

Hoja 4

1) Sean los vectores de \mathbb{R}^3

$$\vec{u}_1 = (5, -3, 8)^t, \quad \vec{u}_2 = (2, 3, 6)^t, \quad \text{y} \quad \vec{u}_3 = (3, -6, 2)^t.$$

Calcula $\|\vec{u}_i\|$ para $i = 1, 2, 3$ y $\angle(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ y $\angle(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$ donde \angle indica el ángulo.

2) Si T es un triángulo determinado por dos vectores \vec{u} y \vec{v} tales que el producto de sus normas es 13 y su producto escalar es $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$, ¿cuál es el área de T ?

3) Explica por qué ni $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = (x_1 y_1)^2 + 2x_2 y_2$ ni $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$ definen productos escalares generalizados en \mathbb{R}^2 , donde $\vec{x} = (x_1, x_2)^t$, $\vec{y} = (y_1, y_2)^t$.

4) Muestra que

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 (PQ + P'Q'),$$

donde P' y Q' indican derivadas, define un producto escalar generalizado en $\mathbb{R}_n[x]$ (los polinomios reales de grado a lo más n). Halla a para que el producto escalar de $ax - 1$ y $2x - 8$ sea -1 .

5) En $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definimos $\langle A, B \rangle = \text{Tr}\left(A^t \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} B\right)$ donde Tr indica la traza (la suma de los elementos de la diagonal principal). Muestra que es un producto escalar generalizado. **Indicación:** Para las dos primeras propiedades explica por qué $\text{Tr}(\lambda M_1 + \mu M_2) = \lambda \text{Tr}(M_1) + \mu \text{Tr}(M_2)$ y $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(M^t)$. Para la tercera propiedad te puede resultar de ayuda la identidad $5x^2 - 6xy + 2y^2 = \frac{1}{2}(x^2 + (3x - 2y)^2)$.

6) Considera $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{C}^2$ dados por $\vec{u} = (2+3i, 8+2i)^t$ y $\vec{v} = (3+2i, 6i)^t$. Comprueba numéricamente que se cumplen para ellos las desigualdades de Cauchy-Schwarz y la triangular. Comprueba también que si cambiamos \vec{v} por $(5+i, 10-6i)^t$ la desigualdad de Cauchy-Schwarz se vuelve una igualdad.

7) Halla una base ortogonal del subespacio $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 3x_2 + 20x_3 = 0\}$.

8) Aplica el proceso de Gram-Schmidt a $\{(3, 6, 2)^t, (9, 4, -1)^t, (11, 1, 5)^t\}$ para producir una base ortonormal \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 y halla las coordenadas de $(1, 1, 0)^t$ en \mathcal{B} .

9) Halla una base ortogonal del subespacio V de \mathbb{R}^4 definido por

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0\}.$$

10) Encuentra una base ortogonal del subespacio V de \mathbb{C}^3 definido por

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^3 : x_1 - x_2 + (i-2)x_3 = 0\}.$$

11) Ortogonaliza la base $\{x-1, 2x+2, 3x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ cuando se emplea el producto escalar $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 PQ$.

12) Calcula la proyección ortogonal de $(3, 11, 11)^t \in \mathbb{R}^3$ sobre el subespacio de \mathbb{R}^3 con base $\{(2, 1, -1)^t, (1, -4, -2)^t\}$.

13) Halla la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = (-3, 11, 1)^t \in \mathbb{R}^3$ en el subespacio que determina el plano $2x_1 - 5x_2 + x_3 = 0$ de \mathbb{R}^3 . ¿Cuál es la distancia del punto $(-3, 11, 1)$ al plano?

14) Halla la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = (8, 3, 2, 0)^t \in \mathbb{R}^4$ al subespacio de \mathbb{R}^4 definido por

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = x_1 + 6x_2 - 2x_3 - x_4 = 0\}$$

y utilízala para hallar la distancia del punto $(8, 3, 2, 0)$ a V .

15) Busca alguna aplicación *online* o un paquete matemático que haga integrales y, con su ayuda, calcula la proyección ortogonal de $6 + 2x + 10x^2 + 6x^3 \in \mathbb{R}_3[x]$ sobre el subespacio $\{P \in \mathbb{R}_3[x] : P(1) = P'(1) = 0\}$ cuando se usa el producto escalar dado por $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 PQ$.

16) Considera el siguiente subespacio de \mathbb{C}^3 de un ejercicio anterior:

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^3 : x_1 - x_2 + (i - 2)x_3 = 0\}.$$

Halla la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = (2 - i, 2i, 2i)^t$. Nota que en el producto escalar de \mathbb{C}^n el orden es importante.

17) Indica si las siguientes matrices son unitarias:

$$\frac{\sqrt{2}}{10} \begin{pmatrix} 5 - 3i & 4i \\ 4i & 5 + 3i \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 + i & 2 + 2i \\ -2 + 2i & 4 - i \end{pmatrix}.$$

18) Halla todas las matrices unitarias $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ que tienen $u_{11} = u_{22} = \frac{1}{2}(i - 1)$ y u_{12} con parte real $1/2$.

19) Si la primera y la segunda columna de una matriz ortogonal de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ son respectivamente $c_1 = (2/3, -2/3, -1/3)^t$ y $c_2 = (-1/3, -2/3, 2/3)^t$ halla todas las posibilidades para la tercera columna.

20) ¿Cuántas matrices hay en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que sean a la vez ortogonales y diagonales? Aparte de ellas, ¿existen matrices en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonales y triangulares superiores? Recuerda o aprende que las matrices triangulares superiores son las que tienen $a_{ij} = 0$ para $i > j$.