Cálculo I — Curso 2009-2010.
Grado en Ingeniería Informática

Hoja 6: Sucesiones

1.– Estudiar el límite de las siguientes sucesiones

(a)	$\left\{\frac{n^2}{n+2}\right\}$	(b)	$\left\{\frac{n^3}{n^3+2n+1}\right\}$	(c)	$\left\{\frac{n}{n^2-n-4}\right\}$
(d)	$\left\{\frac{\sqrt{2n^2-1}}{n+2}\right\}$	(e)	$\left\{\frac{\sqrt{n^3+2n}+n}{n^2+2}\right\}$	(f)	$\left\{\frac{\sqrt{n+1}+n^2}{\sqrt{n+2}}\right\}$
(g)	$\left\{\frac{(-1)^n n^2}{n^2+2}\right\}$	(h)	$\left\{\frac{n+(-1)^n}{n}\right\}$	(i)	$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$
(j)	$\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^n\right\}$	(k)	$\left\{\frac{2^n}{4^n+1}\right\}$	(l)	$\left\{\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}\right\}$
(m)	$\left\{\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n}\right\}$	(n)	$\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}$	(o)	$\left\{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right\}$

2.– a) Encontrar una expresión de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ como cociente de polinomios en n.

Indicación. $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$

b) Como aplicación calcular el límite de la sucesión

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

3.– Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\ldots+\frac{n+n}{n^2+n}\right).$$

4.– Sea $a>1$. Se define por recurrencia la sucesión $\{a_n\}$ por la relación $a_n=\sqrt{a\cdot a_{n-1}}$, $a_1=\sqrt{a}$. Probar que la sucesión es monótona creciente y acotada. Hallar su límite.

5.– Sea $a_1=1$. Definimos las siguientes sucesiones por recurrencia:

$$\text{(a) } a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n,\quad \text{(b) } a_{n+1}=\frac{1}{n+1}a_n,\quad \text{(c) } a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n,\quad \text{(d) } a_{n+1}=1+\frac{1}{2}a_n.$$

Probar que cada una de ellas es acotada y monótona. Hallar el límite.

Indicación. En algunos casos puede ser interesante escribir de forma explícita la expresión que tiene la sucesión.

6.– Interpretar las expresiones siguientes como el límite de una sucesión definida de forma recurrente:

$$\text{(a)} \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}, \quad \text{(b)} \; 1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}, \quad \text{(c)} \; 1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}.$$

Probar que esos límites existen y calcular su valor numérico.

7.– Demostrar que si $a_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \frac{1}{e}.$$

8.– Calcular, si existen, los límites de las sucesiones que tienen como término general

$$a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{2n^2-3}, \quad b_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2+3}, \quad c_n = a_n + \frac{1}{b_n}.$$

9.– a) Probar por inducción que para $n = 1, 2, \ldots,$

$$2^{n-1} n! \le n^n \le e^{n-1} n!$$

b) Como aplicación probar las siguientes afirmaciones

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n}} = \infty.$$