

---

Apellidos y nombre: .....

..... DNI (o pasaporte): .....

---

- 1) [2 puntos] Sea  $a$  el operador destrucción del oscilador armónico. Calcula la matriz de  $a + a^2$  como operador actuando en el subespacio generado por la base  $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ .
- 2) [2 puntos] Sea  $\Psi(x, t) = e^{-(x/L-1)^2 - i\hbar at/m} + e^{-(x/L+1)^2 - i\hbar at/m}$  la función de ondas (no normalizada) de una partícula de masa  $m$  donde  $L, \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$  son parámetros, el primero con dimensiones de longitud. Calcula  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{V(x)}{x^2}$  con  $V = V(x)$  el potencial y halla las dimensiones de  $\alpha$ .
- 3) [2 puntos] Sean los operadores  $S = |- \rangle \langle - |$  y  $T = 1 - 2|\alpha\rangle \langle \alpha|$  con  $|\alpha\rangle \in \mathbb{C}^2$  normalizado. Calcula  $(S^{2025} \otimes T^{2026})| - + \rangle$ .
- 4) [2 puntos] Demuestra que  $T = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sigma_j \otimes \sigma_j$  define un operador en  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  que verifica  $T(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle - |\beta\rangle \otimes |\alpha\rangle$  para todo  $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathbb{C}^2$ .
- 5) [0.5+0.5+0.5+0.5 puntos] Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando una pequeña justificación.
- El operador  $[\hat{p}, \hat{x}^2] + 2i\hbar\hat{x}$  es el operador nulo.
  - Con la notación del oscilador armónico se cumple  $[a + a^\dagger, (a + a^\dagger)^2 - a] = 1$ .
  - Todos los estados correspondientes a vectores normalizados de la forma  $a|++\rangle + b|+-\rangle$  con  $a, b \in \mathbb{C}$  son estados producto.
  - Un operador unitario en  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  aplica estados entrelazados en estados entrelazados.

1) Recordemos que  $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n |0\rangle$ . Sabemos que  $a|0\rangle = 0$ , por ejemplo empleando  $a^\dagger a |0\rangle = \widehat{N} |0\rangle = 0 |0\rangle$  con  $n = 0$ . Se cumple  $(aa^\dagger - a^\dagger a) |k\rangle = |k\rangle$  porque  $[a, a^\dagger] = 1$ . Tomando  $k = 0$  se sigue  $a |1\rangle = |0\rangle$  y tomando  $k = 1$ ,  $|1\rangle = aa^\dagger |1\rangle - a^\dagger |0\rangle = a(a^\dagger)^2 |0\rangle - |1\rangle = \sqrt{2} a |2\rangle - |1\rangle$ .

Con todo ello,  $a|0\rangle = 0$ ,  $a|1\rangle = |0\rangle$  y  $a|2\rangle = \sqrt{2}|1\rangle$ , lo que implica que las matrices  $A$  y  $B$  de  $a$  y de  $a + a^2$  actuando en el subespacio son, en la base indicada,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B = A + A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La segunda es la matriz buscada.

2) Escribamos  $f(x) = e^{-(x/L-1)^2} + e^{-(x/L+1)^2}$  de modo que  $\Psi(x, t) = f(x) e^{-i\hbar\alpha t/m}$ . Al despear el potencial en la ecuación de Schrödinger se obtiene

$$V(x) = \frac{i\hbar\Psi_t(x, t) + \frac{\hbar^2}{2m}\Psi_{xx}(x, t)}{\Psi(x, t)} = \frac{\hbar^2\alpha}{m} + \frac{\hbar^2 f''(x)}{2mf(x)}.$$

La derivada segunda de  $e^{-\beta x^2}$  es  $(4\beta^2 x^2 - 2\beta)e^{-\beta x^2}$ , por tanto, la de  $e^{-(x/L\pm 1)^2} = e^{-(\pm x/L+1)^2}$  es  $(4L^{-4}x^2 + P(\pm x))e^{-(x/L\pm 1)^2}$  con  $P$  un polinomio de grado menor o igual que 1. De aquí,

$$\frac{f''(x)}{x^2 f(x)} = 4L^{-4} + \frac{P(-x)}{x^2} \cdot \frac{e^{-(x/L-1)^2}}{f(x)} + \frac{P(x)}{x^2} \cdot \frac{e^{-(x/L+1)^2}}{f(x)}.$$

Las fracciones  $e^{-(x/L\pm 1)^2}/f(x)$  están acotadas y  $P(\pm x)/x^2 \rightarrow 0$ , entonces el límite buscado resulta  $\frac{\hbar^2}{2m} \cdot 4L^{-4} = 2L^{-4}m^{-1}\hbar^2$ .

Se debe cumplir que  $\hbar\alpha t/m$  es adimensional, por tanto,

$$\dim \alpha = \text{MT}^{-1} \dim \hbar^{-1} = \text{MT}^{-1} \cdot (\text{M}(\text{LT}^{-1})^2\text{T})^{-1} = \text{L}^{-2},$$

donde se ha usado que  $\hbar$  tiene dimensiones de energía por tiempo (de masa por velocidad al cuadrado por tiempo).

3) Se tiene  $S|-\rangle = |-\rangle\langle -|-\rangle = |-\rangle$ , por consiguiente,  $S^{2025}|-\rangle = |-\rangle$ . Por otro lado,  $T^2|+\rangle = (1 - 2|\alpha\rangle\langle\alpha|)(|+\rangle - 2|\alpha\rangle\langle\alpha|+\rangle) = |+\rangle - 2|\alpha\rangle\langle\alpha|+\rangle - 2|\alpha\rangle\langle\alpha|+\rangle + 4|\alpha\rangle\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|+\rangle$ . Al estar normalizado,  $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$  y los tres últimos términos se cancelan. Así pues,  $T^2|+\rangle = |+\rangle$  que implica  $T^{2026}|+\rangle = |+\rangle$ .

En definitiva,  $(S^{2025} \otimes T^{2026})|-\rangle = (S^{2025}|-\rangle) \otimes (T^{2026}|+\rangle) = |-\rangle$ .

4) Basta comprobarlo para los elementos de la base  $\mathcal{B} = \{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$  debido a la linealidad (véase la nota al final), es decir, para  $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \{|+\rangle, |-\rangle\}$ . Utilizando el producto de Kronecker, las matrices de  $\sigma_j \otimes \sigma_j$  en la base  $\mathcal{B}$  para  $j = 1, 2$  y  $3$  son, respectivamente,

$$\left( \begin{array}{c|cc} \text{O} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \text{O} \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{c|cc} \text{O} & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \text{O} \end{array} \right) \quad y \quad \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & \text{O} \\ \hline 0 & -1 & \text{O} \\ \text{O} & \text{O} & \begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \end{array} \right).$$

Por consiguiente, la matriz de  $T$  en la base  $\mathcal{B}$  es

$$\frac{1}{2}I - \frac{1}{2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Entonces  $T|++\rangle = 0 = |++\rangle - |++\rangle$ ,  $T|+-\rangle = |+-\rangle - |--\rangle$ ,  $T|-+\rangle = -|+-\rangle + |-+\rangle$  y  $T|--\rangle = 0 = |--\rangle - |--\rangle$ .

Nota: Si no ves que la linealidad permite restringirnos a  $\mathcal{B}$ , aquí van los detalles para el primer argumento: Si  $|\alpha\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$ , suponiendo la identidad para  $|\alpha\rangle = |\pm\rangle$ , por la linealidad  $T(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = aT(|+\rangle \otimes |\beta\rangle) + bT(|-\rangle \otimes |\beta\rangle) = a|+\rangle \otimes |\beta\rangle - a|\beta\rangle \otimes |+\rangle + b|-\rangle \otimes |\beta\rangle - b|\beta\rangle \otimes |-\rangle$ , que es  $|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle - |\beta\rangle \otimes |\alpha\rangle$  porque  $\otimes$  es distributivo en cada argumento.

4) Solo la última es falsa.

a)  Aplicado sobre  $\psi = \psi(x)$  resulta  $-i\hbar(x^2\psi)' - x^2(-i\hbar\psi') + 2i\hbar x\psi$ . Al sustituir  $(x^2\psi)' = 2x\psi + x^2\psi'$  todo se cancela.

b)  Se puede escribir como  $[a+a^\dagger, (a+a^\dagger)^2] - [a, a] - [a^\dagger, a]$ . Los dos primeros conmutadores son obviamente nulos y usando  $[a, a^\dagger] = 1$  se sigue el resultado.

c)  Estos vectores se pueden escribir como  $|+\rangle \otimes (a|+\rangle + b|-\rangle)$ , por tanto, dan lugar a estados producto.

d)  Sea  $T$  el operador que pasa la base de Bell a la base usual  $\{|++\rangle, |+-\rangle, |--\rangle, |-+\rangle\}$ . Es unitario porque ambas bases son ortonormales y aplica  $|\Phi_0\rangle$  que es entrelazado en  $|++\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle$  que no lo es.