

Las matrices de Pauli

Seminario: Introducción a la física cuántica segundo semestre 2025–2026

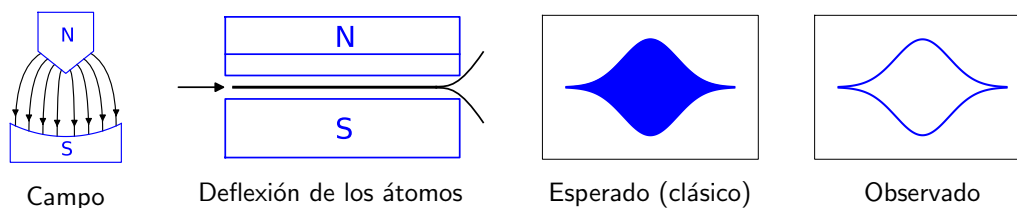
Fernando Chamizo <https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/>

El espín del electrón es un momento angular intrínseco de esta partícula y, a diferencia de otras cantidades cuánticas que hemos visto hasta ahora, solo puede tomar dos valores al ser medido. Además de que es crucial para entender la estructura atómica, el espín desempeña un papel fundamental en aplicaciones tan destacadas como la computación cuántica y las imágenes médicas.

1.1. Máquinas de Stern-Gerlach

Los electrones, neutrones y protones, constituyentes básicos de los átomos, se comportan como pequeños imanes. Lejos de ser una anécdota, en el caso de los electrones tiene consecuencias en la química que se deriva de la estructura del átomo, mientras que en el caso de los protones correspondientes a átomos de hidrógeno es fundamental en la *resonancia magnética nuclear* que ha revolucionado las imágenes médicas en las últimas décadas.

En esta introducción histórica nos centraremos en el electrón. Su comportamiento magnético está asociado a un momento angular intrínseco que se llama *espín*. Si uno piensa en términos mecánicos y electromagnéticos, esta relación parece tener sentido porque el momento angular está asociado a giros y las cargas que giran se comportan como imanes. La propia terminología “espín” es un préstamo del inglés *spin*, que significa dar vueltas. Sin embargo, hay fallos en esta interpretación porque el espín no se ajusta a los valores que puede tomar un momento angular mecánico cuantizado (múltiplos enteros de \hbar) y porque la “fuerza” magnética que adquiriría el electrón con las leyes clásicas resulta ser la mitad de la observada.

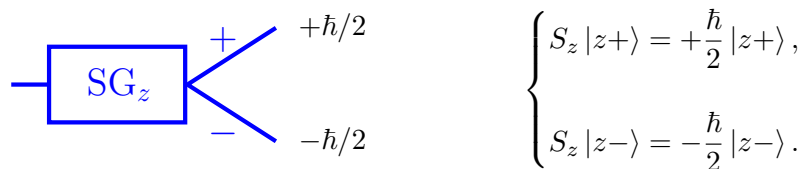


En este punto es relevante referirse a una famosa y sorprendente experiencia pionera realizada en 1922 por W. Gerlach y por O. Stern. Ironizando, fue la forma en la que no se descubrió el espín del electrón porque nadie lo relacionó con su momento magnético hasta 1927. El experimento consistía en lanzar un haz muy fino de átomos de plata a través de un campo magnético no homogéneo, en el que las líneas de fuerza estaban más concentradas en uno de los polos (el norte, en la primera figura). El sorprendente resultado fue que los átomos, después de atravesar el campo se desviaban a dos posiciones bien determinadas, “arriba” y “abajo”.

Es imposible evitar del todo desviaciones horizontales y el esquema que se obtenía realmente sobre una placa tenía una forma parecida a la indicada en la última figura. Si los átomos, que son neutros, se desvían, es que se están comportando como pequeños imanes. Lo sorprendente desde el punto de vista clásico es que haya sólo dos líneas. Hoy en día se explica el resultado del experimento a partir del espín del electrón “más externo” del átomo de plata. Sus otros 46 electrones tienen espines que se compensan. Por cierto, sería técnicamente muy difícil utilizar electrones individuales porque los campos magnéticos desvían las trayectorias de las partículas cargadas.

Tras malinterpretar el experimento de Stern-Gerlach, el espín del electrón se descubrió con el *efecto Zeeman*. Antes del nacimiento de la mecánica cuántica e incluso antes del descubrimiento del electrón, el físico experimental P. Zeeman se percató de que en presencia de campos magnéticos las líneas espectrales se desdoblaban en varias líneas. La solución dada por Schrödinger al átomo de hidrógeno justificaba este desdoble en un número impar de líneas. Sin embargo, a veces había un *efecto Zeeman anómalo* [3, §1.9] con un número par. Fue R. Kronig quien pensó en 1924 que esto se debía a un momento angular “fraccionario” del electrón. Le expuso sus ideas a W. Pauli, que ya entonces tenía gran prestigio, quien le dijo: “Ésa es una idea muy inteligente, pero la naturaleza no funciona así”. Por ello, Kronig decidió no publicar su teoría. Al contrario ocurrió, algo después, con otros dos jóvenes físicos que son oficialmente los descubridores del espín con una idea similar a la de Kronig: S. Goudsmit y G. Uhlenbeck. Ellos se lo contaron al ya jubilado, pero activo, H. Lorentz quien puso una seria objeción y también a Ehrenfest, otra autoridad, quien envió él mismo el trabajo a publicar en nombre de ellos y les dijo “Los dos sois jóvenes, podéis permitir os una estupidez” [8].

Volviendo al experimento de Stern-Gerlach, debemos aceptar que el momento angular que indica el espín sólo puede tomar dos valores en la dirección vertical. Estos dos valores son $\hbar/2$ y $-\hbar/2$. Es conveniente pensar de una manera idealizada en una máquina, que denotaremos con SG_z , en la que entran electrones y salen clasificados dependiendo de si el espín del electrón detectado como momento angular en la dirección vertical (eje z), sea $\hbar/2$ o $-\hbar/2$. Según la teoría (recordemos lo dicho a propósito del Postulado 3) estos dos valores medidos son los autovalores de cierto *operador de espín* en la dirección z , que llamaremos S_z y corresponden a dos autoestados normalizados $|z+\rangle$ y $|z-\rangle$ que son los posibles estados que detectamos con la máquina SG_z .



A propósito, en vez de $|z+\rangle$ y $|z-\rangle$, dependiendo del contexto, es también habitual escribir $|+\rangle$ y $|-\rangle$, $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$ o $|1\rangle$ y $|0\rangle$.

Si reorientamos los imanes o simplemente giramos la máquina, tendremos máquinas, que llamaremos SG_x y SG_y , para decidir el momento angular en las direcciones x e y . La simetría asegura, por supuesto, que sigue habiendo sólo dos valores $\pm\hbar/2$. Existirán entonces operadores

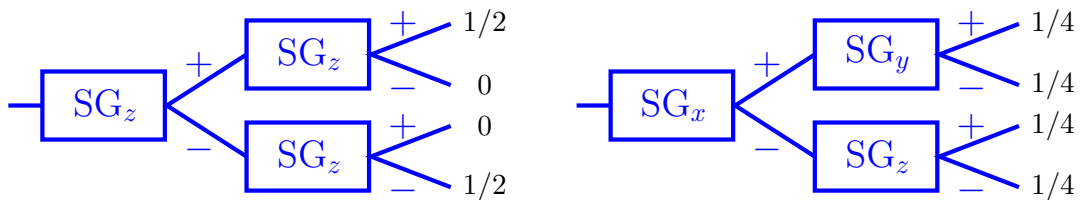
de espín S_x y S_y con autoestados normalizados $|x\pm\rangle$ y $|y\pm\rangle$, totalmente análogos:

$$S_x |x\pm\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |x\pm\rangle \quad y \quad S_y |y\pm\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |y\pm\rangle.$$

Ahora vamos a plantear una serie de experimentos con estos instrumentos que llamaremos *máquinas de Stern-Gerlach*. Son más mentales que reales, pero muy ilustrativos de las ideas de la física cuántica.

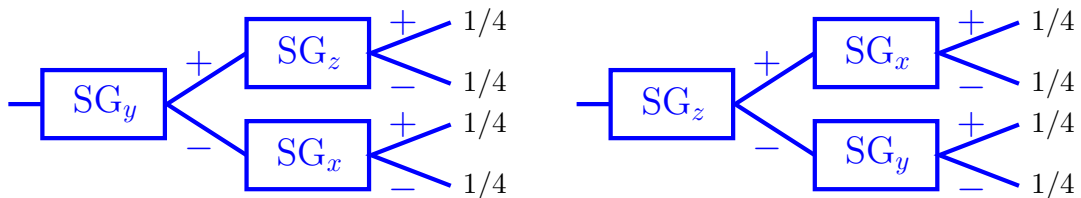
Además, los experimentos que consideraremos son más simples que los típicos de doble rendija [4] porque son discretos y no hay que pensar en interferencias. Consisten en conectar varias de estas máquinas. Escribiremos en las salidas finales la proporción de electrones que se detectan en cada una de ellas. Supondremos además que a la entrada de la primer máquina siempre llegan electrones “al azar” sin ninguna orientación privilegiada. En el experimento de Stern-Gerlach original esto estaba asegurado porque los átomos procedían de un horno y el calor desordena.

Comencemos con los dos esquemas siguientes:



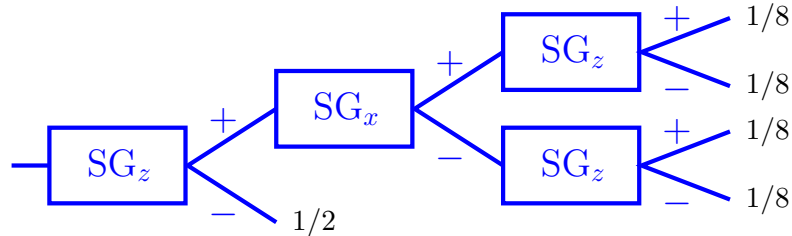
El primero no es nada sorprendente desde el punto de vista clásico: una vez que tenemos los “imanes” de los electrones en una dirección, no se modificarán por mucho que midamos. La explicación cuántica es más rara: los electrones iniciales estarán en estados de la forma $|\Psi\rangle = c_1 |z+\rangle + c_2 |z-\rangle$ con c_1 y c_2 aleatorios y tras la medición con la primera máquina, la función de onda $|\Psi\rangle$ colapsará a $|z+\rangle$ o a $|z-\rangle$, con probabilidades respectivas $|c_1|^2$ y $|c_2|^2$. Una vez que ha colapsado, permanecerá invariable al pasar por máquinas similares.

El segundo esquema es un poco más raro, por alguna razón, que el “imán” esté orientado en el eje z no es incompatible con que lo esté en la dirección x o y (una razón más para no pensar el espín como un giro real). En pocas palabras, en una máquina de Stern-Gerlach, un eje no ve al otro. Introduciendo muchos $|x+\rangle$ la mitad se detectarán como $|y+\rangle$ y la otra mitad como $|y-\rangle$, y lo mismo pasará con cualquier otro par de ejes, siempre que sean distintos. Esto es:



Consideremos estos diagramas como un hecho experimental (aunque se siguen de propiedades del momento angular cuántico).

Una vez que hemos enmarcado la idea con una ambivalencia clásica y cuántica, nos encontramos con algo muy poco intuitivo con la mentalidad clásica:



Los electrones que salen por arriba de la primera máquina están orientados hacia arriba y, como sugería el esquema anterior, por alguna razón pueden también estarlo simultáneamente en las dos direcciones x , pero entonces ¿de dónde salen los electrones finales orientados hacia abajo? La explicación cuántica es que en la parte superior de la primera máquina se tendrá $|z+\rangle$ que al pasar por la segunda colapsará a $|x+\rangle$ o a $|x-\rangle$ con la misma probabilidad (como en el segundo esquema) y por tanto no se guarda ninguna memoria de la orientación inicial.

Tenemos una propiedad física, el espín, que cuando la medimos da lugar a dos posibles resultados: espín arriba $|z+\rangle$ y espín abajo $|z-\rangle$. Con el lenguaje del álgebra lineal, eso significa que los posibles estados correspondientes (las funciones de onda) forman un espacio vectorial de dimensión 2 con base ortonormal $\mathcal{B}_z = \{|z+\rangle, |z-\rangle\}$. Girando el aparato de medición podemos emplear también las bases ortonormales $\mathcal{B}_x = \{|x+\rangle, |x-\rangle\}$ y $\mathcal{B}_y = \{|y+\rangle, |y-\rangle\}$, para describir cada estado.

Lo que nos proponemos es, a la luz de los resultados del experimento, calcular la relación entre las tres formas de ver el espacio vectorial. Es decir, las matrices de cambio de base. Una vez hecho esto, buscaremos las matrices de los operadores de espín S_x , S_y y S_z .

Un aviso previo es que multiplicar los elementos de estas bases por números de módulo 1 preserva la ortonormalidad y no cambia para nada la física. Si encuentras otra solución coherente con el experimento, lo cual es relativamente fácil, no te quejes si no la incluyen en futuros textos porque será, en cierto sentido, equivalente.

La tradición es tomar \mathcal{B}_z como base principal y referir todo a ella. En coordenadas respecto a \mathcal{B}_z se tiene la tontería

$$(1) \quad |z+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |z-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{es decir} \quad \begin{cases} |z+\rangle = 1|z+\rangle + 0|z-\rangle, \\ |z-\rangle = 0|z+\rangle + 1|z-\rangle. \end{cases}$$

De esta forma, el espín del electrón se representa mediante un elemento de \mathbb{C}^2 y se destaca la base canónica. Por ahora, el modelo es bien familiar matemáticamente.

La matriz de cambio de base C_{xz} que pasa coordenadas respecto de \mathcal{B}_x a coordenadas respecto de \mathcal{B}_z es

$$C_{xz} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad |x+\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad |x-\rangle = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

El experimento (el segundo diagrama) nos dice que $|x-\rangle$ se detecta como $|z+\rangle$ la mitad de las veces y como $|z-\rangle$ la otra mitad. Lo mismo ocurre con $|x+\rangle$. De aquí $|a|^2 = |b|^2 = |c|^2 = |d|^2 = 1/2$. Con la observación anterior, es lícito cambiar $|x+\rangle$ y $|x-\rangle$ por $e^{-i\alpha}|x+\rangle$ y $e^{-i\gamma}|x-\rangle$ con α y γ los argumentos (ángulos) de a y c . Así conseguimos $a = c = 1/\sqrt{2}$.

Por otro lado, la ortogonalidad de \mathcal{B}_x nos dice $1/2 + \bar{b}d = 0$ que con $|b|^2 = |d|^2 = 1/2$ conduce a $b = e^{i\beta}/\sqrt{2}$ y $d = -e^{i\beta}/\sqrt{2}$. Con β arbitrario. Para limpiar más el resultado, notemos que $|x+\rangle = a|z+\rangle + b|z-\rangle = a|z+\rangle + be^{-i\beta}(e^{-i\beta}|z-\rangle)$. Entonces redefiniendo $|z-\rangle$ como $e^{-i\beta}|z-\rangle$ nos libramos del β en las coordenadas de $|x\pm\rangle$ y tenemos finalmente

$$(2) \quad C_{xz} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{es decir} \quad \begin{cases} |x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+\rangle + |z-\rangle), \\ |x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+\rangle - |z-\rangle). \end{cases}$$

Si nombramos de la misma forma los elementos de la matriz C_{yz} , un razonamiento similar nos permite elegir $a = c = 1/\sqrt{2}$ y llegar a $b = e^{i\beta}/\sqrt{2}$ y $d = -e^{i\beta}/\sqrt{2}$, pero ahora una redefinición de $|z-\rangle$ no está claro que elimine simultáneamente esta β y la anterior. De hecho no puede hacerlo porque eso llevaría a $\mathcal{B}_x = \mathcal{B}_y$ que no es coherente con el experimento. Una vez gastada la redefinición de $|z-\rangle$, nos vemos obligados a conservar momentáneamente este β . Para determinarlo, consideremos la matriz del cambio de base de \mathcal{B}_x a \mathcal{B}_y :

$$C_{yx} = C_{zx}C_{yz} = C_{xz}^{-1}C_{yz} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\beta} & -e^{i\beta} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + e^{i\beta} & 1 - e^{i\beta} \\ 1 - e^{i\beta} & 1 + e^{i\beta} \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, $|y\pm\rangle$ se detecta como $|x\pm\rangle$ con probabilidad $1/2$ (tercer diagrama), por tanto, de nuevo los módulos de todos los elementos de C_{yx} son $1/\sqrt{2}$. Resolviendo $|(1 \pm e^{i\beta})/2| = 1/\sqrt{2}$ se sigue $e^{i\beta} = \pm i$. Consideremos $+i$, la elección $-i$ sólo intercambiaría las definiciones de $|y+\rangle$ y $|y-\rangle$. En este sentido, la elección corresponde a especificar una orientación. En definitiva,

$$(3) \quad C_{yz} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad \text{es decir} \quad \begin{cases} |y+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+\rangle + i|z-\rangle), \\ |y-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+\rangle - i|z-\rangle). \end{cases}$$

Ahora vamos a calcular las matrices de los operadores de espín. En términos matemáticos, son las matrices que tienen los vectores antes hallados como autovectores con autovalores $\hbar/2$ y $-\hbar/2$. Habitualmente se calculan primero las que tienen autovalores 1 y -1 , que son también importantes desde el punto de vista teórico. Esto es, para cada uno de los ejes $E = x, y, z$, buscamos una matriz σ_E cuyos autovectores sean $|E+\rangle$ y $|E-\rangle$ con autovalores respectivos 1 y -1 . Trabajando en la base canónica (1), es evidente que σ_z es la matriz $\text{diag}(1, -1)$ y las otras se deducen a partir de ella con la fórmula de cambio de base:

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = C_{xz} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} C_{xz}^{-1}, \quad \sigma_y = C_{yz} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} C_{yz}^{-1}.$$

Sustituyendo (2) y (3) se obtienen las *matrices de Pauli*.

$$(4) \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Los operadores de espín S_x, S_y, S_z , están representados por estas matrices multiplicadas por $\hbar/2$ para que los autovalores 1 y -1 pasen a $\hbar/2$ y $-\hbar/2$.

Es común utilizar los subíndices 1, 2 y 3 en lugar de x, y y z en las matrices de Pauli y en los operadores de espín. De este modo,

$$S_j = \frac{\hbar}{2}\sigma_j \quad \text{para } j = 1, 2, 3.$$

Pauli no inventó sus matrices pensando en máquinas de Stern-Gerlach sino que deseaba unos operadores que cumplieran el álgebra de las componentes del momento angular. Las arbitrariedades antes notadas en la construcción de las matrices son irrelevantes porque la estructura algebraica resultante es isomorfa con otras elecciones.

1.2. La esfera de Bloch y el álgebra del espín

Aunque suene extraño para un matemático, es conveniente considerar el “vector de matrices” $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ y el correspondiente operador de espín vectorial $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$. La razón para ello es que así para $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ unitario se tiene que $\vec{n} \cdot \vec{S}$, con la definición obvia $\sum n_j S_j$, es el operador de espín cuando se hacen mediciones en la dirección \vec{n} . Como apoyo de esta afirmación, notemos que en términos clásicos el momento angular es un vector $\vec{L} \in \mathbb{R}^3$ y sus coordenadas en una base ortonormal $\{\vec{n}, \vec{n}', \vec{n}''\}$ son $\vec{n} \cdot \vec{L}, \vec{n}' \cdot \vec{L}$ y $\vec{n}'' \cdot \vec{L}$, que dan las proyecciones sobre los ejes determinados por esta base. Así pues, al promover $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$ a tres operadores S_1, S_2, S_3 asociados a las coordenadas, es natural pensar que $n_1 L_1 + n_2 L_2 + n_3 L_3$ está asociado a $\vec{n} \cdot \vec{S} = n_1 S_1 + n_2 S_2 + n_3 S_3$. Justificar de un modo matemáticamente riguroso esta intuición requiere conocimientos sobre el momento angular de los que carecemos a este nivel.

Para comprobar que el espín en la dirección unitaria \vec{n} sigue teniendo solo dos posibles valores $+\hbar/2$ y $-\hbar/2$, hay que ver que la matriz

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} n_3 & n_1 - in_2 \\ n_1 + in_2 & -n_3 \end{pmatrix}$$

tiene autovalores 1 y -1 , lo cual se reduce a un cálculo sencillo. Los autovectores respectivos dan los estados $|n+\rangle$ y $|n-\rangle$ que corresponden a ambos estados de espín. Las fórmulas para dichos autovectores resultan más simples expresando \vec{n} en coordenadas esféricas:

$$(5) \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad \text{para } \lambda = 1, \quad \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad \text{para } \lambda = -1.$$

Son ortogonales porque $\vec{n} \cdot \vec{\sigma}$ es una matriz hermítica, por cierto, también es unitaria. De hecho están normalizados y, por tanto, son ortonormales. En otras palabras, se tienen los autoestados normalizados de $\vec{n} \cdot \vec{\sigma}$ correspondientes a

$$|\vec{n}+\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |z+\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |z-\rangle \quad \text{y} \quad |\vec{n}-\rangle = -e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |z+\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |z-\rangle.$$

Nótese que cambiar de signo \vec{n} es lo mismo que efectuar $\theta \mapsto \theta + \pi$, lo cual, como es lógico, intercambia los autoestados correspondientes a $|\vec{n}+\rangle$ y $|\vec{n}-\rangle$ (los factores extra de módulo uno

son irrelevantes). De esta forma, cada diámetro de S^2 (la esfera a la que pertenece \vec{n}) determina $\{|\vec{n}+\rangle, |\vec{n}-\rangle\}$ y, refinando esta idea, cada estado de espín está representado por un punto de la esfera S^2 (asociado a \vec{n}) de manera biyectiva. Se dice que esta representación de los estados de espín es la *esfera de Bloch* en honor al físico F. Bloch artífice de unas ecuaciones diferencial de importancia capital en la resonancia magnética nuclear. Matemáticamente se tiene la biyección

$$S^2 \longleftrightarrow \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} / \sim = \{\mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}\} / \sim$$

donde $\vec{z} \sim \vec{w}$ si \vec{z} y \vec{w} son linealmente dependientes ($\vec{z} = \lambda\vec{w}$ o $\lambda\vec{z} = \vec{w}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$). Desde el punto de vista de la topología y la variable compleja, es un reflejo del homeomorfismo entre la *esfera de Riemann* y el *espacio proyectivo* \mathbb{CP}^1 . La primera es el plano complejo compactificado con el punto del infinito y el segundo es el espacio de rectas complejas en \mathbb{C}^2 que pasan por el origen.

Una vez analizada la geometría asociada al espín, pasemos a su álgebra, que está relacionada con su propio origen histórico. Motivado por las propiedades del momento angular, lo que quería Pauli que cumpliera el operador vectorial de espín era

$$\vec{S} \cdot \vec{S} = \frac{3}{4}\hbar^2 \quad \text{y} \quad \vec{S} \times \vec{S} = i\hbar\vec{S}.$$

La segunda igualdad no tendría sentido con vectores normales y corrientes porque $\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$. Estas relaciones se verifican con $S_j = \frac{\hbar}{2}\sigma_j$ y, así, desde el punto de vista abstracto, las matrices de Pauli son solo una elección para entender y realizar fácilmente estas relaciones. En una nota a pie de página en [5] agradece a Jordan que le haya comunicado que el álgebra necesaria es similar a la de los *cuaterniones*, por tanto, es fácil ensoñar que si Pauli los hubiera conocido de antemano, los textos de mecánica cuántica estarían llenos de ellos en vez de sus famosas matrices.

Hay varias maneras de expresar las relaciones algebraicas entre las matrices de Pauli. Una de las más generales y sintéticas es

$$(6) \quad (\vec{u} \cdot \vec{\sigma})(\vec{v} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + i(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{\sigma} \quad \text{para} \quad \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

donde $\vec{u} \cdot \vec{v}$ es el producto escalar (que se supone multiplicado por la matriz identidad) y $\vec{u} \times \vec{v}$ es el producto vectorial.

Si restringimos \vec{u} y \vec{v} a los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^3 , obtenemos

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1 \quad \text{y} \quad \sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$$

junto con las tres identidades que se deducen tomando traspuestas conjugadas, lo cual invierte el orden del producto porque $(\sigma_j\sigma_k)^\dagger = \sigma_k^\dagger\sigma_j^\dagger = \sigma_k\sigma_j$. Como $(i\sigma_j)^\dagger = -i\sigma_j$, una consecuencia de este argumento es

$$\sigma_j\sigma_k = -\sigma_k\sigma_j \quad \text{para} \quad k \neq j.$$

En varias situaciones aparecen conmutadores de matrices de Pauli. A la luz de lo anterior, los seis no triviales se resumen en

$$(7) \quad [\sigma_j, \sigma_k] = 2is\sigma_\ell \quad \text{para} \quad \{1, 2, 3\} = \{j, k, \ell\}$$

donde s es el signo de la permutación $1 \mapsto j, 2 \mapsto k, 3 \mapsto \ell$.

Ahora vamos a combinar la geometría y el álgebra estableciendo un resultado que indica cómo se modifican las coordenadas de $|\vec{n}\pm\rangle$ cuando giramos \vec{n} . Para ello introducimos el *operador de rotación* asociado a un vector unitario $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ y un ángulo $\alpha \in [0, 2\pi)$

$$R_{\vec{u}}(\alpha) = \cos \frac{\alpha}{2} - i \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \vec{u} \cdot \vec{\sigma}.$$

En principio no hay nada que sugiera que esta matriz compleja 2×2 tenga algo que ver con las rotaciones (por cierto, siguiendo el convenio habitual, se entiende que el coseno multiplica a la matriz identidad). La sorpresa es que si $(\vec{u}_1, \alpha_1), (\vec{u}_2, \alpha_2), (\vec{u}_3, \alpha_3) \in S^2 \times [0, 2\pi)$ son, respectivamente, los pares eje-ángulo de tres giros G_1, G_2 y $G_3 = G_1 G_2$ en \mathbb{R}^3 , entonces

$$(8) \quad R_{\vec{u}_1}(\alpha_1) R_{\vec{u}_2}(\alpha_2) = \pm R_{\vec{u}_3}(\alpha_3)$$

y el signo es $+$ siempre que $\alpha_1 + \alpha_2 < \pi$. En relación con el objetivo mencionado, para cualquier rotación G con eje en la dirección unitaria \vec{u} y ángulo α se tiene

$$(9) \quad |G\vec{n}\rangle = \lambda R_{\vec{u}}(\alpha) |\vec{n}\rangle$$

donde $|\vec{n}\rangle$ abrevia $|\vec{n}+\rangle$ y λ es un número de módulo 1. Es decir, $|G\vec{n}\rangle$ y $R_{\vec{u}}(\alpha) |\vec{n}\rangle$ representan el mismo estado de espín.

Pauli obtuvo algo equivalente a (9) de una manera complicada apelando a los llamados *parámetros de Cayley-Klein* [7, §3.3] una forma de parametrizar rotaciones, no tan conocida entre los matemáticos, que se emplea en la mecánica del movimiento giroscópico. Lo chocante de (8) y (9) es que fórmulas tan limpias no tengan una prueba “directa”. En realidad sí la tienen cuando se conocen los rudimentos de los *grupos de Lie* y las *álgebras de Lie*. Con esta manera de proceder es importante la siguiente expresión exponencial para el operador de rotación:

$$(10) \quad R_{\vec{u}}(\alpha) = \exp(-i\alpha\vec{u} \cdot \vec{\sigma}/2)$$

que se deduce, con algunas manipulaciones, utilizando que $(\vec{u} \cdot \vec{\sigma})^2$ es la identidad. En la siguiente sección veremos el esquema de una prueba en esta línea y otra completa que solo emplea álgebra lineal.

1.3. Rotaciones y estructuras algebraicas

Utilizando la excusa de que Pauli estudió la acción de las rotaciones sobre los estados de espín, llamaremos a (9) *teorema de rotación de Pauli*, a pesar de que no es un nombre estándar. Antes de pasar a su prueba, siguiendo de nuevo la estela de Pauli en [5], veamos cómo lleva a una de las paradojas más sorprendentes de la física cuántica.

Si aplicamos (9) cuando $\alpha \rightarrow 2\pi$ se obtiene $|G\vec{n}\rangle = -|\vec{n}\rangle$. Es decir, un giro de 360° cambia el signo del vector en \mathbb{C}^2 que representa el espín. Aunque chocante, esto no es contradictorio porque $|\vec{n}\rangle$ y $\lambda|\vec{n}\rangle$ con $|\lambda| = 1$ representan el mismo estado. Es decir, este cambio de signo matemático no tiene consecuencias físicas observables. Consideremos ahora el estado $|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+\rangle + |z-\rangle)$. Con una máquina de Stern-Gerlach podríamos separar la parte con $|z+\rangle$

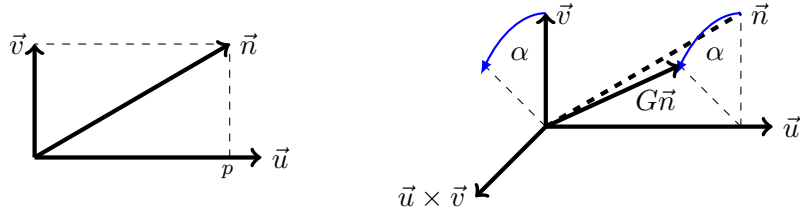
y aplicar el operador de rotación con $\alpha = 2\pi$ alrededor del eje OZ y superponer las dos partes del estado para llegar a $\frac{1}{\sqrt{2}}(-|z+\rangle + |z-\rangle)$. Ahora bien, este nuevo estado es $-|x-\rangle$, distinguible de $|x+\rangle$. Resulta la paradoja de que, en algún sentido, a nivel subatómico un giro de 360° puede no ser la identidad. Este experimento se ha llevado a cabo [6], [10] estudiando la interferencia de un neutrón consigo mismo cuando se rota el eje de su imán un ángulo α por medios electromagnéticos (véase [7, §3.2.3] para un esquema). El resultado es que el patrón de interferencia tiene periodo 4π en α , en vez de 2π , lo que refleja que $R_{\vec{u}}(4\pi)$ es la identidad mientras que $R_{\vec{u}}(2\pi)$ no lo es, falla un signo.

Pasamos ahora a una prueba del teorema de rotación de Pauli basada en álgebra lineal (siguiendo [2]). Suponemos \vec{n} fijado y, para abreviar, escribimos $A \sim B$ cuando A y B sean dos matrices que den el mismo resultado al ser aplicadas sobre $|\vec{n}\rangle$. Por definición $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})|\vec{n}\rangle = |\vec{n}\rangle$, así que $\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \sim 1$ (la matriz identidad).

Sea \vec{v} la componente de \vec{n} perpendicular a \vec{u} , en una fórmula: $\vec{v} = \vec{n} - p\vec{u}$ donde $p = \vec{u} \cdot \vec{n}$ es lo que mide (con signo) la proyección de \vec{n} sobre \vec{u} . La rotación G , que tiene eje \vec{u} y ángulo α , verifica

$$G\vec{v} = (\cos \alpha)\vec{v} + (\sin \alpha)\vec{u} \times \vec{v} \quad \text{y, por tanto,} \quad G\vec{n} = (\cos \alpha)\vec{v} + (\sin \alpha)\vec{u} \times \vec{v} + p\vec{u}.$$

Aquí hay que tener en mente que $\vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular a \vec{v} y del mismo tamaño y ambos son perpendiculares al eje del giro \vec{u} .



Al tomar el producto escalar de $\vec{v} = \vec{n} - p\vec{u}$ por $\vec{\sigma}$ se obtiene

$$\vec{v} \cdot \vec{\sigma} \sim 1 - p\vec{u} \cdot \vec{\sigma}.$$

Sustituyendo en (6) y utilizando $(\vec{u} \cdot \vec{\sigma})^2 = 1$, se deduce

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{\sigma} = -i(\vec{u} \cdot \vec{\sigma})(\vec{v} \cdot \vec{\sigma}) \sim -i(\vec{u} \cdot \vec{\sigma}) + ip(\vec{u} \cdot \vec{\sigma})^2 = ip - i(\vec{u} \cdot \vec{\sigma}).$$

Con estos resultados, $(G\vec{n}) \cdot \vec{\sigma} \sim \cos \alpha + ip \sin \alpha + (p - p \cos \alpha - i \sin \alpha)(\vec{u} \cdot \vec{\sigma})$, que utilizando las fórmulas del ángulo mitad se escribe como

$$(G\vec{n}) \cdot \vec{\sigma} \sim 1 + 2i(c_1 - c_2\vec{u} \cdot \vec{\sigma}) \sin \frac{\alpha}{2} \quad \text{con} \quad \begin{cases} c_1 = p \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}, \\ c_2 = \cos \frac{\alpha}{2} + ip \sin \frac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

Las equivalencias antes halladas para $\vec{v} \cdot \vec{\sigma}$ y $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{\sigma}$ implican

$$\begin{cases} (\vec{v} \cdot \vec{\sigma})(\vec{u} \cdot \vec{\sigma}) = -(\vec{u} \cdot \vec{\sigma})(\vec{v} \cdot \vec{\sigma}) \sim p - (\vec{u} \cdot \vec{\sigma}), \\ ((\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{\sigma})(\vec{u} \cdot \vec{\sigma}) = -(\vec{u} \cdot \vec{\sigma})((\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{\sigma}) \sim i - ip\vec{u} \cdot \vec{\sigma} \end{cases}$$

donde las igualdades provienen de (6). Utilizando de nuevo la fórmula para $G\vec{n}$, de estas relaciones se deduce $((G\vec{n}) \cdot \vec{\sigma})(\vec{u} \cdot \vec{\sigma}) \sim p + p \cos \alpha + i \sin \alpha - (\cos \alpha + ip \sin \alpha)(\vec{u} \cdot \vec{\sigma})$, que con las fórmulas del ángulo mitad da lugar, esta vez, a

$$((G\vec{n}) \cdot \vec{\sigma})(\vec{u} \cdot \vec{\sigma}) \sim \vec{u} \cdot \vec{\sigma} + 2(c_1 - c_2 \vec{u} \cdot \vec{\sigma}) \cos \frac{\alpha}{2}$$

con c_1 y c_2 como antes.

Al combinar las expresiones obtenidas para $(G\vec{n}) \cdot \vec{\sigma}$ y para $((G\vec{n}) \cdot \vec{\sigma})(\vec{u} \cdot \vec{\sigma})$ con la definición de $R_{\vec{u}}(\alpha)$ se llega a la relación

$$((G\vec{n}) \cdot \vec{\sigma})R_{\vec{u}}(\alpha) \sim R_{\vec{u}}(\alpha).$$

Esto significa que $R_{\vec{u}}(\alpha)|\vec{n}\rangle$ es un autovector de $(G\vec{n}) \cdot \vec{\sigma}$ con autovalor 1, como $|G\vec{n}\rangle$ tiene esta misma propiedad, debe cumplirse que son proporcionales, esto es (9). La constante de proporcionalidad tiene módulo 1 porque ambos están normalizados.

Se puede generalizar algo más el teorema de rotación de Pauli. No solo es posible entender $R_{\vec{u}}(\alpha)$ como una rotación en la esfera de Bloch sino la acción de cualquier matriz unitaria sobre el espacio del espín. En realidad este resultado (que algún autor ha llamado *teorema de rotación de Bloch*) es un corolario de (9) una vez que se comprueba que $R_{\vec{u}}(\alpha)$ con \vec{n} unitario y $\alpha \in [0, 2\pi]$ parametriza todas las matrices unitarias 2×2 de determinante uno, porque, entonces, cualquier matriz 2×2 unitaria U es de la forma $e^{i\varphi}R_{\vec{u}}(\alpha)$ con $\varphi \in \mathbb{R}$ y (9) implica $|G\vec{n}\rangle = \lambda'U|\vec{n}\rangle$ con $\lambda' = \lambda e^{-i\varphi}$.

El resto lo dedicaremos a dar algunas pinceladas sobre un tema que tiene importancia capital en la física física cuántica. Curiosamente, en los inicios fue criticado por Ehrenfest, Schrödinger y el Pauli con el término despectivo *Gruppenpest*¹, a pesar de que en retrospectiva el propio trabajo sobre el espín de Pauli fue su punto de partida.

Sean J_1 , J_2 y J_3 las matrices 3×3 tales que el elemento jk de J_ℓ es $-s$ con la notación de (7) si $\{1, 2, 3\} = \{j, k, \ell\}$ y cero en otro caso. Es fácil ver que forman una base del espacio vectorial sobre \mathbb{R} de matrices antisimétricas reales 3×3 . Estas se escriben como $\vec{v} \cdot \vec{J}$ con $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$ donde la notación tiene el sentido que ya conocemos. Concretamente

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \implies \vec{v} \cdot \vec{J} = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La estructura algebraica consistente en un espacio vectorial en el que hay una manera (con ciertas propiedades) de multiplicar vectores se dice que es un *álgebra*. En nuestro caso, el producto usual de matrices no convertiría las matrices antisimétricas en un álgebra (el producto se saldría del espacio), pero sí es válido el producto asociado al conmutador, porque

$$[J_1, J_2] = J_3, \quad [J_2, J_3] = J_1, \quad [J_3, J_1] = J_2.$$

¹Literalmente “la plaga de los grupos”, utilizado para referirse al uso de estructuras algebraicas en física sin aparente necesidad.

Por ciertas propiedades adicionales de este producto se dice que el álgebra resultante es un *álgebra de Lie* y recibe la notación rocoó $\mathfrak{so}(3)$. Esta deriva de $\text{SO}(3)$ que es el grupo de las matrices de rotaciones en \mathbb{R}^3 , donde “S” y “O” provienen de *special* y *orthogonal* porque dichas matrices son las ortogonales bajo la propiedad especial de que su determinante sea 1. La relación entre estas dos estructuras algebraicas aparentemente tan distintas proviene de que si \vec{u} es unitario entonces $G = e^{\alpha\vec{u}\cdot\vec{J}}$ está en $\text{SO}(3)$ es, de hecho, la matriz del giro de eje \vec{u} y ángulo α . Probarlo es menos complicado de lo que parece, aunque no lo haremos aquí [9].

Originariamente S. Lie quería elaborar una especie de teoría de Galois de ecuaciones en derivadas parciales. Sin embargo, el éxito actual de su teoría es más bien la posibilidad de estudiar grupos que son variedades, llamados *grupos de Lie*, a través de espacios vectoriales con cierto producto, las álgebras de Lie. En principio los primeros objetos son más complicado que los segundos (estudiaste álgebra lineal en primero y los grupos y las variedades vinieron después). Según lo dicho, la exponenciación de matrices nos lleva en nuestro caso del álgebra al grupo:

$$\exp : \mathfrak{so}(3) \longrightarrow \text{SO}(3).$$

Si con restringimos en $\mathfrak{so}(3)$ a los elementos $\alpha\vec{u} \cdot \vec{J}$ con $0 \leq \alpha < \pi$, $\|\vec{u}\| = 1$ esta aplicación define de hecho una biyección con $\text{SO}(3)$ salvo los giros de π radianes. Con la notación de (8) se tiene

$$e^{\alpha_1\vec{u}_1\cdot\vec{J}}e^{\alpha_2\vec{u}_2\cdot\vec{J}} = e^{\alpha_3\vec{u}_3\cdot\vec{J}}.$$

La desigualdad $\alpha_1 + \alpha_2 \geq \alpha_3$ (clásica pero poco conocida entre los matemáticos [1, (19), Fig.3]) implica que si $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 < \pi$ con $\alpha_1 + \alpha_2 < \pi$ no salimos del subconjunto donde hay biyección. Las relaciones (7) implican que $\{-\frac{i}{2}\sigma_1, -\frac{i}{2}\sigma_2, -\frac{i}{2}\sigma_3\}$ generan un álgebra de matrices 2×2 isomorfa a $\mathfrak{so}(3)$ bajo $J_\ell \leftrightarrow -\frac{i}{2}\sigma_\ell$, denominada $\mathfrak{su}(2)$. A través de una fórmula bien de conocida de grupos de Lie, resulta que este isomorfismo debe preservarse por las exponenciales en el subconjunto donde hay biyección [9]. Por tanto,

$$e^{-\frac{i}{2}\alpha_1\vec{u}_1\cdot\vec{\sigma}}e^{-\frac{i}{2}\alpha_2\vec{u}_2\cdot\vec{\sigma}} = e^{-\frac{i}{2}\alpha_3\vec{u}_3\cdot\vec{\sigma}} \quad \text{para } \alpha_1 + \alpha_2 < \pi,$$

que, gracias a (10), no es otra cosa que (8) con el signo positivo. Un giro de eje \vec{u} y ángulo α es lo mismo que un giro de ángulo $2\pi - \alpha$ y eje $-\vec{u}$. Elaborando esta idea, se obtiene que sin la condición $\alpha_1 + \alpha_2 < \pi$ lo único que puede fallar es un signo y por eso se cumple (8). Por cierto, el grupo de Lie que se obtiene al tomar exponenciales de $\mathfrak{su}(2)$ es $\text{SU}(2)$, el grupo de matrices unitarias 2×2 con determinante 1.

Identificando cada rotación G con su eje \vec{u} y su ángulo α podemos definir $R(G)$ como $R_{\vec{u}}(\alpha)$ salvo el signo y reinterpretar (8) como un homomorfismo $R : \text{SO}(3) \longrightarrow \text{SU}(2)/\{\pm I\}$ (de hecho es un isomorfismo). Veamos que este homomorfismo implica el teorema de rotación de Pauli. Para ello, definimos G_1 como la matriz del giro de eje $(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$ y ángulo θ . Con la notación de (5) se tiene

$$G_1\vec{e}_3 = \vec{n} \quad \text{y} \quad |\vec{n}\rangle = \pm R(G_1)|z+\rangle.$$

Sea G_2 como G_1 cambiando \vec{n} por $G\vec{n}$, esto es,

$$G_2\vec{e}_3 = G\vec{n} \quad \text{y} \quad |G\vec{n}\rangle = \pm R(G_2)|z+\rangle.$$

La propiedad de homomorfismo asegura

$$R(G_2)R(G_2^{-1}GG_1)|z+\rangle = \pm R(G)R(G_1)|z+\rangle = \pm R(G)|\vec{n}\rangle.$$

Para llegar a (9) basta notar que $G_2^{-1}GG_1$ tiene eje \vec{e}_3 (porque $G_2^{-1}GG_1\vec{e}_3 = \vec{e}_3$) y, entonces $R(G_2^{-1}GG_1)|z+\rangle$ es $|z+\rangle$ salvo multiplicar por un número de módulo 1.

Ejercicios de la sección 1

EJERCICIO 1. Comprueba que las matrices de Pauli son matrices unitarias y determinan una base del espacio vectorial sobre \mathbb{R} formado por las matrices hermíticas 2×2 de traza cero.

EJERCICIO 2. Justifica que para cualquier vector unitario $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ la matriz $\vec{n} \cdot \vec{\sigma}$ es unitaria y tiene autovalores 1 y -1 . ¿Cuáles serían si permitiésemos vectores no unitarios?

EJERCICIO 3. Demuestra $\text{Tr}((\vec{v} \cdot \vec{\sigma})\sigma_j) = 2v_j$ para cualquier $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ donde Tr indica la traza.

EJERCICIO 4. Comprueba que $\vec{S} \cdot \vec{S} = \frac{3}{4}\hbar^2$ y $\vec{S} \times \vec{S} = i\hbar\vec{S}$ se verifican con $S_j = \frac{\hbar}{2}\sigma_j$. Indicación: Debido a la no conmutatividad, en el producto vectorial es importante el orden. Parte del problema es entender la definición correcta.

EJERCICIO 5. A veces se define una cuarta matriz de Pauli σ_0 como la identidad. Comprueba que para $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ la matriz $\sum_{j=0}^3 x_j \sigma_j$ es hermítica con determinante $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ (esta cantidad es relevante en relatividad). Explica por qué $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ es una base del espacio vectorial (sobre \mathbb{R}) de matrices hermíticas 2×2 .

EJERCICIO 6. Demuestra $\exp(-i\beta\vec{u} \cdot \vec{\sigma}) = \cos \beta - i\vec{u} \cdot \vec{\sigma} \sin \beta$ para $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ unitario y $\beta \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 7. Prueba que si U es una matriz unitaria 2×2 de determinante uno entonces $U = R_{\vec{u}}(\alpha)$ para cierto \vec{u} (unitario) y cierto $\alpha \in [0, 2\pi]$. Indicación: Comienza probando que U satisface $|u_{11}|^2 + |u_{21}|^2 = 1$, $u_{12} = -u_{21}^*$, $u_{22} = u_{11}^*$.

EJERCICIO 8. Comprueba que $R_{\vec{e}_2}^{-1}(\frac{\pi}{2})R_{\vec{e}_1}(\pi)R_{\vec{e}_2}(\frac{\pi}{2}) = R_{\vec{e}_3}(\pi)$ donde $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^3 .

EJERCICIO 9. Verifica la identidad $|G\vec{n}\rangle = \lambda R_{\vec{u}}(\alpha)|\vec{n}\rangle$ para $\vec{u} = (0, 0, 1)$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ y \vec{n} unitario con $n_2 = 0$.

EJERCICIO 10. Sean J_1, J_2 y J_3 las matrices 3×3 tales que el elemento jk de J_ℓ es 1 si $i\sigma_j\sigma_k = \sigma_\ell$, -1 si $i\sigma_j\sigma_k = -\sigma_\ell$ y 0 en otro caso. Escribe explícitamente estas matrices y comprueba que $\exp(\alpha J_3)$ es la matriz del giro de ángulo α alrededor del eje Z .

EJERCICIO 11. Con la notación del problema anterior y $\vec{v} \cdot \vec{J} = v_1 J_1 + v_2 J_2 + v_3 J_3$, se sabe que $\exp(\vec{v} \cdot \vec{J})$ es una matriz ortogonal para cualquier $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ (porque su inversa es $\exp(-\vec{v} \cdot \vec{J})$, que coincide con su traspuesta). Dando esto por conocido, prueba que si $\|\vec{v}\|$ no es un múltiplo entero de 2π es la matriz de un giro no trivial (distinto de la identidad) con eje $\vec{v}/\|\vec{v}\|$ o $-\vec{v}/\|\vec{v}\|$. Indicación: Halla los autovalores de $\vec{v} \cdot \vec{J}$ y usa $(\vec{v} \cdot \vec{J})\vec{v} = \vec{0}$ para determinar el eje.

Referencias

- [1] S. L. Altmann. Hamilton, Rodrigues, and the quaternion scandal. *Math. Mag.*, 62(5):291–308, 1989.
- [2] F. Chamizo. A simple linear algebra approach to Pauli spinors. *European Journal of Physics*, 44(1):015401, oct 2022.
- [3] A. Galindo and P. Pascual. *Quantum mechanics. I. Texts and Monographs in Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1990. Translated from the Spanish by J. D. García and L. Alvarez-Gaumé.
- [4] K. Konishi and G. Paffuti. *Quantum Mechanics: A New Introduction*. Oxford University Press, 03 2009.
- [5] W. Pauli. Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons. *Zeitschrift für Physik*, 43(9):601–623, Sep 1927.
- [6] H. Rauch, A. Zeilinger, G. Badurek, A. Wilfing, W. Bauspiess, and U. Bonse. Verification of coherent spinor rotation of fermions. *Physics Letters A*, 54(6):425–427, 1975.
- [7] J. J. Sakurai and J. Napolitano. *Modern quantum mechanics*. Addison-Wesley, San Francisco, CA, 2011.
- [8] J. M. Sánchez-Ron. *Historia de la física cuántica. vol. 1: El periodo fundacional (1860-1926)*. Drakontos. Crítica, D.L.2001, Barcelona, 2005.
- [9] J. Stillwell. *Naive Lie theory*. Undergraduate Texts Math. New York, NY: Springer, 2008.
- [10] S. A. Werner, R. Colella, A. W. Overhauser, and C. F. Eagen. Observation of the phase shift of a neutron due to precession in a magnetic field. *Phys. Rev. Lett.*, 35:1053–1055, Oct 1975.