Apellidos y nombre: ....

.... DNI (o pasaporte): ....

1) En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual consideramos los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y el subespacio W dados por

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 & = & 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 6x_4 & = & 0 \end{array} \right\}.$$

a) [3 puntos] Encuentra un vector $\vec{w} \in W$ con $\|\vec{w}\| = 5$ que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) [0.5 puntos] ¿Es $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ una base ortogonal de W?

2) Consideremos las matrices y el vector

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) [2 puntos] Halla $C, D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ con D diagonal tales que $A = CDC^{-1}$.
b) [1.5 puntos] Calcula $BA^{2025}\vec{v}$.

3) [$3 = 1 + 1 + 1$ puntos] Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En las dos primeras no es necesario justificar nada y un error penaliza $-0{,}5$ (dejarlo en blanco no descuenta). En la tercera se requiere una breve justificación (una explicación si es cierta o un contraejemplo si es falsa) y no hay penalización por error.

- V. ☐ F. ☐ El triángulo de vértices $(1,4)$, $(7,9)$, $(5,7)$ tiene área 1.
- V. ☐ F. ☐ Siempre que $A, B \in \mathcal{M}_2$ se cumple $|A^2 - B^2| = |A+B||A-B|$.
- V. ☐ F. ☐ La matriz $A = I - 2\|\vec{v}\|^{-2}\vec{v}\vec{v}^{\,t}$ es ortogonal para cualquier $\vec{v} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$.

  Nota: $\vec{v}^{\,t}$ significa la traspuesta cuando $\vec{v}$ se considera como matriz columna en $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

  Justificación:

El espacio a partir de aquí lo puedes usar si el hueco destinado a alguno de los problemas no te resulta suficiente (por favor, indícalo)**.**