Solución Exámen de Cálculo I, 11/01/10. Ejercicio 5.

En el primer apartado nos piden estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}}.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}} = e^0 = 1,$$

entonces la serie diverge —por el criterio de comparación, su convergencia sería la misma que la de $\sum_{n=1}^{\infty} 1$.

En el segundo apartado, nos piden estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+\operatorname{sen} n)\sqrt{n^2+4}}.$$

Por el criterio de comparación, su convergencia es equivalente a la de la serie (deberías comprobarlo haciendo el límite de los cocientes)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Es fácil comprobar que esta serie converge, usando el criterio integral, porque

$$\lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{dt}{t^2} = \lim_{A\to\infty} (1 - 1/A) = 1 < \infty,$$

luego la serie original también es convergente.