Solución del Exámen de Prueba 1 (Esquema)

1. *a*) Falso. Toma $f(x) = -x$ (o cualquier función decreciente).

   b) Cierto. Como $f(x) \leq f(2)$ para $0 \leq x \leq 2$, entonces

   $$\int_0^2 f(x)\,dx \leq \int_0^2 f(2) = 2f(2)$$

   .

   c) Cierto. La función

   $$f(x) = \int_0^x \frac{t}{e^{t/2}}\,dt$$

   satisface $f'(x) = x/e^{x/2}$, luego también lo que se pide.

   d) Cierto. Por la definición de derivada

   $$\begin{aligned}
   (\operatorname{sen} x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\
   &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} \\
   &= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} + \operatorname{sen} x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \\
   &= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} 0}{h} + \operatorname{sen} x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - \cos 0}{h} \\
   &= \cos x \cdot 1 + \operatorname{sen} x \cdot 0.
   \end{aligned}$$

   el último paso porque los coeficientes de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ son las definiciones de la derivada en 0 del seno y el coseno respectivamente.

2. Continua en todo punto. Derivable en todo punto excepto en cero. Creciente en $(-\infty, 0)$ y $(1, \infty)$. Decreciente en $(0, 1)$. Mínimo local en $x = 1$. Máximo local en $x = 0$. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. No tiene máximos ni mínimos absolutos.

3. *a*)
$$\int (x^3+3x)e^{2x^2+1}\,dx = \frac{2x^2+5}{8}e^{2x^2+1}+c.$$
Se puede hacer con el cambio $t = x^2$ y luego por partes.

b) Con el cambio $x/2 = \operatorname{sen} t$ podemos ver que
$$\int 3\sqrt{1-x^2/4}\,dx = 3\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\operatorname{sen}(2\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{2})+c,$$
luego
$$\int_{-1}^{1} 3\sqrt{1-x^2/4}\,dx = \pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

c) En este apartado también debería haber dicho que $\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$ (aunque también lo podríais calcular vosotros). $p(x) = 3-\frac{3}{8}x^2$, luego
$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = 5{,}75.$$
Como
$$\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2} = 3{,}14159\ldots+2{,}5980\ldots = 5{,}739\ldots$$
luego el error en la aprxomicación es de
$$5{,}75-5{,}739\ldots = 0{,}01\ldots$$

4. *a*) Por el criterio de comparación, la convergencia de la serie es la misma que la de
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\log n}},$$
que a su vez converge si y sólo si lo hace la integral
$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{\log x}}\,dx = \lim_{A\to\infty}\int_2^{A}\frac{1}{x\sqrt{\log x}}\,dx.$$
Con el cambio $t = \log x$ vemos que
$$\lim_{A\to\infty}\int_2^{A}\frac{1}{x\sqrt{\log x}}\,dx = \lim_{A\to\infty} 2\sqrt{\log A}-2\sqrt{\log 2} = \infty.$$
luego la serie inicial diverge.

b) Como

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1+\frac{1}{n+1}}=\frac{1+1/n-1-1/(n+1)}{\sqrt{1+1/n}+\sqrt{1+1/(n+1)}}$$

y

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)},$$

por el criterio de comparación, la convergencia de la serie equivale a la de

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

A su vez, esa serie converge porque

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=1,$$

luego la serie inicial también converge.