Cálculo I. Examen de prueba 2.

Tiempo de realización: 3 horas.
log *signfica logaritmo neperiano.*

1. Di si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando tus respuestas:

   a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Entonces

   $$\int_1^6 f(x)\,dx \leq \int_1^6 x^2 f(x)\,dx.$$

   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función

   $$f(x) = \int_{-1}^{x} \frac{2e^{2t} - e^{4t}}{1+t^2}\,dt.$$

   Entonces $f(-1) = 0$ y f no tiene máximo global.

   c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable y $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces

   $$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

2. Calcula el número de soluciones (con $x \in \mathbb{R}$) de las siguientes ecuaciones:

   a) $\sqrt{2 + x^3} = x$.

   b) $e^x = 2 + x^2$.

   c) $x = \operatorname{tg} x$, con $x \in (0, 3\pi/2)$.

3. Dibuja la gráfica de la función

$$G(x) = \int_0^{|x|} \frac{1-t^4}{1+t^4}\, dt,$$

teniendo en cuenta su continuidad, derivabilidad, zonas de crecimiento y comportamiento asintótico (para todo esto no es necesario calcular la integral, que de hecho en este caso es un poco difícil porque hay que factorizar $1+t^4$).

Aproxima el valor de $G(1)$ mediante la «Fórmula de Simpson»:

$$\int_a^b f(t)\, dt \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right).$$

Usa esa aproximación para dibujar mejor la gráfica.

4. Calcula los siguientes límites, en caso de que existan:

   a) $\lim_{n\to\infty} a_n$, con $a_1 = 0{,}625$ y $a_{n+1} = 2a_n - [2a_n]$ para todo $n \geq 1$, con $[x]$ la función «parte entera».

   b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 \operatorname{sen}^2(\pi n/2) + 2^{-n}}{n(3n + \log n)}$.