Hoja 1

1) Resuelve los siguientes sistemas con matriz escalonada:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= -5, \\ 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= 10, \\ 2x_3 + 2x_4 &= -2, \\ x_4 &= 1 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} (1+2i)x_1 + (2+3i)x_2 &= -6+5i, \\ (3+4i)x_2 &= -11+2i. \end{aligned}$$

2) Resuelve el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 7 & 11 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) Resuelve el sistema con números complejos

$$\begin{array}{cccc} x_1 & & +ix_3 & = & 0, \\ ix_1 & & +(1+i)x_3 & = & -2-i, \\ & x_2 & +(2+i)x_3 & = & -1-i. \end{array}$$

4) Expresa todas las soluciones del siguiente sistema como $\vec{x} = \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2$ donde todas las coordenadas de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son enteras.

$$\begin{array}{cccccc} 2x_1 & +2x_2 & +7x_3 & +3x_4 & = & 0, \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & 0, \\ -x_1 & -x_2 & +x_3 & & = & 0. \end{array}$$

5) Halla todas las soluciones del sistema

$$\begin{array}{cccccc} 3x_1 & -8x_2 & +11x_3 & +x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & -5x_2 & +7x_3 & +x_4 & = & 0, \\ 5x_1 & -13x_2 & +18x_3 & +2x_4 & = & 0. \end{array}$$

6) En un examen pasado de acceso a la universidad se pedía discutir el sistema

$$\begin{array}{ccccc} 2x & +\lambda y & +\lambda z & = & 1-\lambda, \\ x & +y & +(\lambda-1)z & = & -2\lambda, \\ (\lambda-1)x & +y & +z & = & \lambda-1 \end{array}$$

en términos del parámetro real λ. Hazlo con lo aprendido en este curso.

7) Calcula la última fila no nula de la forma escalonada reducida de la matriz ampliada del sistema del problema anterior para $\lambda = -1$ y para $\lambda = 1+i$.

8) Halla las inversas de las siguientes matrices compuestas por ceros y unos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9) Sea a un parámetro real no nulo. Comprueba que la matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha + 3\beta & -\beta & -2\beta \\ 2\beta & \alpha & 2\alpha - 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad \alpha = 2a - a^{-1},\ \beta = -a + a^{-1}$$

tiene la propiedad de que al cambiar a por a^{-1} se obtiene su inversa. *Indicación*: Comprueba que tras el cambio α y β se transforman en $\alpha + 3\beta$ y $-\beta$.

10) Halla todas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \quad \text{con} \quad ad - bc = -1$$

tales que coinciden con su inversa. Escribe dos ejemplos, uno con $a, b, c, d \in \mathbb{R} - \{0\}$ y otro con $a, b, c, d \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

11) Considera

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcula las inversas de A, B y de AB^{-1}. *Indicación*: Para la última puedes aprovechar cálculos ya hechos.

12) Si A es una matriz que cumple $A^3 = O$ se sabe que $I + 2A$ es siempre invertible y su inversa es de la forma $I + xA + yA^2$. Halla x e y. Si quieres comprobar tu resultado con un ejemplo puedes tomar $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ con todos sus elementos nulos excepto $a_{12} = a_{23} = 1$.

13) Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas dando una pequeña explicación en el primer caso o un contraejemplo en el segundo.

a) Si la matriz de coeficientes de un sistema es cuadrada no puede tener infinitas soluciones.

b) Si A tiene las dos primeras columnas iguales entonces $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene infinitas soluciones.

c) Si A es invertible entonces la inversa de AA^t siempre coincide con $A^{-1}(A^{-1})^t$.

d) Si A es invertible entonces $A^2 + 4I$ también lo es.