Cálculo I — Curso 2009-2010.

Grado en Ingeniería Informática

Hoja 2: Límites y continuidad de funciones

1.- Utilizando la formulación en términos de ε y δ demostrar:

$$(a)\ \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2},\qquad (b)\ \lim_{x\to 1}\frac{2\,x}{3+x}=\frac{1}{2},\qquad (c)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{|x|}=0,\qquad (d)\ \lim_{x\to 0}x\,\operatorname{sen}\frac{1}{x}=0.$$

2.- Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

(a) Si existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$, entonces existe el límite $\lim_{x\to a} g(x)$.

(b) Si no existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces no existe el límite $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$.

(c) Si $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$, entonces $\lim_{x\to a}|f(x)|=|\ell|$.

3.- Dibujar la gráfica y estudiar la continuidad de las siguientes funciones donde $[x]$ denote la parte entera de x, es decir, el mayor entero menor o igual que x:

$$(a)\ f(x)=[x]\qquad (b)\ f(x)=x-[x]\qquad (c)\ f(x)=\sqrt{x-[x]}$$

$$(d)\ f(x)=[x]+\sqrt{x-[x]}\qquad (e)\ f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]\qquad (f)\ f(x)=\frac{1}{[\frac{1}{x}]}$$

4.- Discutir la existencia de los límites siguientes y calcular su valor si es posible:

$$(a)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-4}\qquad (b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\qquad (c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\tan x)}{x}$$

$$(d)\ \lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x^2}\qquad (e)\ \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\,\operatorname{sen}\frac{1}{x}\qquad (f)\ \lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$$

$$(g)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2\,(3+\operatorname{sen}x)}{(x+\operatorname{sen}x)^2}\qquad (h)\ \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}\qquad (i)\ \lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt{1+x}}{x}$$

$$(j)\ \lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt{x}-x+1}{\sqrt{x}+x-1}\qquad (k)\ \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+4}}{x^2+4\,x+3}\qquad (l)\ \lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x}{x}$$

5.- Encontrar las constantes a y b para las cuales

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-a\,x-b\right)=1.$$

6.- Estudiar los puntos de discontinuidad y establecer en su caso el tipo de la misma para las siguientes funciones:

$$f_1(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, \qquad f_2(x) = \frac{b}{x - b}, \qquad f_3(x) = x\left[\frac{1}{x}\right], \qquad f_4(x) = [\operatorname{sen} x].$$

$$f_5(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in [a-1, a), \\ x + a & \text{si} \quad x \in [a, a+1]. \end{cases} \qquad f_6(x) = \begin{cases} -|\operatorname{sen} x| - 4 & \text{si} \quad x < \pi, \\ |\cos x| - 5 & \text{si} \quad x \geq \pi. \end{cases}$$

$$f_7(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{si} \quad x \leq 0, \\ \operatorname{sen}(\pi x) & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ |x^2 - 5x + 4| & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases} \qquad f_8(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2 + 2^{\tan x}} & \text{si} \quad x \in [0, \pi],\ x \neq \dfrac{\pi}{2}; \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

7.- Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

(a) Si una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ alcanza un máximo y un mínimo en todo intervalo cerrado entonces es continua.

(b) Si una función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ en todo intervalo $[a, b]$ entonces es continua.

(c) Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continua en 0 y tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$, entonces f es continua en $\mathbb{R}$.

8.- Dada una función $f(x)$ tal que $\lim_{x \to 0} x^2 / f(x) = 3$ halla los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x}{f(x)}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(ax)}{f(bx)}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x}{3 + f(x)^2}$.

9.- Supóngase que f es una función continua en $[0, 1]$ y que $f(x)$ está en $[0, 1]$ para todo x. Demostrar que $f(x) = x$ para algún x en $[0, 1]$.