SUGERENCIAS, RESULTADOS Y SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE PREPARACIÓN

1) Sugerencia: $n \leq 2^n \Rightarrow \dfrac{\sqrt{n}}{2^n} \leq \dfrac{\sqrt{n}}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

2) Solución: Queremos demostrar que $2^n \geq \dfrac{n(n-1)}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Lo hacemos por inducción:

- $n = 3$ $\quad 2^3 \geq \dfrac{3(3-1)}{2} \Leftrightarrow 8 \geq 3$. Sí.

- Suponiendo que es cierto el caso "n" (o para cualquier número $\leq n$), vamos a demostrar el "$n+1$". Es decir, sabemos que

$$2^n \geq \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{y queremos ver que} \quad 2^{n+1} \overset{?}{\geq} \frac{(n+1)(n+1-1)}{2}$$

Como $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$, tenemos que $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Luego es suficiente demostrar que

$$2\,\frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{(n+1)(n+1-1)}{2}.$$

Pero esto es equivalente a

$$2\,\cancel{n}(n-1) \geq (n+1)\cancel{n}.$$

que es lo mismo que

$$2n-2 \geq n+1, \text{ y que } n \geq 3.$$

Como esta era la condición inicial, hemos acabado.

Ahora vamos a calcular $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n}$.

- $2^n \geq \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{n(n-1)/2} = \frac{2}{n-1}$. $\forall n \geq 3$.

Como $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n-1} = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$, deducimos que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

(3) <u>Sugerencia</u>: La primera parte es similar al problema anterior. Después, considera que $2^n - n^2 = n^2\left(\frac{2^n}{n^2} - 1\right)$. Con ésto y la desigualdad es sencillo ver que $\lim_{n\to+\infty}(2^n - n^2) = \infty$.

(4) (i) Voy a demostrar la acotación superior

$$a_n \leq \frac{n^2}{2} + 10n + 10 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(la inferior se haría igual). Por inducción:

- $n = 0$. $1 = a_0 \leq 10$. Sí.
- Suponemos que $a_n \leq \frac{n^2}{2} + 10n + 10$.

Queremos ver que $a_{n+1} \leq \frac{(n+1)^2}{2} + 10(n+1) + 10$

Pero $a_{n+1} = a_n + n + 5$, luego debemos ver que

$$a_n + n + 5 \leq \frac{(n+1)^2}{2} + 10(n+1) + 10$$

que equivale a

$$a_n \leq \frac{n^2+2n+1}{2} + 10n+10+10-n-5$$

$$a_n \leq \frac{n^2}{2} + 10n + 15.$$

Es cierta porque sabemos que $a_n \leq \frac{n^2}{2}+10n+5$.

(4) (ii). Como $\frac{n^2}{2}-10n-5 \leq a_n \leq \frac{n^2}{2}+10n+5$,

~~das~~ entonces

$$\frac{1}{2} - \frac{10}{n} - \frac{5}{n^2} \leq \frac{a_n}{n^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{10}{n} + \frac{5}{n^2}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}-\frac{10}{n}-\frac{5}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{10}{n}+\frac{5}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$, luego

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2}$ existe y es $\frac{1}{2}$.

(5) Sugerencia: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5} = 1-\frac{1}{5}$.

Resultado: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

(6) Sugerencia: $b_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$. En clase demostré que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = \infty$.

(7) Sugerencia: Multiplica $(x+h)(x+h)(x+h)$.

$x'=1$

(8) Sugerencia: $(x^2)'=(x\cdot x)'=x'x+x\cdot x'=2x\cdot x'=2x$

$(x^3)'=(x\cdot x^2)'=x'x^2+x(x^2)'=x^2+x\cdot 2x=$

$=3x^2.$

Así $(x^4)'$ lo puedo calcular sabiendo x' y $(x^3)'$.
Seguir con este razonamiento para todo n.

(9) Solución: De $0\leq e^x-1-x\leq x^2e^x$

deducimos que $x\leq e^x-1\leq x+x^2e^x$, luego

$$\underbrace{1}_{\substack{\downarrow x\to 0\\ 1}} \leq \frac{e^x-1}{x} \leq \underbrace{1+xe^x}_{\substack{\downarrow x\to 0\\ 1}}.$$

Luego $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=1.$

(10) Solución

(i) No es cierta. Toma $f(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x\geq 0.\\ 3 & \text{si } x<0\end{cases}$

Se cumple que $(f(x)-2)(f(x)-3)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, pero
$\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$.

(ii) Sí es cierta. Como $f(x)$ es continua

$$\lim_{x\to 0}(f(x)-2)(f(x)-3)=(f(0)-2)(f(0)-3)$$

Luego $(f(0)-2)(f(0)-3)=0$. Por tanto

$f(0)-2=0$ o $f(0)-3=0$, es decir $f(0)=2$ o $f(0)=3$.

Además, como f es continua, $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$, con lo que

$\lim_{x\to 0} f(x)$ vale 2 o 3.

(11) <u>Solución:</u>

(i) Debemos tratar de introducir la información que tenemos en el problema. Por ejemplo, escribiendo

$$\frac{f(x)-x}{\operatorname{sen} x}=\frac{\frac{f(x)}{x}\cdot x-x}{\operatorname{sen} x}=\frac{x}{\operatorname{sen} x}\left(\frac{f(x)}{x}-1\right).$$

Como $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x}=1$ y $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$, tenemos que

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{\operatorname{sen} x}=1\cdot(1-1)=0$. Luego es cierta la afirmación.

(ii) No es cierta. Tomemos $f(x)=x+x^2$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1 \quad \text{pero} \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=1.$$

(12) <u>Solución:</u> Escribiendo $f(x)-1-3x=\frac{f(x)-1-3x}{x^2}\cdot x^2$,

deducimos que $\lim_{x\to 0} f(x)-1-3x=0\cdot 0=0$, luego

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} 1+3x=1$. Si tomamos $f(0)\neq 1$, entonces f no es continua, luego tampoco derivable.

En cambio, si f es continua en $0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$.

~~luego~~ Para ver si es derivable, tendríamos que

comprobar que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x}$ existe.

Pero $\frac{f(x)-1-3x}{x} = \frac{f(x)-1-3x}{x^2} \cdot x$, luego

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1-3x}{x} = 0 \cdot 0 \text{, luego}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} - 3 = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = 3 \Rightarrow \text{derivable en } 0$$

(13) Solución: Sea $f(x) = x^5+3x-1 \xrightarrow{} f$ continua. Como $f(0) = -1$ y $f(1) = 1+3-1 = 3$, por el Teorema del valor intermedio existe $0<c<1$ tal que $f(c)=0$. Luego $c^5+3c-1=0$.

(14) Solución: Las tres se resuelven de la misma forma, así que lo voy a hacer con

$$e^{x^2+5x} = 5+x.$$

Tomamos $f(x) = e^{x^2+5x}-(5+x)$, que es continua.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1-5 = -4 \\ f(1) = e^6-6 > 2^6-6>0. \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{Teorema valor intermedio}]{} \text{existe } 0<c<1,\ f(c)=0$$

$$\Downarrow$$

$$e^{c^2+5c} = 5+c.$$

(15) Voy a hacerlo con $x^3+x-1=0$ y calculando la solución con una precisión de una cifra decimal, que si no queda muy largo.

Tomo $f(x)=x^3+x-1$ continua.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-1 \\ f(1)=1 \end{array}\right\} \underset{TVI}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} \exists\, c,\ 0<c<1 \\ c^3+c-1=0. \end{array}$$

Por ahora sabemos que $c=0,\ldots$. Para calcular la primera cifra decimal, calculamos

$$f\left(\frac{1+0}{2}\right)=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2}-1<0. \overset{f(1)>0}{\Longrightarrow} \frac{1}{2}<c<1.$$

Ahora

$$f\left(\frac{1/2+1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^3+\frac{3}{4}-1=\frac{3^3}{4^3}-\frac{1}{4}=\frac{3^3-4^2}{4^3}>0 \overset{f(\frac{1}{2})<0}{\Longrightarrow} \frac{1}{2}<c<\frac{3}{4}$$

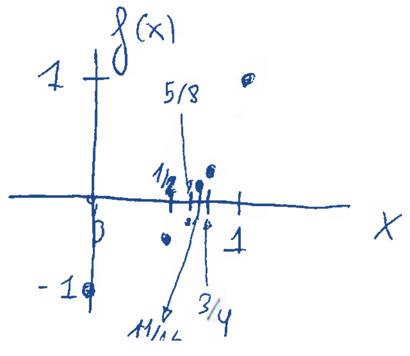
$$f\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{2}\right)=f\left(\frac{5}{8}\right)=\left(\frac{5}{8}\right)^3+\frac{5}{8}-1=\frac{5^3}{8^3}-\frac{3}{8}=\frac{5^3-3.8^2}{8^3}=\frac{125-3.64}{8^3}<0$$

$$\Downarrow f(\tfrac{3}{4})>0$$

$$\frac{5}{8}<c<\frac{3}{4}$$

$$f\left(\frac{\frac{5}{8}+\frac{3}{4}}{2}\right)=f\left(\frac{11}{16}\right)=\left(\frac{11}{16}\right)^3+\frac{11}{16}-1>0 \Longrightarrow \frac{5}{8}<c<\frac{11}{16}$$

Pero $0{,}6<\frac{5}{8}<c<\frac{11}{16}<0{,}7$, luego $c=0{,}6\ldots$



(16) ~~Solución~~ de $|x^2-5x+6| = f(x)$.

~~Para estudi~~

$f(x)$ es continua porque x^2-5x+6 es continua y $|x|$ es continua.

Para estudiar su derivabilidad, debemos ver cuándo se anula lo de dentro del valor absoluto (porque ahí cambia la definición de la función).

$$x^2-5x+6=0 \Longleftrightarrow \begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}$$

~~Luego x^2-5x+6~~

Como $f(0) = 6 > 0$

$$f(2,5) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\cdot\frac{5}{2}+6 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6 = 6 - \frac{25}{4} = \frac{-1}{4} < 0$$

$$f(4) = 16-20+6 = 2 > 0$$

$\Rightarrow$ $x^2-5x+6 > 0$ en $x<2$, $x>3$

$x^2-5x+6<0$ en $2<x<3$

luego

$$f(x) = \begin{cases} x^2-5x+6 & \text{si } x<2 \text{ o } x>3. \\ -(x^2-5x+6) & \text{si } 2\leq x\leq 3. \end{cases}$$

$f(x)$ es derivable si $x\neq 2$, $x\neq 3$.

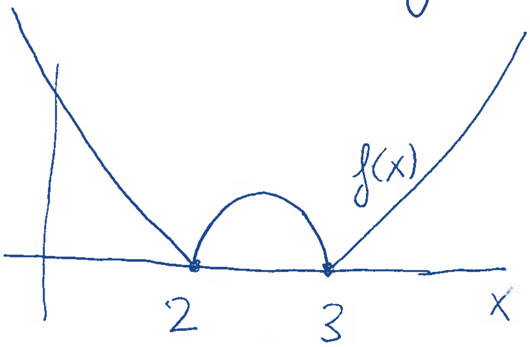
Como $g(x) = x^2-5x+6$ es derivable en todo punto

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = g'(2) = 2\cdot 2-5 = -1$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -g'(2) = 1, \text{ luego}$$

$$\nexists \; f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}.$$

Luego f no es derivable en 3, y lo mismo ocurre en 2.



Nota: Una manera más sencilla de hacerlo es ver que $x^2-5x+6=(x-2)(x-3) \Rightarrow f(x)=|x-2|\,|x-3|$.
Como $|x|$ no es derivable en 0, $|x-2|\,|x-3|$ no va a ser derivable ni en 2 ni en 3.

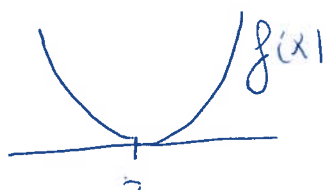
• Solución de $f(x)=|x^2-4x+4|$.

$x^2-4x+4=(x-2)^2$, luego

$$f(x)=|(x-2)^2| = (x-2)^2$$

porque lo de dentro no es nunca negativo.

$\Rightarrow$ $f(x)$ es un polinomio, luego es derivable en todo punto.



(16) <u>Solución</u> de $f(x)=e^{|x|^3+x}\operatorname{sen}x$.

$$f(x)=\begin{cases} e^{x^3+x}\operatorname{sen}x & \text{si } x\geq 0 \\ e^{-x^3+x}\operatorname{sen}x & \text{si } x<0. \end{cases}$$

- Si $x>0$, $f(x)=e^{x^3+x}\operatorname{sen}x$, luego en esa zona f es continua y derivable.
- Si $x<0$, $f(x)=e^{-x^3+x}\operatorname{sen}x$, luego en esta zona f es continua y derivable.
- Sólo queda el punto $x=0$. Hay que ver si

$\boxed{\text{Es continua porque } \lim_{x\to 0^+} e^{x^3+x}\operatorname{sen}x=\lim_{x\to 0^-} e^{-x^3+x}\operatorname{sen}x=0}$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$ existe. Vamos a verlo con los límites laterales

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}, \quad f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{e^{h^3+h}\operatorname{sen}h-0}{h}=\text{derivada de } e^{x^3+x}\operatorname{sen}x \text{ en } x=0$$

~~Luego~~ Como $(e^{x^3+x}\operatorname{sen}x)'=(3x^2+1)e^{x^3+x}\operatorname{sen}x+e^{x^3+x}\cos x$,

$$f'_+(0)=(3\cdot 0^2+1)e^0\operatorname{sen}0+e^0\cos 0=1.$$

De la misma forma, $f'_-(0)$ es $(e^{-x^3+x}\operatorname{sen} x)' =$

$= (-3x^2+1)e^{-x^3+x}\operatorname{sen} x + e^{-x^3+x}\cos x$ en $x=0$, luego

$f'(0) = (-3.0^2+1)\, e^0 \operatorname{sen} 0 + e^0 \cos 0 = 0.$

Como $f'_+(0) = 1 = f'_-(0) \Rightarrow f$ es derivable a 0.

Luego f es derivable en todo punto.

17 Solución

- $e^{\frac{1}{x}}$. No puedo porque $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$.
- $e^{-\frac{1}{x}}$. No puedo porque $\lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = \infty$.
- $e^{-\frac{1}{x^2}}$. Como $\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$, si defino

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad f \text{ es continua.}$$

- $e^{-\frac{1}{|x|}}$. Como $\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{|x|}} = 0$, definiendo la función como 0 en $x=0$ va a ser continua.
- $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$. No existe $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, porque ~~es lo mismo~~ ~~que lim~~ no existe $\lim_{t\to \infty} \operatorname{sen} t$, debido a que

$\operatorname{sen} t = 1$ para $t = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+2\pi, \frac{\pi}{2}+4\pi, \dots$

$\operatorname{sen} t = 0$ para $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots$

luego no podemos definirla en $x=0$ para que sea continua.

• $sen(\pi[\frac{1}{x}])$. Como $[\frac{1}{x}]$ es un número entero, entonces

$sen(\pi[\frac{1}{x}])=0$. Portanto, puedo definir $f(0)=0$ y

f es continua.

• $sen(\pi|\frac{1}{x}|)$. No puedo, por las mismas razones que

para $sen\frac{1}{x}$.

Derivabilidad: Debemos estudiarla para las funciones

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$h(x)=0$.

• $h(x)$ está claro que es derivable.

• Para $g(x)$, debemos comprobar si existe

$$g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{|h|}}}{h}.$$

Calculemos $\lim_{h\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{|h|}}}{h}$ y $\lim_{h\to 0^-}\frac{e^{-\frac{1}{|h|}}}{h}$.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{|h|}}}{h} \underset{h=1/t}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-t}}{1/t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t}.$$

Ahora tenemos varias opciones. Una es usar el problema 2. Ahí hemos visto que $2^n \geq \frac{n(n-1)}{2}$ $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 3$.

Por tanto $e^t \geq 2^t \geq 2^{[t]} \geq \frac{[t]([t]-1)}{2} \geq \frac{(t-1)(t-2)}{2}$

luego $\underset{\downarrow t\to+\infty \atop 0}{0} \leq \frac{t}{e^t} \leq \underset{\downarrow t\to+\infty \atop 0}{\frac{t}{(t-1)(t-2)/2}}$ y por tanto

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = 0.$$

Otra opción sería usar L'Hopital:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^t} = 0.$$

En cualquier caso, vemos que $\lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{|h|}}}{h} = 0.$

Igualmente, podemos ver que $\lim_{h\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{|h|}}}{h} = 0$, luego $g(x)$ es derivable.

- Para $f(x)$ se haría igual, y también queda derivable.

(18) (i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{5-2\cos\frac{1}{x}}{4-7\cos\frac{1}{x}} \underset{x=\frac{1}{t}}{=} \lim_{t\to+\infty} \dfrac{5-2\cos t}{4-7\cos t}$.

No existe el límite porque

$\cos t = 0$ en $t = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\pi, \frac{\pi}{2}+2\pi, \dots$

$\cos t = 1$ en $t = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$

y entonces

$\dfrac{5-2\cos t}{4-7\cos t} = \dfrac{5}{4}$ en $t = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\pi, \frac{\pi}{2}+2\pi, \dots$

$\dfrac{5-2\cos t}{4-7\cos t} = \dfrac{5-2}{4-7} = -1$ en $t = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$

$\frac{5}{4} \neq -1$.

(ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{5-5\left(\cos\frac{1}{x^3}\right)^2}{\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x^3}\right)^2(2+x^2)}$. En principio, ni el numerador ni el denominador tienden a un límite, pero como $1-(\cos t)^2 = (\operatorname{sen} t)^2$, tenemos que

$\dfrac{5-5\left(\cos\frac{1}{x^3}\right)^2}{\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x^3}\right)^2(2+x^2)} = \dfrac{5}{2+x^2}$, luego el límite es

igual a $\lim_{x\to 0} \dfrac{5}{2+x^2} = \dfrac{5}{2}$.

* ESTE APARTADO NO ESTABA BIEN PROPUESTO PORQUE

DEBERÍA HABER ESPECIFICADO LA DEFINICIÓN CUANDO $\operatorname{sen}\frac{1}{x^3}=0$.

(iii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^2}{x^2\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^2+x^4} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^2}{\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^2+x^2}$

DIVIDIENDO POR x^2.

Como $\operatorname{sen}\frac{1}{x}=0$ para infinitos puntos acercadose a cero, y lo mismo para $\operatorname{sen}\frac{1}{x}=1$, entonces

$\dfrac{\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^2}{\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^2+x^2} = \dfrac{0}{0+x^2} \to 0$ para algunos puntos

$\dfrac{\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^2}{\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^2+x^2} = \dfrac{1^2}{1^2+x^2} \to 1$ para otros.

Luego el límite no existe.

(iv) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}x+2x^2\cos\frac{1}{x}}{2x+3x^2}$.

Cuando $x\to 0$, x es mucho mayor que x^2, y $\operatorname{sen}x$ es como x porque $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$.

Por tanto, en el numerador va a "mandar" $\operatorname{sen}x$

y en el denominador x. Dividiendo por x ~~queda~~ en ambos queda

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + 2x^2 \cos\frac{1}{x}}{2x+3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x} + 2x\cos\frac{1}{x}}{2+3x}.$$

$\lim_{x\to 0} 2x\cos\frac{1}{x} = 0$ porque $\underset{\downarrow\atop 0}{-2x} \leq 2x\cos\frac{1}{x} \leq \underset{\downarrow\atop 0}{2x}$

y $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Por tanto, el límite queda

$$\frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

(v) Parecido al (iii). El límite no existe.

(vi) $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|+2x^2\operatorname{sen}(1/x)}{3|x|+4x^2\operatorname{sen}(1/x)}$.

Parecido al (iv). Dividimos por $|x|$ en numerador y denominador:

$$\frac{|x|+2x^2\operatorname{sen}(1/x)}{3|x|+4x^2\operatorname{sen}(1/x)} = \frac{1+2\frac{x^2}{|x|}\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{3+4\frac{x^2}{|x|}\operatorname{sen}\frac{1}{x}} = \frac{1+2|x|\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{3+4|x|\operatorname{sen}\frac{1}{x}}.$$

$\lim_{x\to 0} |x|\operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$, luego el límite queda $\frac{1+0.2}{3+0.4} = \frac{1}{3}$.

(vii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x^2)^{12}-(1+x^3)^{17}}{(1+2x^2)^{15}-(1+x^2)^{14}}$.

También se podría hacer por L'Hopital.

~~Por la fórmula~~

En principio, es de la forma $\frac{0}{0}$.

Por la fórmula del binomio de Newton:

tenemos que

$$(1+x^2)^{12} = 1+12x^2+\frac{12.11}{2}.(x^2)^2+\frac{12.11.10}{3.2}(x^2)^3+\cdots$$

luego $(1+x^2)^{12} = 1+12x^2+x^2 g(x)$

con $\lim_{x\to 0} g(x)=0$.

De la misma forma

$$(1+2x^2)^{15} = 1+15.(2x^2)+x^2 g_1(x)$$

$$(1+x^2)^{14} = 1+14x^2+x^2 g_2(x) \qquad \lim_{x\to 0} g_i(x)=0$$

$$(1+x^3)^{17} = 1+17.x^3+x^3 g_3(x).$$

Luego $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x^2)^{12}-(1+x^3)^{17}}{(1+2x^2)^{15}-(1+x^2)^{14}} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\cancel{1}+12x^2-\cancel{1}-x^3+x^2g(x)-x^3g_3(x)}{1+30x^2-1-14x^2+x^2g_1(x)-x^2g_2(x)} =$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{12-x+g(x)-xg_3(x)}{30-14+g_1(x)-g_2(x)} = \dfrac{12}{30-14} = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$.

dividido por x^2 en numerador y denominador