14) Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matriz simétrica ($A = A^t$) con $a_{rs} = r - s$ para $r \geq s$. Demuestra que su determinante es $(-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}$. Indicación: Efectúa la operación de filas $f_j \mapsto f_j + f_1$, mueve la última fila al primer lugar y aplica eliminación de Gauss.

Nota: Este ejercicio de la hoja 3 sería bastante difícil sin la indicación. Con ella, solo hay que seguirla al pie de la letra. En la solución escribo las matrices explícitamente, con puntos suspensivos, en vez de dar expresiones sintéticas con fórmulas que son más precisas matemáticamente, pero que pueden dificultar la comprensión.

Solución. Reflexionando un poco sobre el significado de la notación, se tiene que el determinante del que nos habla el enunciado es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots\dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots\dots & n-4 & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & \dots\dots & n-5 & n-4 & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & \dots\dots & n-6 & n-5 & n-4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & n-6 & \dots\dots & 1 & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & \dots\dots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Lo primer que dice la indicación es que sumemos a cada fila la primera. Esto no cambia el valor del determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots\dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 & 7 & \dots\dots & 2n-7 & 2n-5 & 2n-3 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 6 & \dots\dots & 2n-8 & 2n-6 & 2n-4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & \dots\dots & 2n-9 & 2n-7 & 2n-5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ n-2 & n-2 & n-2 & n-2 & n-2 & \dots\dots & n-2 & n-2 & n \\ n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & \dots\dots & n-1 & n-1 & n-1 \end{vmatrix}.$$

Con ello, excepto la primera y la última fila, que son especiales, la fila j consta de un $j-1$ repetido j veces seguido de un $j+1$ y otros números.

Para pasar la fila n-ésima al primer lugar debemos hacer $n-1$ intercambios de filas y hay que pagar con un signo menos $n-1$ veces.

$$|A| = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & \dots\dots & n-1 & n-1 & n-1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots\dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 & 7 & \dots\dots & 2n-7 & 2n-5 & 2n-3 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 6 & \dots\dots & 2n-8 & 2n-6 & 2n-4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & \dots\dots & 2n-9 & 2n-7 & 2n-5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ n-2 & n-2 & n-2 & n-2 & n-2 & \dots\dots & n-2 & n-2 & n \end{vmatrix}.$$

Ahora solo resta aplicar eliminación de Gauss. El procedimiento natural pasa por sacar un factor común $n-1$ de la primera fila y después $f_j \mapsto f_j - (j-2)f_j$ con $j > 2$. Si la fórmula te despista, piensa solo en que queremos hacer ceros en la primera columna bajo la segunda fila.

El resultado es $|A| = (-1)^{n-1}(n-1)\Delta$ donde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots\dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots\dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 & \dots\dots & 2n-8 & 2n-6 & 2n-4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & \dots\dots & 2n-10 & 2n-8 & 2n-6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \dots\dots & 2n-12 & 2n-10 & 2n-8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\dots & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ahora bien, como Δ es el determinante de una matriz escalonada, coincide con el producto de los elementos en la diagonal (principal). Estos elementos son doses excepto por dos unos iniciales. Es decir, hay $n-2$ doses y se concluye $\Delta = 2^{n-2}$ que da $|A| = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$, que coincide con la fórmula del enunciado porque $(-1)^1 = (-1)^{-1}$.