Cálculo I. Examen de prueba 1.

Tiempo de realización: 3 horas.

1. Di si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando tus respuestas:

    a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y positiva. Entonces
    $$\int_2^5 f(x)\,dx \geq 3f(2).$$

    b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y creciente. Entonces
    $$\int_0^2 f(x)\,dx \leq 2f(2).$$

    c) Existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $(f'(x))^2 e^x = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

    d) Que la derivada de $\operatorname{sen} x$ en $x = 0$ sea 1 y que
    $$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$$
    para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ son suficientes para demostrar que $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Dibuja la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
    $$f(x) = \frac{e^{x/4}}{3 + |x|}$$
    teniendo en cuenta su continuidad, derivabilidad, crecimiento y comportamiento asintótico.

3. Calcula las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int (x^3 + 3x)e^{2x^2+1}\, dx$

   b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3\sqrt{1 - x^2/4}\, dx$

   c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)\, dx$ con $p(x)$ el polinomio de Taylor de grado 2 en el punto 0 de la función $3\sqrt{1 - x^2/4}$

   Compara los resultados de *b)* y *c)* teniendo en cuenta que $\pi = 3{,}14159\ldots$

4. Estudia la convergencia de las siguientes series:

   a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 + \operatorname{sen}(n^3)}{n(\sqrt{\log n} + 7)}$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} \right)$