Examen final | SEM. MAT. AVANZADA | Matemáticas | 26/mayo/2026

Apellidos y nombre: ....

.... DNI (o pasaporte): ....

---

1) [2 puntos] Sea a el operador destrucción del oscilador armónico. Calcula la matriz de $a+a^2$ como operador actuando en el subespacio generado por la base $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$.

2) [2 puntos] Sea $\Psi(x,t) = e^{-(x/L-1)^2 - i\hbar\alpha t/m} + e^{-(x/L+1)^2 - i\hbar\alpha t/m}$ la función de ondas (no normalizada) de una partícula de masa m donde $L, \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ son parámetros, el primero con dimensiones de longitud. Calcula $\lim_{x\to\infty} \frac{V(x)}{x^2}$ con $V = V(x)$ el potencial y halla las dimensiones de α.

3) [2 puntos] Sean los operadores $S = |-\rangle\langle-|$ y $T = 1 - 2|\alpha\rangle\langle\alpha|$ con $|\alpha\rangle \in \mathbb{C}^2$ normalizado. Calcula $(S^{2025} \otimes T^{2026})\,|-+\rangle$.

4) [2 puntos] Demuestra que $T = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} \sigma_j \otimes \sigma_j$ define un operador en $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ que verifica $T(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle - |\beta\rangle \otimes |\alpha\rangle$ para todo $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathbb{C}^2$.

5) [0.5+0.5+0.5+0.5 puntos] Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando una pequeña justificación.

a) El operador $[\widehat{p}, \widehat{x}^2] + 2i\hbar\widehat{x}$ es el operador nulo.

b) Con la notación del oscilador armónico se cumple $[a + a^\dagger, (a+a^\dagger)^2 - a] = 1$.

c) Todos los estados correspondientes a vectores normalizados de la forma $a|{+}{+}\rangle + b|{+}{-}\rangle$ con $a, b \in \mathbb{C}$ son estados producto.

d) Un operador unitario en $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ aplica estados entrelazados en estados entrelazados.