

Cálculo I. Examen de prueba 3.

Tiempo de realización: 3 horas.
log significa logaritmo neperiano.

1. Dibuja la gráfica de la función de x en el plano (x, y) definida por la ecuación

$$y^2 = x^3 - 6x + 9 \quad \text{con } y \geq 0$$

teniendo en cuenta su dominio, su continuidad, derivabilidad, cortes con los ejes, zonas de crecimiento y comportamiento asintótico.

¿Dónde corta al eje x la recta tangente a la gráfica en el punto $(2, \sqrt{5})$?

2. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \cos(\log x) dx$

b) $\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} dx$

c) $\int_2^4 \frac{dx}{x^{4/3} - 1} dx$

3. Calcula la distancia mínima del punto $(0, 0)$ a la curva definida en el plano (x, y) por la función $f : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$, con

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{9}{1+x^2}}.$$

Halla también la derivada de la función inversa de f en el punto 3.

4. Estudia la derivabilidad la función $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con

$$h(x) = \begin{cases} 3 \frac{\text{sen}(x-1)}{x^3-1} & \text{si } x > 1, \\ \int_0^{x^2} \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t^3\right) dt & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Nota: la integral no se puede resolver de manera explícita.

5. Di si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando tus respuestas:

a) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable y $f'(x) > 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

b) Sea a_1, a_2, a_3, \dots una sucesión decreciente, con $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

es convergente.

c) Sea a_1, a_2, a_3, \dots una sucesión decreciente, con $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0$.
Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

es convergente.