# EJERCICIOS DE PREPARACIÓN PARA EL CONTROL PARCIAL

---

① Demuestra que $2^n \geq n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Úsalo para calcular $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$.

② Demuestra que $2^n \geq \frac{n(n-1)}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.
Úsalo para calcular $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n}$.

③ Demuestra que $2^n \geq \frac{n(n-1)(n-2)}{3.2}$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5$.
Úsalo para calcular $\lim_{n\to+\infty} (2^n - n^2)$.

④ Sea $a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_n + n + 5$. $n \in \mathbb{N}$.

(i) Demuestra que $\frac{n^2}{2} - 10n - 10 \leq a_n \leq \frac{n^2}{2} + 10n + 10$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) Usa (i) para calcular $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n^2}$

⑤ Sea $a_1 = a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{(+1)}{n(n+1)}$, $n \geq 1$. Calcula $\lim_{n\to+\infty} a_n$ en caso de que exista (Sugerencia: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$)

⑥ Sea $b_0 = 1$, $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{n+1}$. Calcula $\lim_{n\to+\infty} b_n$ en caso de que exista

(7) Demuestra la identidad

$$\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=3x^2+3xh+h^2, \quad h\neq 0.$$

Úsala para demostrar que $(x^3)'=3x^2$.

(8) Demuestra por inducción y la regla de la multiplicación para derivadas que

$(x^n)'=n\,x^{n-1} \qquad \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 1.$

(9) Usa las desigualdades

$$0\leq e^x-1-x\leq x^2e^x \qquad \text{para } x\geq 0$$

para calcular

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}.$$

(10) Di si las siguientes afirmaciones son ciertas para cualquier función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

(i) Si $\lim_{x\to 0}(f(x)-2)(f(x)-3)=0$ entonces

$\lim_{x\to 0}f(x)=2$ o $\lim_{x\to 0}f(x)=3$

(ii) Lo mismo que (i) pero suponiendo que $f$ es continua.

(11) Sabemos que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

(i) ¿Podemos asegurar que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-x}{\operatorname{sen} x} = 0$?

(ii) ¿Y que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-x}{x^2} = 0$?

(12) Sabemos que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1-3x}{x^2} = 0$.

¿Es $f$ derivable en 0? ¿Es $f$ derivable en 0 si es continua?

(13) Demuestra que la ecuación $x^5+3x-1=0$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(0,1)$.

(14) ¿Tienen alguna solución real las siguientes ecuaciones?

(i) $x+\ln(1+x^2) = 1+\operatorname{sen} x$

(ii) $e^{x^2+5x} = 5$

(iii) $e^{x^2+5x} = 5+x$.

(15) Sabemos que $x^7+x-1=0$ tiene una única raíz en el intervalo $(0,1)$. Calcúlala con una precisión de dos cifras decimales.

(16) Esboza las gráficas de las siguientes funciones y estudia su continuidad y derivabilidad.

$e^{|x|^3+x}\operatorname{sen} x$, $|x^2-5x+6|$, $|x^2-4x+4|$, $|x^3-5x^2+7x-3|$.

(17) ¿Puedo dar un valor a las siguientes funciones en $x=0$ de forma que sean continuas?

$e^{\frac{1}{x}}$, $e^{-\frac{1}{x}}$, $e^{-\frac{1}{x^2}}$, $e^{-\frac{1}{|x|}}$, $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $\operatorname{sen}\left(\pi\left[\frac{1}{x}\right]\right)$, $\operatorname{sen}\left(\pi\left|\frac{1}{x}\right|\right)$.

En los casos en que sea posible, estudia su derivabilidad en $x=0$.

(18) Calcula, si existen, los límites de las siguientes funciones cuando $x$ tiende a $0$.

(i) $\dfrac{5-2\cos\frac{1}{x}}{4-7\cos\frac{1}{x}}$ (ii) $\dfrac{5-5\left(\cos\frac{1}{x^3}\right)^2}{\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x^3}\right)^2(2+x^2)}$ (iii) $\dfrac{x^2\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^2}{x^2\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^2+x^4}$

(iv) $\dfrac{\operatorname{sen} x+2x^2\cos\frac{1}{x}}{2x+3x^2}$ (v) $\dfrac{5x^2+2x^2\cos\frac{1}{x}+(\operatorname{sen} x)^4}{7x^2+3x^2\cos\frac{1}{x}}$.

(vi) $\dfrac{|x|+2x^2\operatorname{sen}(1/x)}{3|x|+4x^2\operatorname{sen}(1/x)}$ (vii) $\dfrac{(1+x^2)^{12}-(1+x^3)^{17}}{(1+2x^2)^{15}-(1+x^2)^{14}}$