EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO I DE PRIMERO DE FISICAS

30-1-95 MODELO NUMERO 2

Apellidos: .... Nombre: ....
D.N.I.: .... Grupo: ....

1). Hallar los valores de a, b tales que la siguiente función sea continua y derivable en $x = 0$:

$$f(x) = x^3 + 1 \quad \text{si } x \geq 0, \qquad f(x) = ax + b \quad \text{si } x < 0.$$

A) $a = b = 2$. B) $a = 0; b = 1$. C) $a = 1, b = 2$. D) $a = b = 1$. E) $a = 0; b = -1$.

2). Si f es derivable en 0 y $f(2xe^x) = sen(x)$, hallar $(f \circ f)'(0)$.
A) 2 . B) 8 . C) 1/4 . D) 4 . E) 1/8 .

3). Sea L definido por

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^2} \text{sen} t \, dt + \text{sen}^2 x}{\int_{x/a}^{0} t \cos t \, dt}.$$

A) L no existe. B) $L = -2a$. C) $L = 2/a$. D) $L = 0$. E) $L = -2a^2$.

4). Hallar $h'(0)$, sabiendo que $h(0) = 0$, y que $x = \int_0^{h(x)} \frac{\cos 3t}{1+t} dt$.
A) 0. B) 3. C) 1/3. D) 1. E) 1/9.

5). Sea $f(x) = x + x^3 + sen(x)$. Entonces $(f^{-1})'(0)$ es :
A) No existe. B) 0. C) 1/4. D) 4. E) 1/2.

6). El menor valor de $f(x) = x^3(2 - x)$ en el intervalo $[-1, 1]$ es:
A) -3. B) -2. C) -6. D) -3/4 . E) -4.

7). Sea $I = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^3 x \cos^3 x \, dx$.
A) $I = 0$. B) $I = 1/12$. C) $I = 1/4$. D) $I = -1/6$. E) $I = 2\pi$.

8). El coeficiente de x^3 en el polinomio de Taylor de grado 9 alrededor de $x = 0$ para $f(x) = 4x \cos(x/2)$ es:
A) 1. B) 1/2. C) -1/3. D) -1/2. E) 0.

9). Sea una función $f(x) \geq 0$ tal que su máximo valor en $\mathbf{R}$ es 2. Entonces el máximo valor en $\mathbf{R}$ de $g(x) = \frac{f(x/2)^2}{2}$ es:
A) 1/4. B) 4. C) 8. D) 12. E) 2.

10). Sea $A = \{x \in [0, \infty) / x^2 - |x - 1| \geq 0\}$.
A) No existe sup A; inf $A = 0$. B) sup $A = \sqrt{5}$; no existe inf A. C) No existe sup A; no existe inf A .
D) No existe sup A, inf $A = (\sqrt{5} - 1)/2$. E) sup $A = (\sqrt{5} - 1)/2$, inf $A = 0$.

EXAMEN FINAL DE ANALISIS MATEMATICO I DE PRIMERO DE FISICAS

MODELO 3

1). Hallar $\lim_{R\to\infty} \int_2^R \frac{2}{x^2-1}dx$.
A) $\ln 3$. B) $\ln 2$. C) $\ln\sqrt{2}$. D) $3\ln\sqrt{2}$. E) $\ln\sqrt{3}$.

2). Sea $F(x) = \int_1^{e^x} e^{y^2}dy$. Hallar $(F^{-1})'(0)$.
A) $1/e$. B) 0. C) e. D) $1/e^2$. E) No existe.

3). Hallar $f(0)$ sabiendo que f es continua y que $\int_0^x tf(t)dt = \pi - \cos(2x)$.
A) 4. B) 1. C) -1. D) 2. E) 0.

4). Elegir la identidad correcta:
A) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-cosx} = 2$. B) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = 1$. C) $\lim_{x\to 0} \frac{sen3x}{sen5x} = 5/3$. D) $\lim_{x\to 0} \frac{sen^2x}{x^3} = 1$.
E) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \infty$.

5). Calcular el coeficiente del término x^4 en el desarrollo en serie de Taylor en x=0 de la función $f(x) = \cos^2 x + \cos(x^2)$.
A) 1/4. B) -1/6. C) -1/2. D) 1/3. E) -1.

6). Hallar el volumen de la región limitada por $z = 1 - x^2 - y^2$ entre $z = -2$ y $z = 1$.
A) $4\pi + 1$ B) 5π C) $9\pi/2$ D) $7\pi/2$ E) $7\pi/2 - 1$

7). Sea el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (2xz + y\cos(xy), -2yz + x\cos(xy), x^2 - y^2)$. Hallar una función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = F$ y calcular el valor de $f(0,1,1) - f(0,0,0)$.
A) 1 B) 2 C) -2 D) -1 E) 0

8). Dadas las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$$

decidir cual de las siguientes afirmaciones es correcta:
A) La primera diverge y la segunda converge.
B) Ambas convergen absolutamente.
C) Ambas series divergen.
D) La primera diverge y la segunda no converge absolutamente.
E) La primera converge absolutamente y la segunda condicionalmente.

9). Sea $g(x) = f(x^2 + x, f(x,x))$. Sabiendo que $\nabla f(0,0) = (1,2)$ y que $f(0,0) = 0$, calcular $g'(0)$.
A) 6 B) 7 C) 0 D) 4 E) -4

10). Se da la superficie parametrizada $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$,
$\Phi : D = \{(\theta, r) / -\pi < \theta < \pi, 0 < r < 5\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Se pide indicar cuál de las siguientes afirmaciones es cierta
A) El vector $(1,1,3)$ es normal a la superficie en el punto $(\theta, r) = (\pi/2, 2)$.
B) El plano tangente a la superficie en el punto $(\theta, r) = (\pi/2, 2)$ es $x + 2z + \pi = 0$.
C) El plano tangente a la superficie en el punto $(\theta, r) = (0, 2)$ es $y + z + \pi = 0$.
D) El vector $(1,0,2)$ es normal a la superficie en el punto $(\theta, r) = (\pi/2, 2)$.
E) El plano tangente a la superficie en el punto $(\theta, r) = (0,2)$ es $7x - y + z + \pi = 0$.

ANÁLISIS MATEMÁTICO I
Primer Curso de Ingeniería Informática
Test del día 11/12/2001

MODELO 2

1. Sea $g : [-1, 3] \to \mathbf{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} Ax + \cos x & \text{si } -1 \le x \le 0 \\ C + 2Bx + x^2 & \text{si } 0 < x \le 3. \end{cases}$$

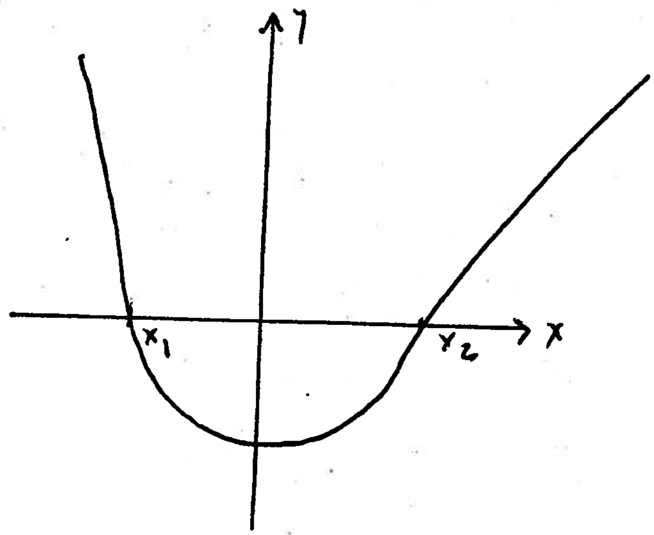
   Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

   A) Si $A = B = C = 1$, g es continua en $[-1, 3]$ pero no derivable en (-1,3).
   B) Si $A = B = C = 1$, g es derivable en (-1, 3).
   C) Si $C = 0, A = B = 1$, g es derivable en (-1,3).
   D) Si $A = 2, B = C = 1$, g es continua en $[-1, 3]$ pero no derivable en (-1,3).

2. Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida como $f(x) = \max(x^3, x^5)$. Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

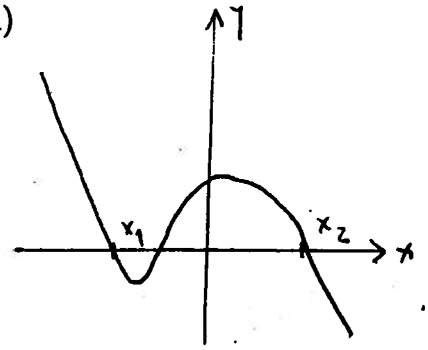
   A) f es derivable para todo x.
   B) f es impar.
   C) $f\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{f(x)}$ para todo $x \neq 0$.
   D) f no es derivable en -1, 0 y 1.

3. Consideremos una función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivable cuya derivada $y = f'(x)$ tiene la gráfica

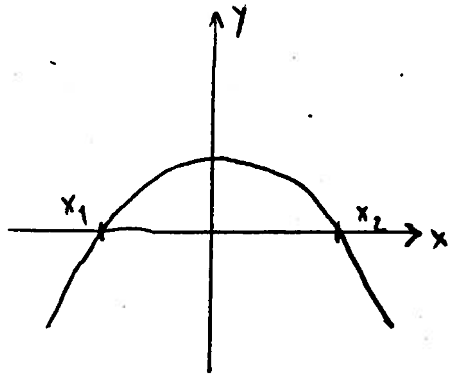


Entonces, la gráfica de $f(x)$ es de la forma

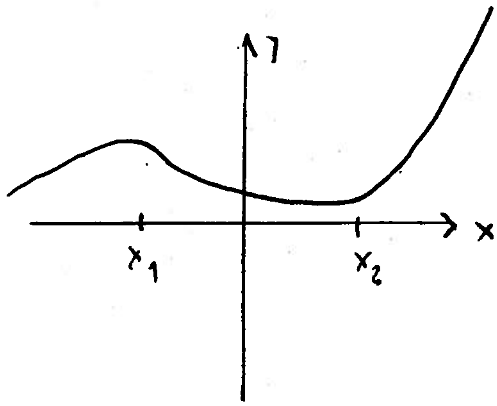
A)



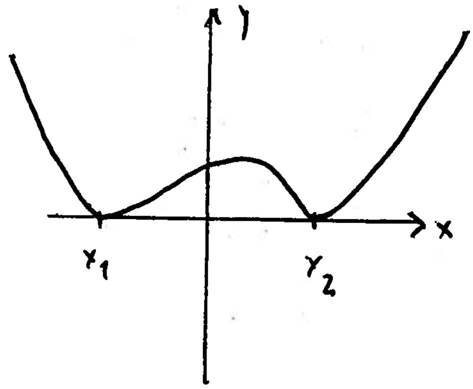
B)



C)



D)



4. Sea la función $f : [1, 4] \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$. Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

A) f tiene un máximo global en $x = 4$ y un mínimo local en $x = 1$;
B) f tiene un máximo local en $x = 3$ y un mínimo global en $x = 2$;
C) f tiene un máximo global en $x = 4$ y un mínimo global en $x = 2$;
D) f tiene un máximo global en $x = 2$ y un mínimo local en $x = 3$.

ANALISIS MATEMATICO I

Primer Curso de Ingeniería Informática - 11 de Septiembre del 2002

MODELO 3

Orientaciones generales:

- El examen dura tres horas. No se permite el uso de apuntes ni de calculadoras.
- Poner el nombre, dos apellidos, el DNI, el número de modelo y el número de grupo.
- Como norma no se permite salir del aula hasta entregado el examen, y nunca antes de pasado media hora desde el inicio del examen.
- Cualquier problema vale 1.25 puntos.
- Las respuestas equivocadas descuentan 0.25 puntos.

1. La integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos x \, dx$$

vale

A) $\frac{\pi^3}{8} - 3\pi + 6$; B) $\frac{\pi^3}{8} + 3\pi + 6$; C) $\frac{\pi^3}{8} + 4\pi + 6$; D) $\frac{\pi^3}{16} - 3\pi + 2$.

2. Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2 + 2\cos x$. Dígase cual de las siguientes afirmaciones es cierta

A) $f(x) \geq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$;

B) Los puntos $x = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ son puntos de inflexión;

C) f tiene un máximo global en $x = 0$;

D) $\lim_{x\to+\infty} \frac{xf''(x)}{f'(x)} = 1$.

3. El límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \operatorname{arctg}\sqrt{t}\, dt$$

vale

A) π; B) $-\frac{\pi}{2}$; C) $\frac{3\pi}{2}$; D) $\frac{\pi}{2}$.

4. Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos kx}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ 3 - 2\sqrt{2} & \text{si } x = 0 \\ \frac{2(x+\operatorname{sen} kx)^2}{x^2(2+\operatorname{sen} kx)} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Dígase para qué valores de k es f continua en todo $\mathbb{R}$.
A) $-2-\sqrt{2}$; B) $-2+\sqrt{2}, -2-\sqrt{2}$; C) $-2+\sqrt{2}$; D) $-1, 1$.

5. La integral

$$\int_0^1 \frac{x^3+x^2+9x+7}{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}\,dx$$

vale
A) $\ln 3+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$; B) $\ln\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\pi$; C) $\ln 3-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}$; D) $\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}$.

6. El área comprendida por las curvas $y=\frac{x}{1+x^2}$ e $y=\frac{1}{2}|x|$ vale
A) $\frac{1}{2}(\ln 2-\frac{1}{2})$; B) $\ln 2+\frac{1}{2}$; C) $\frac{1}{2}(\ln 2+\frac{1}{2})$; D) $\ln 2-\frac{1}{2}$.

b **7.** Sea la función $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{ax^2+bx+c}$, donde a, b, c son unas constantes, $a\neq 0$.
A) La función f no puede tener puntos de inflexión;
B) La función f tiene dos puntos de inflexión si $a<0$ y no tiene puntos de inflexión si $a>0$;
C) La función f siempre tiene un mínimo y un máximo locales;
D) f puede tener más de dos puntos de inflexión.

8. Se consideran la serie y la integral impropia siguientes

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lg n}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad\qquad \int_1^{\infty}\left(\frac{\lg x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

(lg designa el logaritmo neperiano). Dígase cual de las siguientes afirmaciones es cierta
A) La serie diverge y la integral converge;
B) La serie converge y la integral diverge;
C) Ambas convergen;
D) Ambas divergen.

INGENIERÍA INFORMÁTICA

Análisis Matemático I.

3 de septiembre de 2003

Modelo 4

Orientaciones generales:

El examen dura tres horas. No se permite el uso de apuntes ni de calculadoras.

Como norma no se permite salir del aula hasta entregado el examen.

Todo problema vale 1'25 puntos. Las respuestas equivocadas descuentan 0'25.

Problema 1. La integral

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x}{1 + 2\operatorname{tg} x}\, dx$$

vale A) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln 3$. B) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln 3$. C) $1 + \frac{1}{2}\ln 3$. D) $1 - \frac{1}{2}\ln 3$.

Problema 2. Sea la función $g : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = \operatorname{sen} x$. Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

A) La función inversa g^{-1} no está bien definida.

B) g^{-1} está bien definida pero no es derivable en $[0, \frac{1}{2}]$.

C) g^{-1} es derivable en $\frac{1}{2}$ y $(g^{-1})'(\frac{1}{2}) = 2$.

D) g^{-1} es derivable en $\frac{1}{2}$ y $(g^{-1})'(\frac{1}{2}) = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Problema 3. El límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\, dt\right)^2}{\int_0^x t e^{t^2}\, dt}$$

vale A) 0. B) $+\infty$. C) 2. D) 1.

Problema 4. Se considera la función $f(x) = \sqrt{x^2+4} + \sqrt{25 - x^2}$. Dígase cuál de las afirmaciones siguientes es cierta:

A) El mínimo de f sobre su dominio de definición es igual a $\sqrt{29}$.

B) La función f no alcanza ni mínimo ni máximo sobre su dominio de definición.

C) El mínimo de f sobre su dominio de definición es igual a $\sqrt{74}$.

D) El mínimo de f sobre su dominio de definición es igual a 7.

Problema 5. Se da la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^n}{n(1+\frac{1}{n})^n}$$

donde $r > 0$ es un parámetro.

Dígase cuál de las afirmaciones siguientes es cierta para la serie:

A) Converge absolutamente para todo $r > 0$.

B) Converge, pero no absolutamente para todo $r < 1$.

C) Diverge para todo $r > 0$.

D) Converge absolutamente para todo $r < 1$.

$\boxed{\textbf{Problema 6.}}$ Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |x^2 - A| - |x^4 - A^2|,$$

donde $A > 0$ es un parámetro. Dígase cuál de las afirmaciones siguientes es cierta:

A) f tiene 2 puntos de discontinuidad para todo $A > 0$.

B) f no es derivable en todo $\mathbb{R}$ para ningún $A > 0$.

C) f es derivable en todo $\mathbb{R}$ sólo para $A = \frac{3}{2}$.

D) f es derivable en todo $\mathbb{R}$ sólo para $A = \frac{1}{2}$.

Problema 7. La integral $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ vale

A) $\dfrac{2}{3}$. B) $2\sqrt{3}$. C) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. D) $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

Problema 8. Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta: el límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x \log x - x + 1}{(x-1)^2}$$

vale A) $\frac{1}{2}$. B) $\frac{3}{2}$. C) 2. D) 1.

INGENIERÍA INFORMÁTICA - Análisis Matemático I

Examen Parcial - 27 de noviembre de 2003 - MODELO 3

Orientaciones generales:

El examen dura una hora y media. No se permite el uso de apuntes ni de calculadoras.
Como norma no se permite salir del aula hasta entregado el examen.
Todo problema vale 2 puntos. Las respuestas equivocadas descuentan 0,50.

---

1. Dado $a > 0$ se pide hallar

$$\lim_{x\to a+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

El resultado es

[A.-] $\frac{1}{\sqrt{a}}$. [B.-] $\frac{1}{2\sqrt{a}}$. [C.-] $\frac{1}{\sqrt{2a}}$. [D.-] $\frac{1}{2a}$.

2. La función $f(x) = x^4 + 6x^3 + 42x^2 + 14x + 7$

[A.-] Tiene tres puntos en los que la derivada se anula. Dos son de máximo y otro de mínimo.

[B.-] Tiene tres puntos en los que la derivada se anula. Dos son de mínimo y otro de máximo.

[C.-] Tiene un sólo punto en el que la derivada se anula, que es de máximo.

[D.-] Tiene un sólo punto en el que la derivada se anula, que es de mínimo.

3. La función $f : [-1, 2] \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2|x-1| + 1 & \text{si } x \in (0, 2] \\ 3x + 3 & \text{si } x \in [-1, 0] \end{cases}$$

[A.-] Alcanza un mínimo global en $x = 1$ y tiene un máximo local en $x = 2$.

[B.-] Tiene un máximo local en $x = 0$ y un mínimo local en $x = 1$.

[C.-] Alcanza un máximo global en $x = 0$ y un mínimo global en $x = -1$

[D.-] Alcanza un máximo global en $x = 2$ y tiene un mínimo local en $x = 0$.

4. Los limites

$$(a) \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^{(2n)}}{(2n)!}\ , \qquad (b) \lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+6n)\cos(n!)}{(5n^3+4n^2+6n)}$$

tienen como valores

[A.-] $(a)0$, $(b)1$.

[B.-] $(a)+\infty$, (b) no existe.

[C.-] $(a)+\infty$, $(b)0$.

[D.-] $(a)0$, $(b)0$.

5. Consideramos las series

$$(a) \sum_n \frac{(-1)^n n}{n^2+3n+4}\ , \quad (b) \sum_n (-1)^n \frac{\cos n}{n^2}\ , \quad (c) \sum_n (-1)^n \cos n.$$

Entonces:

[A.-] Las tres series son absolutamente convergentes.

[B.-] (a) es absolutamente convergente , (b) y (c) divergentes.

[C.-] (b) es absolutamente convergente, (a) y (c) absolutamente divergentes .

[D.-] (b) es absolutamente convergente, (a) y (c) divergentes.

EJERCICIOS (TVM & FUNCIONES INVERSAS)

① Usando el Teorema del Valor Medio, demuestra que $\sqrt{101} = 10{,}04\ldots$, $7^{1/3} = 1{,}9\ldots$, $e^{0{,}03} = 1{,}0\ldots$

② Sea $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^3}$ en $x \geq 0$.

Demuestra que existe f^{-1} y dibuja su gráfica.

③ Demuestra que $(\operatorname{arcsen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ y $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

④ Calcula $(f^{-1})'(0)$ con $f(x) = 5x + \operatorname{sen} x$.

⑤ Calcula $(f^{-1})'(f(1))$ con $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

¿Existe $(f^{-1})'(1)$?

⑥ Demuestra que existe f^{-1}, con

$f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x + x$ en $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Calcula $(f^{-1})'(1)$.

⑦ Demuestra que existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) + g(x)^5 + \operatorname{sen} g(x) + 7 - x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Calcula $g'(g(3))$.

EXAMEN DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, Curso 2003/2004.
1º DE INGENIERÍA INFORMÁTICA.
FECHA: miércoles día 8 de septiembre de 2004
MODELO 4

1) Se da la sucesión definida por $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$ para $n = 2,\ 3, ...$

Dígase cual de las afirmaciones siguientes es cierta:

A) Es creciente y acotada, pero no es convergente;

B) Es decreciente y converge a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$;

C) Es creciente y converge a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$;

D) Es creciente y converge a $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

✓ **2)** Se da la función $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f_a(x) = \begin{cases} (1+x^2)^{\frac{1}{|x|}} & \text{si} \quad \mathrm{x} < 0 \\ a & \text{si} \quad \mathrm{x} = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{si} \quad \mathrm{x} > 0 \end{cases}$$

Dígase cual de las afirmaciones siguientes es cierta:

A) f_a es continua en $\mathbb{R}$ para todo a ;

B) f_a es continua en $\mathbb{R}$ para $a = 1$;

C) f_a es discontinua en $x = 0$ para todo a ;

D) f_a es continua en $\mathbb{R}$ para $a = 2$.

✓ **3)** El área comprendida entre las curvas $y = x^2$ e $y = 8 - x^2$ vale:

A) $\frac{64}{7}$; **B)** $\frac{32}{3}$; **C)** $\frac{64}{3}$; **D)** $\frac{32}{5}$.

✓ **4)** Se considera la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$F(x) = \int_{-x^2}^{x^2} f(s)\, ds$$

siendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en todo $\mathbb{R}$. Dígase cual de las siguientes afirmaciones es cierta:

A) F es derivable para todo $x \neq 0$ pero no existe $F'(0)$;

B) F es derivable en $\mathbb{R}$ y la derivada vale $F'(x) = [f(x^2) + f(-x^2)]2x$;

C) F es derivable en $\mathbb{R}$ y la derivada vale $F'(x) = f(x^2) - f(-x^2)$;

D) F es derivable en $\mathbb{R}$ y la derivada vale $F'(x) = [f(x^2) - f(-x^2)]2x$.

5) El valor de la integral definida

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

es:

A) $\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}$; B) $2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$; C) $1 - \sqrt{2}$; D) $\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}$.

6) El valor del límite

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \right)^{2x-1}$$

es:

A) e^2 ; B) $3e$; C) e^4 ; D) e .

7) Dada la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + x^2 - ln\ x$. Dígase cual de las afirmaciones siguientes es cierta:

A) f tiene un máximo local y un mínimo local en el intervalo $(0, 1)$;

B) f alcanza un mínimo global en $(0, +\infty)$ y no tiene puntos de inflexión;

C) f alcanza un mínimo global en $(0, +\infty)$ y tiene un punto de inflexión;

D) f no tiene mínimos locales ni globales.

8) Dadas las series

$$\text{(I)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^3 n}{n^2 + 1} \ ; \quad \text{(II)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\lg n)^{\alpha}}$$

dígase cual de las siguientes afirmaciones es cierta:

A) (I) converge y (II) diverge para todo α ;

B) (I) diverge y (II) converge para todo $\alpha > 0$;

C) (I) converge y (II) converge para todo $\alpha > 0$;

D) (I) converge y (II) converge para todo $\alpha > -1$.

INGENIERÍA INFORMÁTICA – ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Examen Parcial – 2 de diciembre de 2004 – MODELO 4

Normas generales: El examen dura una hora y media. No se permite el uso de apuntes ni calculadoras. Como norma no se permite salir del aula hasta entregado el examen. Cada problema vale dos puntos. Las respuestas equivocadas descuentan 0'5.

---

1. Se considera la función definida por

$$f(x) := \frac{|x|}{1+x}.$$

Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

(A) La función está acotada y es creciente en $[-2, \infty)$.

(B) La función está acotada y es creciente en $(-1, \infty)$.

(C) La función está acotada y es decreciente en $(-\infty, -1)$.

(D) La función está acotada superiormente y es decreciente en $(-\infty, -1)$.

---

2. Considérese la función

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\log|x|} & \text{si } x \neq -1, 0, 1, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x = -1, 1. \end{cases}$$

Se tiene:

(A) f es discontinua en 0, -1 y 1.

(B) f es continua en todo $\mathbb{R}$.

(C) f es discontinua en 0.

(D) f es discontinua en -1 y 1.

---

3. Considérese la función

$$f(x) := |x^2 - 6x + 5|.$$

Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

(A) f tiene exactamente 2 máximos locales y 2 mínimos locales en $[0, 7]$.

(B) f tiene exactamente 2 máximos locales y un mínimo local en $[0, 4]$.

(C) f tiene exactamente 2 máximos locales y 2 mínimos locales en $[0, 3]$.

(D) f tiene exactamente 3 máximos locales y 2 mínimos locales en $[0, 7]$.

---

4. Dada la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n-1)}, \qquad a, b > 0.$$

Se tiene:

(A) La serie es convergente si y sólo si $b < 1 + a$.

(B) La serie es convergente si y sólo si $b > a$.

(C) La serie es convergente si y sólo si $b < a$.

(D) La serie es convergente si y sólo si $b > 1 + a$.

---

5. Hállese el valor del límite

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{(2n)!} \log \frac{n^2 + 1}{n^2}.$$

(A) $e^4/2$ **(B)** $4/e^2$ **(C)** $2/e^4$ **(D)** $e^2/4$

INGENIERÍA INFORMÁTICA – ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Examen Final – 11 de febrero de 2005 – **MODELO 1**

Normas generales: El examen dura tres horas. No se permite el uso de apuntes ni calculadoras. Como norma no se permite salir del aula hasta entregado el examen. Cada problema vale 1'25 puntos. Las respuestas equivocadas descuentan 0'25.

---

1. El área comprendida entre la curva $y^2 = 9x$ y la recta $2y - 3x = -24$ es

(A) 96 **(B)** 108 **(C)** 88 **(D)** 94

---

2. Dígase cuál es el valor de la integral

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

(A) $\sqrt{2} + \pi/4$ **(B)** $1/\sqrt{2} + \pi/4$ **(C)** $\sqrt{2} + \pi/2$ **(D)** $1/\sqrt{2} + \pi/2$

---

3. Considérese la función

$$f(x) := \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 0, \\ 1 + x + \frac{x^2}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Se tiene:

(A) f tiene 3 derivadas continuas en $\mathbb{R}$.

(B) f tiene 2 derivadas continuas en $\mathbb{R}$.

(C) f tiene 2 derivadas en $\mathbb{R}$, pero f'' no es continua.

(D) f no es derivable en $\mathbb{R}$.

---

4. Considérense los siguientes límites:

$$L := \lim_{x \to 0} e^{\frac{|x|}{x}}, \qquad M := \lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2}}{\cos x (\operatorname{sen} 2x)^2}.$$

Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

(A) L no existe y $M = 1/4$.

(B) L no existe y $M = 1/8$.

(C) $L = e$ y $M = 1/8$.

(D) $L = -e$ y $M = 1/2$.

5. Estúdiese la convergencia de las siguientes series:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\operatorname{arc\,tg} n}}{1+n^2}; \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n^2+1)}{n^3+3}.$$

Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

(A) (i) es convergente y (ii) es absolutamente convergente.

(B) (i) es convergente y (ii) es convergente, pero no absolutamente convergente.

(C) (i) y (ii) son divergentes.

(D) (i) es divergente y (ii) es convergente, pero no absolutamente convergente.

---

6. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := x^2 e^{-x}$, dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

(A) f no posee un máximo global y no tiene puntos de inflexión.

(B) f posee un único punto de inflexión.

(C) f posee exactamente dos puntos de inflexión.

(D) f alcanza un máximo global y tiene dos puntos de inflexión.

---

7. Dadas las sucesiones

$$x_n := \frac{n+1}{(2n)^2}, \quad y_n := \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}, \quad z_n := \frac{n+1}{n^2}.$$

Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

(A) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} y_n$ no existe.

(B) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 0$

(C) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = 1$.

(D) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = 2$.

---

8. Sea la función definida mediante $f(x) := 1 + \operatorname{sen} x$. Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

(A) $f : [0,\pi] \to [1,2]$ es biyectiva y $(f^{-1})'\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. X

Duda

(B) $f : [0,\pi/2] \to [1,2]$ es biyectiva y $(f^{-1})'\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$.

(C) $f : [0,\pi/2] \to [1,2]$ es biyectiva y $(f^{-1})'\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(D) $f : [0,\pi/2] \to [0,2]$ es biyectiva y $(f^{-1})'\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. X

INGENIERÍA INFORMÁTICA – ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Examen Final – septiembre de 2005 – **MODELO 2**

Normas generales: El examen dura tres horas. No se permite el uso de apuntes ni calculadoras. Como norma no se permite salir del aula hasta entregado el examen. Cada problema vale 1'25 puntos. Las respuestas equivocadas descuentan 0'25.

---

1. Sea la función $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x) := \int_0^x \frac{2t}{1+t^4}\,dt.$$

Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

(A) $f(1) = \frac{\pi}{3}$ y $(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2.$

(B) $f(1) = \frac{\pi}{4}$ y $(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

(C) $f(1) = \frac{\pi}{3}$ y $(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1.$

(D) $f(1) = \frac{\pi}{4}$ y $(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.$

---

2. Considérense los siguientes límites:

$$L := \lim_{x\to 0} \frac{x^2(3+\operatorname{sen} x)}{(x+\operatorname{sen} x)^2}, \qquad M := \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^2}{5\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^8 x}.$$

Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

(A) $L = 1$ y $M = \frac{1}{20}$. **(B)** $L = \frac{3}{4}$ y $M = \frac{1}{20}$.

(C) $L = \frac{3}{4}$ y $M = \frac{1}{15}$. **(D)** $L = 1$ y $M = \frac{1}{15}$.

---

3. Hállese el valor de $f(0)$, donde f es una función continua que satisface:

$$\int_0^x t f(t)\,dt = \pi - \cos(2x)$$

(A) -1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

---

4. El área comprendida entre la curva $y = \frac{x^2}{2}$ y la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ es

(A) $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ **(D)** $\pi - 3$

---

5. Estúdiese la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\log(n+1))^a}.$$

Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

(A) La serie es convergente para todo $a > 0$ y divergente para todo $a \leq 0$.

(B) La serie es convergente para todo $a > 1$ y divergente para todo $a \leq 1$.

(C) La serie es convergente para todo $a \geq 1$ y divergente para todo $a < 1$.

(D) La serie es convergente para todo $a \geq 0$ y divergente para todo $a < 0$.

---

6. Se consideran la sucesión y la serie

$$a_n := \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^\alpha}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

(A) La serie converge si y sólo si $\alpha > 1$ y la sucesión converge si y sólo si $\alpha \geq 0$.

(B) La serie converge si y sólo si $\alpha > 1/2$ y la sucesión converge si y sólo si $\alpha \geq -1/2$.

(C) La serie converge si y sólo si $\alpha > 1$ y la sucesión converge si y sólo si $\alpha > 0$.

(D) La serie converge si y sólo si $\alpha > 1/2$ y la sucesión converge si y sólo si $\alpha > -1/2$.

---

7. Dígase cuál es el valor de la integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4}{x^4 - 1}\, dx.$$

(A) $\frac{1}{2} - \frac{\log 2}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{2} - \frac{\log 3}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$

(C) $1 + \frac{\log 2}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$ **(D)** $1 - \frac{\log 3}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$

---

8. Considérese la función

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 2(\sqrt{x+1} - 1) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

(A) f posee derivadas laterales distintas en $x = 0$.

(B) f es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = 1$.

(C) f es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = 2$.

(D) f es derivable en cualquier punto distinto de 0, pero no lo es en $x = 0$.

ANÁLISIS MATEMÁTICO.

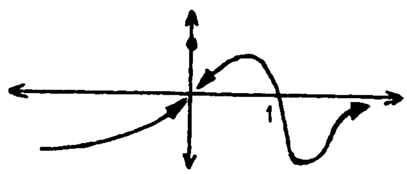
---

1. Sea $f(x) = \int_0^x e^{t^2}dt$. Entonces, el coeficiente de x^n en el desarollo en serie de Taylor de f alrededor de $x = 0$ es: a) 0 si n es par y $\dfrac{1}{\frac{n-1}{2}!\, n}$ si n es impar. b) $\dfrac{1}{n!(2n+1)}$ en los términos impares; $\dfrac{1}{n!}$ en los términos pares. c) 0 si n es par y $\dfrac{1}{n!(2n+1)}$ si n es impar. d) $\dfrac{2}{n!}$ e) $\dfrac{1}{n!}$ si n es par, $\dfrac{1}{n!(2n+1)}$ si n es impar.

Indicación: empezar con el desarrollo en serie de Taylor de e^x, después, a partir de éste, construir el de e^{x^2}, y finalmente pasar a f.

---

2. Sea $g(x)$ una función cuya gráfica es la del dibujo.



Elegir la afirmación correcta:

a) g es una función uno-uno (i.e. inyectiva). b) Si f es continua en $x = 0$, y satisface $f'(x) = g(x)$, para todo $x \neq 0$, entonces $x = 0$ es un punto de máximo local. c) Si f satisface $f'(x) = g(x)$, para todo $x \neq 0$, entonces $x = 1$ es un punto de inflexión de f. d) No existe ninguna función, f, tal que $f'(x) = g(x)$, para todo x . e) Si f satisface $f'(x) = g(x)$, para todo $x \neq 0$, entonces f tiene una inversa global.

---

3. Calcular: $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} \int_x^{x^3} t^2 e^t cos(\pi t)dt$. a)$cos(\pi x)$. b)$2e^x$. c) $-2e$. d) 1. e)$-\pi$.

---

4. Los valores máximo y mínimo de una función continua en el intervalo $[-2,\ 3]$ son 2 y -3 respectivamente. Determinar el valor mínimo de $(f(x/2))^2/3 - 2$ en $[-4,\ 6]$. a) -2/3. b) $(f(-3/2))^2/3$ c) -2. d) -3. e) 1.

---

5. Sea f(x) continua en $[0, \infty)$. Determinar entre las siguientes la afirmación cierta. a) Si $f'(x_0) = 0$, entonces f presenta en x_0 un máximo o mínimo local. b) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, entonces f está acotada inferiormente en $[0, \infty)$. c) f es derivable en $(0, \infty)$. d)Existe $\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. e) f alcanza su máximo y su mínimo en $[0, \infty)$.

---

6. Sean dos campos vectoriales $\vec{F}:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ y $\vec{G}:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$. Decir cuál de las siguientes igualdades es correcta:

(a) $\operatorname{div}(\vec{F}\times\vec{G}) = -\vec{G}\cdot\operatorname{rot}\vec{F}-\vec{F}\cdot\operatorname{rot}\vec{G}$
(b) $\operatorname{div}(\vec{F}\times\vec{G}) = \vec{G}\cdot\operatorname{rot}\vec{F}+\vec{F}\cdot\operatorname{rot}\vec{G}$
(c) $\operatorname{div}(\vec{F}\times\vec{G}) = \vec{F}\cdot\operatorname{rot}\vec{G}-\vec{G}\cdot\operatorname{rot}\vec{F}$
(d) $\operatorname{div}(\vec{F}\times\vec{G}) = \vec{G}\cdot\operatorname{rot}\vec{F}-\vec{F}\cdot\operatorname{rot}\vec{G}$
(e) $\operatorname{div}(\vec{F}\times\vec{G}) = \operatorname{div}\vec{F}+\operatorname{div}\vec{G}$

---

7. Sea $\vec{F}:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ el campo $\vec{F}(x,y,z)=(x^2y,\,-y^2x,\,x+y+z)$, Ω la región determinada por $x^2+y^2+z^2\le 4$ y $x^2+y^2+z^2\le 4z$ y S la frontera de Ω orientada con la normal exterior. Calcular la integral de superficie $\int_S \vec{F}\cdot dS$.

(a) $3\pi/5$ (b) $10\pi/3$ (c) 0 (d) $\pi/3$ (e) π^2

---

8. Dada la superficie paramétrica $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ con $f(u,v)=(u,\,u^2+v^2,\,u^3+v^3)$, decir cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

(a) El plano tangente a la superficie en el punto $(1,2,2)$ es paralelo al plano $x+2y=0$.
(b) El plano tangente a la superficie en el punto $(1,2,2)$ es $2x+y-z+6=0$.
(c) El plano tangente a la superficie en el punto $(1,2,2)$ es paralelo al plano $3y-5z+9=0$.
(d) El plano tangente a la superficie en el punto $(1,2,2)$ es perpendicular al plano $x+2y+3z=0$.
(e) El plano tangente a la superficie en el punto $(1,2,2)$ es paralelo al plano $x+y+z=0$.

---

9. Dada la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por $a_n=\frac{n^2}{n^2+1}$, decir cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

(a) La sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente y converge a 1.
(b) La sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente y converge a 0.
(c) La sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente y converge a 1.
(d) La sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente y converge a 0.
(e) La sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es acotada.

---

10. Sea S la región de la superficie $x^2+y^2=z^2$ determinada por $x^2+y^2+z^2\le 14z-24$. Calcular el área de S.

(a) $6\pi/5$ (b) $\pi/3$ (c) 2π (d) 7π (e) $7\sqrt{2}\,\pi$

Universidad Autónoma de Madrid
ESCUELA POLITECNICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

NOTA

Análisis Matemático I.
PRIMER CURSO DE INGENIERIA INFORMÁTICA 20 de noviembre de 2008

Apellidos.. Nombre..........................
D.N.I............................ Grupo...

P1.

(a) Estudiar si existe

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{\operatorname{sen} x}.$$

(b) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tales que, g es acotada, $g(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Demostrar que

$$\lim_{x\to 0}(f(x) - g(x)) = 0.$$

P2. Sea la función

$$f(x) \begin{cases} |2x - x^2| & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{1}{2x} + \dfrac{x}{2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

(a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en cada $x \in \mathbb{R}$.

(b) Estudiar extremos, asíntotas, cocavidad y convexidad, para diseñar razonadamente la gráfica.

P3.

(a) Enunciar y demostrar el *Teorema de la Función Inversa*.

(b) Probar que existe una función derivable g tal que

$$[g(x)]^7 + g(x) + x = 0.$$

(c) Calcular $g'(x)$.

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR, U.A.M.

ANÁLISIS MATEMÁTICO I. INGENIERÍA INFORMÁTICA. EXAMEN FINAL, 22/01/2009

Apellidos: **Nombre:**
DNI : **Grupo**

1. Problema

Probar que todas las afirmaciones siguientes son falsas proporcionando un contraejemplo para cada una de ellas.

1. Toda función continua en el intervalo $(2, 6]$ es acotada.
2. Toda sucesión acotada de números reales es convergente.
3. Si f es una función decreciente en un entorno de x_0, donde se supone derivable, entonces $f'(x_0) < 0$.
4. Si f es una función continua y derivable en $[0, 1]$ y $f(0) \neq f(1)$, existe $c \in (0, 1)$ tal que $f'(c) = 0$.

2. Problema

Consideremos la función,

$$f(x) = 1 + \frac{16}{2^{\left(\frac{1}{x^2}\right)} - 16}$$

i) Estudiar razonadamente si es posible encontrar un valor real α de forma que definiendo $f(0) = \alpha$ la función resultante sea continua en cero.
ii) Estudiar el dominio de la función resultante y los puntos en los que no es derivable.
iii) Estudiar la existencia de asíntotas.
iv) Obtener los puntos críticos de f. Determinar los extremos locales, si existen.
v) Dibujar la gráfica de f.

3. Problema

1. Calcular la primitiva de la función
$$f(x) = \frac{1}{1 + \cos(2x)}$$
2. Calcular razonadamente el desarrollo de Taylor hasta el orden 4 en $x = 0$ de la función $F(x) = \int_0^x e^{t^4}\, dt$.
3. Calcular si existe el límite, $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} (1 - \cos(t^2))dt}{x^4}$.
4. Estudiar la convergencia de
$$a) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \qquad b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

4. Problema

Estudiar la convergencia de las series

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.
2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(1 - e^n)}{e^n\, n \log n}$.
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR, U.A.M.

ANÁLISIS MATEMÁTICO I. INGENIERÍA INFORMÁTICA. EXAMEN EXTRAORDINARIO, 1/09/2009

Apellidos: **Nombre:**
DNI : **Grupo**

1. Problema

Decídase cuáles de las siguientes afirmaciones son Verdaderas (V) y cuáles son Falsas (F). Probar aquellas que sean Verdaderas y proporcionar un contraejemplo para las que sean Falsas.

1. Toda sucesión acotada que tiene una subsucesión convergente es convergente.
2. Toda función continua en el intervalo $(0,1]$ es acotada.
3. Si f es una función derivable en x_0, entonces es continua en x_0.
4. Si f es una función creciente en x_0 y exite $f'(x_0)$, entonces $f'(x_0) > 0$.

2. Problema

Consideremos la función,

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$$

i) Estudiar el dominio de la función y los puntos de derivabilidad.
ii) Estudiar la existencia de asíntotas.
iii) Determinar los máximos y mínimos locales de f.
iv) Determinar los máximos y mínimos absolutos de f.
v) Hallar los intervalos de concavidad y convexidad.

3. Problema

1. Sea $f : \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{R}$ función contínua. Calcular si existe el límite,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{3x} \frac{f(t)}{1+t^2}dt}{x}$$

.

2. Calcular la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x)-1}{1+x^2}dx$.
3. Estudiar la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan(x)-1}{1+x^2}dx$.

4. Problema

1. Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1+\operatorname{sen}^2(na)}{n^a})$, en función del parámetro $a > 0$.
2. Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ y calcular su suma si es posible.
3. Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \log n}{2n^2-n+1}$.

Matemáticas I

Examen 10-2-09 ITI

1) Consideramos la función

$$\psi(r) = (1 - \frac{2}{3}r + \frac{2}{27}r^2)e^{-r/3}$$

en el dominio $r \geq 0$. Dibuja la gráfica de la función en esa zona (teniendo en cuenta su crecimiento, los cortes con los ejes y asíntotas).

La probabilidad de que en cierto atómo de hidrógeno un electrón se encuentre a distancia mayor que a y menor que b del núcleo viene dada por la cantidad

$$P(a,b) = \frac{1}{M}\int_a^b \psi(r)^2\, dr,$$

con $M = \int_0^\infty \psi(r)^2\, dr$. ¿Qué probabilidad es mayor, la de que el electrón se encuentre a una distancia de entre 0 y 2 o la de que se encuentre a una distancia mayor que 2?

2) Calcula el desarrollo en serie en potencias de t de la función

$$F(t) = 1 + \int_0^t \cos x + \frac{\cos x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\, dx.$$

Después, halla una fórmula explícita para $F(t)$ que te permita calcular el valor t más cercano a 9 en el que $F(t)$ se anule.

Sugerencia: la fórmula explícita la puedes hallar bien a partir de la serie, bien resolviendo la integral.

3) Queremos diseñar un tobogán que nos lleve del punto $(0,0)$ al punto $(\pi,-2)$ en el menor tiempo posible. La forma de dicho tobogán viene descrita por la curva $(x(-y), y)$ —con $-2 < y \leq 0$— donde

$$x(s) = \int_0^s \sqrt{\frac{t}{2-t}}\, dt \qquad 0 \leq s < 2.$$

Haz un esquema de la gráfica de la función $x(s)$ guiándote por el tamaño de $x'(s)$. Halla el polinomio de grado 4 que mejor aproxima a la función $f(s) = x(s^2)$ cerca de $s = 0$. Calcula $x(1)$ de forma exacta. Calcula la recta tangente a la curva en el punto $(x(1), -1)$.

Sugerencia: recuerda que $f'(s) = 2sx'(s^2)$. Para la parte final, puedes resolver la integral haciendo un cambio que haga desaparecer la raíz.

4) Queremos construir una lente maciza que lleve al punto $(2,0)$ cualquier rayo de luz que salga del punto $(0,0)$. La sección de esa lente perfecta vendría dada por la curva $(x, y(x))$ definida por la ecuación

$$\sqrt{x^2 + y(x)^2} + 3\sqrt{(2-x)^2 + y(x)^2} = 4\sqrt{2}.$$

Como es una curva complicada, lo que vamos a hacer es aproximar $y(x)$ por su polinomio de Taylor de grado 2 en $x = 1$. Calcula dicho polinomio. Aproxima el volumen de la lente formada al girar la gráfica del polinomio con respecto al eje x (para esto tienes que ver dónde el polinomio corta al eje x).

Sugerencia: fíjate en que de la ecuación se deduce que $y(1) = 1$. Para hallar los otros dos coeficientes del polinomio tienes tres opciones: derivar la ecuación, despejar la $y(x)$ elevando al cuadrado, o resolverlo como hice yo el de la gravedad.

- Si ves que no sabes hallar el polinomio del ejercicio 4), haz el volumen pensando que $y(x)$ es el arco de la circunferencia $y(x)^2 + (x-3)^2 = 4$ limitado por la recta $x = 2$.

-Recuerda: pon todo lo que hagas, que te puede dar puntos.

-Como ya sabéis, se permiten apuntes y calculadoras, pero no de las programables o que hagan gráficos.

-El examen tiene una duración de 3 horas.

Examen Matemáticas I - ITI - septiembre 2009

1) Halla el valor máximo y el valor mínimo que toma la función

$$h(x, y) = x^3 + y^2$$

en la parte del círculo de centro $(0, 0)$ y radio 1 que se encuentra por debajo de la recta $y = x$ (en el plano (x, y)).

2) Calcula el volumen del cuerpo limitado por la superficie

$$x^2 + 2y^2 + z^4 = 9$$

en el espacio (x, y, z).

3) ¿A qué valor tiende la integral

$$I = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^2 \cos^2(wt)\, dt$$

cuando w va hacia infinito?

4) Definimos la función F como

$$F(a) = \int_1^2 \frac{dx}{(x + a)x^2}$$

para cualquier $a > -1$.

(i) Dibuja la gráfica de la función F en la zona $a > -1$, teniendo en cuenta sus asíntotas, su crecimiento y sus cortes con los ejes.

(ii) Calcula la serie de potencias de a de la función F. ¿Cuál es la recta tangente a F en el punto $a = 0$?

5) La función g queda definida de forma implícita por las ecuaciones

$$xg''(x) - \frac{2}{3}xg'(x) + 2g(x) = 0, \qquad g(0) = 0,\ g'(0) = 1.$$

(i) Halla la serie de potencias de x de la función g.

(ii) Encuentra los puntos en los que g se anula.

Tenéis 3 horas para realizar el examen. Todos lo problemas valen lo mismo, 2 puntos. Está permitido llevar apuntes, libros y calculadora (que no dibuje ni sea programable).