplo de 9.

5.- (i) Utilizando la definición de número combinatorio $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, para números naturales $0 \leq k \leq n$, demostrar que

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

(ii) *Fórmula del binomio de Newton:* demostrar que para todo $a, b \in R$, $n \in N$ se cumple

$$\big(a+b\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

6.- *Fórmula de sumación de una progresión geométrica:* demostrar por inducción sobre n que para todo número real $r \neq 1$ se tiene

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

7. - Usa la fórmula del ejercicio anterior para demostrar que

(i) $\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots + \frac{9}{10^n} = 1 - (\frac{1}{10})^{n+1}$,

(ii) $1 + \frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + \ldots + (\frac{1}{3})^{100} \leq \frac{3}{2}$,

(iii) $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 3$.

8.- Demostrar que

$$\text{máx}\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}, \quad y \quad \text{mín}\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

Derivar una fórmula para $\text{máx}\{x, y, z\}$ y $\text{mín}\{x, y, z\}$, utilizando por ejemplo la identidad $\text{máx}\{x, y, z\} = \text{máx}\big\{x, \text{máx}\{y, z\}\big\}$.

9.- Encontrar el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos de números reales, justificando si son máximo o mínimo en algún caso:

(i) $A = \{x : x^3 < 9\}$,

(ii) $B = \{x : x^3 \geq 9\}$,

(iii) $C = \big\{-x : x \in [2, 3)\big\}$,

(iv) $D = \big\{x + \frac{1}{x} : x > 0\big\}$,

(v) $E = \big\{x : \ln(5 - x^2) > 0\big\}$,

(vi) $F = \big\{-\frac{1}{n^2} : n \in N\big\} \bigcup \{0\}$,

(vii) $G = \{(-1)^n - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,

(viii) $H = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq x^2 < 2\}$.

9.- Si $A \subset R$ es acotado superiormente, hallar el ínfimo del conjunto $-A = \{-x : x \in A\}$.