

# Examen Parcial - Cálculo I - Grupo 16 - Informática - 10 de noviembre de 2009

Nombre y Apellidos	
DNI o NIE	

No se permite el uso de apuntes, calculadoras, teléfonos móviles, ordenadores ni ningún otro tipo de asistencia.

## 1 (10 puntos)

Sea  $a_0 = a_1 = 2$  y  $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 5$  para todo número natural  $n \geq 2$ .

- Demuestra que  $a_n \geq 2^n$  para todo  $n \geq 0$ .
- Usa el apartado anterior y la identidad  $1 + 1/2 + (1/2)^2 + \dots + (1/2)^n = 2 - (1/2)^n$  para concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

existe y está en el intervalo  $[1, 2]$ .

## 2 (10 puntos)

Calcula los siguientes límites, en caso de que existan:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin(x^2) + x - \sqrt{x^2 + x + 1} \right)$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 2x)^2 - \cos^2 x + x^2 \sin \frac{1}{x^2}}{x + x^2 \sin \frac{1}{x^2}}$ .

## 3 (10 puntos)

Sea  $g(x) = |3x^2 - x^3| - 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

- Decide si  $g(x)$  se anula para algún  $x \in \mathbb{R}$ . Realiza un esbozo de la gráfica de  $g$  (no es necesario calcular máximos y mínimos).
- Estudia su continuidad y derivabilidad.

## 4 (10 puntos)

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua y satisfaciendo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sin x}{x} = 0.$$

¿Son siempre ciertas las siguientes afirmaciones? Justifica tus respuestas.

- $f$  es derivable en el punto 1.
- $f$  es derivable en el punto 0.