Matrices y determinantes

Ingeniería informática Curso: Álgebra

Fernando Chamizo https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/

Comentarios

Comenzamos con temas que conforman lo que se llama álgebra lineal. Recordaremos algunos conceptos sobre matrices, vectores y determinantes. Posiblemente lo único que no será un repaso es un importante algoritmo para transformar matrices en otras más simples que se usará profusamente en el curso.

1. Repaso de matrices

Una *matriz* $m \times n$ es solo una tabla de números con m filas y n columnas ($\mathsf{altura} \times \mathsf{base}$). Denotaremos mediante $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ al conjunto de todas las matrices $m \times n$ tal que los números pertenecen a K. En este curso solo nos ocuparemos de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, aunque casi todos los resultados son igualmente válidos en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Las *matrices cuadradas*, con $m = n$, son más importantes que el resto y abreviaremos $m \times n$ por n en la notación. Por ejemplo $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ son las matrices reales 2×2. Como solo nos ocuparemos de matrices reales, no hay peligro en aligerar las notaciones $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a $\mathcal{M}_{m\times n}$ y $\mathcal{M}_n$.

Las matrices se suelen denotar con letras mayúsculas y sus *elementos*, los números que la componen, con la letra minúscula correspondiente, indicando con subíndices la fila y la columna, en este orden. Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \end{pmatrix} \implies a_{12} = 3, \quad a_{22} = 11, \quad a_{23} = 13.$$

A veces se escribe $A = (a_{ij})$, o $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{2,3}$ si se quiere indicar el número de filas y columnas.

La matriz que tiene todos sus elementos cero se conoce como *matriz nula* y la denotaremos con O. Entre las matrices cuadradas destacan las *diagonales* cuyo nombre se explica por sí solo: son las matrices D con $d_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$. Si además $d_{ii} = 1$ para cada i, se dice que tenemos la *matriz identidad*, denotada por I.

Una operación importante sobre las matrices, que a este nivel parecerá arbitraria, es la *trasposición*, consistente en intercambiar filas y columnas. De esta forma, convierte matrices de $\mathcal{M}_{m\times n}$ en matrices de $\mathcal{M}_{n\times m}$. Se suele indicar con el superíndice t. Un par de ejemplos son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

La suma de dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ se lleva a cabo de la manera natural sumando elemento a elemento. Lo mismo ocurre con la resta. La multiplicación de dos matrices solo se define si el número de columnas de la primera coincide con el número de filas de la segunda. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times l}$ entonces $AB \in \mathcal{M}_{m\times l}$. El elemento ij del producto se calcula mediante la fórmula $\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$. Esto equivale a decir que se hace una operación como la del producto escalar habitual de la fila i de A por la columna j de B y el resultado da lugar al elemento ij. Además del producto de dos matrices, es conveniente definir el producto de una matriz por un número multiplicando cada elemento por dicho número: los elementos de λA son λa_{ij}.

Ejemplo. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, hallar $A+B$, $2A$ y AC.

Se tiene

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad 2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad AC = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, el 6 que aparece en el último elemento proviene de $2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1$.

Más adelante hay un comentario para los que se pregunten cómo a alguien en su sano juicio se le puede ocurrir que esta es una manera sensata de multiplicar tablas.

En relación con la suma y el producto, la trasposición cumple

$$(A + B)^t = A^t + B^t, \qquad \text{y} \qquad (AB)^t = B^t A^t.$$

El cambio de orden en la segunda fórmula no es ninguna tontería porque si $A, B \in \mathcal{M}_n$ es muy inusual que AB y BA coincidan, en caso de que lo hagan se dice que *conmutan*. Por si te suena la terminología, para $n > 1$ el producto en $\mathcal{M}_n$ no tiene la *propiedad conmutativa*, pero sí la *propiedad asociativa*. Esto último significa que $A(BC)$ y $(AB)C$ dan lo mismo.

Dicho sea de paso, las matrices O e I son claramente elementos neutros de la suma y de la multiplicación de matrices cuadradas. Es decir, $A + O = O + A = A$ y $AI = IA = A$.

Ejemplo. Mostrar dos matrices de $\mathcal{M}_2$ que no conmuten.

Casi cualquier elección de un par de matrices al azar es válida. Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En cursos anteriores un *vector* era una lista de dos o tres números, sus *coordenadas*. En realidad, el concepto de vector es mucho más general y abarca objetos tan alejados de esta intuición como señales de telecomunicaciones o partículas cuánticas. Aquí nos centramos en los vectores "de toda la vida", con la única salvedad de que no limitaremos el número de coordenadas. Así, un vector es una lista de n números y en este curso es conveniente escribirlos en vertical, es decir, como una matriz $n \times 1$, lo cual es un fastidio al escribir un libro o unos apuntes porque las líneas van en horizontal. Un truco a utilizar cuando sea tipográficamente conveniente es levantar vectores "tumbados" con el símbolo de trasposición. El conjunto de todos los vectores formados por n coordenadas reales se denomina $\mathbb{R}^n$. Habitualmente se indica que algo es un vector escribiendo una flecha sobre su nombre. Así son ejemplos de vectores:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = (2,3,5,7)^t \in \mathbb{R}^4 \quad \text{y} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2025 \\ 2026 \\ \pi + \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

El vector con todas sus coordenadas cero, llamado *vector nulo*, se indica con $\vec{0}$.

La manía tan rara de que los vectores ahora estén en vertical proviene de que es conveniente multiplicar matrices por vectores y que resulte otro vector. Concretamente, si consideramos un vector $\vec{v}$ como una matriz $n \times 1$ entonces para $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ se tendrá $A\vec{v} \in \mathcal{M}_{m\times 1}$, es decir, es un vector de m coordenadas.

Comentario. La razón de ser de las matrices es que funcionan como "máquinas" que pasan vectores a vectores (en rigor, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ actúa como una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$) y que respetan ciertas propiedades. Si aceptamos esta manera de entender las matrices, tendremos una explicación acerca de la extraña definición de su multiplicación. Al aplicar la máquina B sobre $\vec{v}$ y después la máquina A al resultado, obtendremos $A(B\vec{v})$. Si queremos que esto sea la máquina AB aplicada a $\vec{v}$, no hay más remedio que definir este producto de la extraña forma habitual.

Ejemplo (Teórico). Para $M \in \mathcal{M}_n$ definamos la función $f_M : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ como $f_M(\vec{x}) = M\vec{x}$. Explicar la relación entre la fórmula $f_A \circ f_B = f_{AB}$ y la propiedad asociativa del producto.

Por definición, $(f_A \circ f_B)(\vec{x}) = f_A\big(f_B(\vec{x})\big) = f_A(B\vec{x}) = A(B\vec{x})$, mientras que $f_{AB}(\vec{x}) = (AB)\vec{x}$. Pensando en $\vec{x}$ como una matriz $n\times 1$, la propiedad asociativa del producto de matrices implica que ambas expresiones coinciden.

Comentario. Los vectores sirven para representar magnitudes, como las fuerzas en física, en las que no solo es importante el tamaño o intensidad sino también la dirección, aunque tienen otras aplicaciones en las que esta motivación es menos obvia, por ejemplo a los gráficos realistas generados por ordenador (CGI). La introducción de los vectores es relativamente tardía en la historia de las matemáticas. De hecho, la impartición en las universidades de la teoría matemática que los involucra, llamada *álgebra lineal*, no estaba todavía totalmente generalizada a mediados del siglo XX, mientras que ahora forma parte de cualquier plan de estudios científico. Su ubicuidad actual se manifiesta dentro del *hardware* informático en las GPU, unas maravillas tecnológicas, objeto de adoración para cualquier *gamer*, que hacen operaciones relacionadas con vectores y matrices a una velocidad pasmosa.

2. El método de eliminación de Gauss

El propósito de este apartado es introducir un algoritmo que transforma una matriz en otra con estructura más simple. Por ahora hay que tener fe en la utilidad de este proceso, más adelante veremos que permite sistematizar y abreviar la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Se dice que A es una *matriz escalonada* si sus filas nulas, si las hubiera, están al final y cada fila no nula tiene siempre más ceros a la izquierda que la que está encima. Para clarificar más la situación e ilustrar el nombre de "escalonada", aparte de la matriz nula, estas son todas las plantillas posibles para las matrices escalonadas 2×3 distintas de O:

$$\begin{pmatrix} p_1 & * & * \\ 0 & p_2 & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_1 & * & * \\ 0 & 0 & p_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & p_1 & * \\ 0 & 0 & p_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & p_1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $*$ indican números cualesquiera y los p_i son no nulos. Estos números p_i que marcan el comienzo de un "escalón" se llaman *pivotes*. Es decir, los pivotes son los primeros valores no nulos de cada fila. Todo lo que hay bajo los pivotes o a su izquierda son ceros y los escalones siempre deben tener altura uno.

La *eliminación de Gauss* o *reducción de Gauss* es un sencillo algoritmo que transforma una matriz en otra escalonada. Consiste en ir generando ordenadamente en las columnas los ceros necesarios empleando las siguientes *transformaciones elementales*:

- T1. Sumar a una fila un múltiplo de otra.
- T2. Multiplicar una fila por un número distinto de cero.
- T3. Intercambiar dos filas.

En realidad T2 no es estrictamente necesaria. Para una matriz típica basta con la primera y algunas especiales requieren también T3.

Veamos cómo funciona sobre

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -4 & 4 \\ -2 & 3 & 3 & -11 \\ 10 & -2 & -10 & 24 \end{pmatrix}.$$

Conservando la primera fila f_1, queremos crear ceros bajo $a_{11} = 2$, el primer pivote. Para ello, aplicamos la primera transformación elemental en la forma $f_2 \mapsto f_2 - f_1$, $f_3 \mapsto f_3 + f_1$,

$f_4 \mapsto f_4 - 5f_1$. Así pues

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -4 & 4 \\ -2 & 3 & 3 & -11 \\ 10 & -2 & -10 & 24 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Aunque no sea necesario, para tratar con números enteros pequeños, apelemos a la segunda transformación elemental efectuando $f_2 \mapsto f_2/2$ y $f_4 \mapsto f_4/3$. Tras ello, para crear ceros bajo el segundo pivote $a_{22} = 1$ aplicamos $f_3 \mapsto f_3 - 2f_2$, $f_4 \mapsto f_4 - f_2$. Por último, si $f_4 \mapsto f_4 - f_3/3$, la última fila se anula y llegamos a la forma escalonada indicada a la derecha:

$$\longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La tercera transformación elemental, aparte de para simplificar cálculos, se usa cuando en el lugar en que debiera haber un pivote hay un cero. El siguiente ejemplo ilustra este punto.

Ejemplo. Aplicar eliminación de Gauss a la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

para obtener una matriz escalonada.

No podemos tomar a_{11} como pivote porque es nulo. Para remediarlo, intercambiamos las dos primeras filas y después aplicamos, como antes, T1 para crear los ceros:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \underset{f_3 \mapsto f_3 - f_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{f_3 \mapsto f_3 - f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La eliminación de Gauss puede dar matrices escalonadas con diferentes elementos dependiendo de cómo procedamos, aunque su estructura es siempre la misma. En particular, el número de escalones (de pivotes) después de aplicar reducción de Gauss a una matriz A está bien definido. Se llama *rango* de A y se utiliza la notación $\operatorname{rg}(A)$. Así, en los dos ejemplos anteriores se tiene $\operatorname{rg}(A) = 3$ y $\operatorname{rg}(B) = 2$.

Una manera de forzar la unicidad de la forma escalonada es que, después de aplicarla, utilicemos la segunda transformación elemental para que todos los pivotes sean unos y la primera transformación elemental para que todos los números encima de cada pivote sean ceros. De esta forma, los unos que conforman los pivotes son los únicos elementos no nulos en su columna. Por ejemplo, para matrices 2×3 distintas de O todos los posibles resultados son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $*$ indican números cualesquiera.

Esta forma extendida de la eliminación de Gauss se llama *eliminación de Gauss-Jordan* o *reducción de Gauss-Jordan*. La matriz resultante se dice que es la *forma escalonada reducida* de la matriz de partida.

Veamos cómo actúa sobre

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{tras la reducción de Gauss} \quad A \underset{f_2 \mapsto f_2 - \frac{3}{2} f_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

Debemos multiplicar la primera fila por $1/2$ y la segunda por $-2/11$ para que los pivotes sean uno y después crear un cero encima del segundo pivote:

$$\underset{\substack{f_1 \mapsto f_1/2 \\ f_2 \mapsto -2f_2/11}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{f_1 \mapsto f_1 - 3f_2/2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seguro que te estás preguntando qué tiene esto de particular. Una de sus aplicaciones es efectuar la "división" de matrices cuando es posible.

Dada un matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n$, se dice que es *invertible* y que $A^{-1} \in \mathcal{M}_n$ es su *matriz inversa* si $A^{-1}A = I$ y $AA^{-1} = I$. En realidad, cualquiera de estas igualdades implica la otra (aunque no es sencillo probarlo a este nivel).

Dos propiedades de la inversa con respecto al producto y a la traspuesta que es conveniente tener en mente son:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \qquad \text{y} \qquad \big(A^t\big)^{-1} = \big(A^{-1}\big)^t$$

para A y B invertibles.

Ejemplo. Demostrar las propiedades anteriores

Según la definición, todo lo que hay que comprobar es

$$B^{-1}A^{-1}AB = ABB^{-1}A^{-1} = I \qquad \text{y} \qquad \big(A^{-1}\big)^t A^t = A^t \big(A^{-1}\big)^t = I.$$

Empleando $A^{-1}A = BB^{-1} = I$ y que multiplicar por la matriz identidad I deja las matrices invariantes, lo primero se reduce a $B^{-1}B = AA^{-1} = I$, que se sigue de la definición de inversa. Lo segundo se obtiene trasponiendo $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Una pregunta natural es si hay un método computacionalmente asequible para saber si una matriz es invertible. En realidad ya lo conocemos, es la reducción de Gauss, gracias al resultado:

$$A \in \mathcal{M}_n \quad \text{invertible} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{rg}(A) = n$$

La prueba de este resultado no está a nuestro alcance porque está relacionada con la conexión de la eliminación de Gauss con la resolución de sistemas de ecuaciones, que veremos más adelante (de hecho, nuestra situación teórica es todavía más precaria, pues todavía no sabemos probar que el rango esté bien definido). Por otro lado, seguramente recuerdes que había una caracterización con determinantes, la repasaremos en la siguiente sección.

En el caso de $\mathcal{M}_2$ se tiene

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad ad - bc \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Además, si $ad - bc = 0$ no existe la inversa.

Ejemplo (Teórico). Demostrar este resultado.

Si $ad - bc \neq 0$, un cálculo muestra que la fórmula dada para A^{-1} realmente cumple $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. Según la caracterización de las matrices invertibles, falta demostrar que $ad - bc = 0$ implica $\text{rg}(A) < 2$. Por reducción de Gauss, se ve que este es el caso si $a \neq 0$ o si $c \neq 0$:

$$A \underset{f_2 \mapsto f_2 - \frac{c}{a} f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} \end{pmatrix} \text{ si } a \neq 0, \qquad A \underset{f_1 \leftrightarrow f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \underset{f_2 \mapsto f_2 - \frac{a}{c} f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & \frac{bc-ad}{c} \end{pmatrix} \text{ si } c \neq 0.$$

En el caso restante $a = c = 0$, es bastante obvio que $\text{rg}(A) < 2$.

Ejemplo. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$ decidir si son invertibles y en caso afirmativo hallar la inversa.

Para la primera $ad - bc = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1$ y para la segunda $ad - bc = 6 \cdot 5 - 3 \cdot 10 = 0$, entonces solo A es invertible. Ahora

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow[\text{(fórmula)}]{} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para dimensiones mayores, cuando uno pide a un ordenador con *software* adecuado que calcule una matriz inversa, no utilizará la fórmula con determinantes que seguramente te contaron en un curso anterior, porque daría lugar a una cantidad ingente de cálculos. Lo que hará es utilizar la eliminación de Gauss-Jordan. El esquema es:

$$(A|I) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} (I|A^{-1}).$$

La barra vertical es solo para separar, no tiene significado matemático. La condición $\operatorname{rg}(A) = n$ para que exista inversa asegura que realmente podemos transformar A en I mediante eliminación de Gauss-Jordan y así completar este esquema.

Ejemplo. Calcular la inversa de la siguiente matriz utilizando eliminación de Gauss-Jordan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Primero aplicamos la reducción de Gauss a $(A|I)$,

$$(A|I) \underset{\substack{f_2 \mapsto f_2 - 2f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 + f_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{f_3 \mapsto f_3 - 3f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Los pivotes ya son unos y solo resta crear los ceros encima de ellos:

$$\underset{f_1 \mapsto f_1 - 2f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{f_1 \mapsto f_1 + 7f_3 \\ f_2 \mapsto f_2 - 3f_3}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 54 & -23 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -23 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

En definitiva,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 54 & -23 & 7 \\ -23 & 10 & -3 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para dar publicidad (un poco engañosa) al método incidiendo en la idea anterior, calculemos de forma espectacularmente rápida la inversa de una matriz 4×4 con muchos ceros.

Ejemplo. Hallar la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por eliminación de Gauss-Jordan, todo se reduce a:

$$(A|I) \underset{f_1 \leftrightarrow f_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{f_3 \leftrightarrow f_4}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{c|cccc} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ I & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

La inversa es la matriz que ha quedado a la derecha.

En favor de lo que ya conoces, sí es cierto, como hemos visto, que apenas requiere esfuerzo escribir la fórmula general para la inversa de una matriz 2×2 si hemos memorizado la fórmula. De todas formas, evidentemente, el resultado será el mismo si procedemos aplicando eliminación de Gauss-Jordan. Revisemos un ejemplo anterior.

Ejemplo. Calcular la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ empleando eliminación de Gauss-Jordan.

En la aplicación de la reducción de Gauss parece conveniente intercambiar primero las filas para que no aparezcan denominadores:

$$(A|I) \underset{f_1 \leftrightarrow f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{f_2 \mapsto f_2 - 2f_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Cambiamos de signo f_2 para conseguir que el pivote sea 1 y creamos el cero encima de él:

$$\underset{f_2 \mapsto -f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{f_1 \mapsto f_1 - 3f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) = \left(I|A^{-1}\right).$$

Como esperábamos, el resultado es el mismo que antes.

3. Determinantes

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ definimos su *determinante*, denotado con $|A|$ o con $\det(A)$, como a_{11} si $n = 1$ y de manera recursiva para $n > 1$ como

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{i1} d_i$$

donde d_i es el determinante de la matriz que resulta al suprimir la primera columna y la i-ésima fila de A.

Para $n = 2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11} \det(a_{22}) + (-1)^1 a_{21} \det(a_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

que coincide con el denominador de la solución general en el caso 2×2. Respecto a la notación, para evitar sobrecargarla, tanto al escribir $|A|$ como $\det(A)$ se omiten los paréntesis de la matriz A escrita en términos de sus elementos.

Para $n = 3$ la definición nos dice

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^1 a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^2 a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Si evaluamos estos tres determinantes con lo que sabemos del caso $n = 2$, obtendremos una fórmula con seis sumandos.

Los casos $n = 2$ y $n = 3$ son tan comunes que nadie usa esta definición. Para $n = 2$, simplemente se memoriza el resultado. La imagen mental es la de un aspa en la que la línea descendente corresponde al producto con signo positivo y la ascendente con el signo negativo:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

En el caso $n = 3$ hay una regla mnemotécnica llamada *regla de Sarrus*. Una de las formas de presentarla se parece al caso $n = 2$, pero requiere tres líneas descendentes y tres ascendentes, bajo la misma regla de signos, que se dibujan sobre la matriz duplicada de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \quad \longrightarrow \quad a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \cdots - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Otra forma de presentarla consiste en dibujar estas líneas como líneas quebradas en la matriz sin duplicar, lo que da lugar a una especie de estrella de David cruzada por una diagonal tanto para los términos positivos como para los negativos.

Ejemplo. Calcular el determinante de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ con la definición y la regla de Sarrus.

Con la definición recursiva calcularíamos:

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-7) - 1(15) + 0 = -29$$

y con la regla de Sarrus:

$$\det(A) = 2(-1) \cdot 5 + 3 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 2 - 0(-1) \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \cdot 3 = -29.$$

No es común usar el procedimiento recursivo de la definición en cálculos prácticos para $n > 3$. Esto se debe a que la cantidad de cálculos enseguida se vuelve inmensa. Por ejemplo, para matrices genéricas 5×5 el determinante está compuesto por 120 sumandos y para $n = 60$ este número es comparable al estimado de partículas en el universo observable, inasequible, por tanto, para cualquier ordenador imaginable. La definición, sin embargo, es útil para obtener algunos resultados teóricos y sobre matrices especiales. Si A es *matriz triangular superior*, esto es, una matriz cuadrada con $a_{ij} = 0$ para $i > j$, entonces un razonamiento inductivo muestra que el determinante es el producto de los elementos de la *diagonal principal* (la que va de noroeste a sureste). Una matriz escalonada es triangular superior, por tanto,

$$A \in \mathcal{M}_n \text{ escalonada } \Longrightarrow \det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

Claramente, si $\text{rg}(A) \neq n$ estamos multiplicando por cero y el determinante se anula.

El truco que aplican los paquetes matemáticos para calcular determinantes grandes, es su invariancia, hasta cierto punto, por eliminación de Gauss, pasando el cálculo a una matriz escalonada. Todo lo que hay que saber está en el siguiente resultado:

Para cualquier matriz cuadrada:

a) T1 *deja invariante el determinante.*

b) T2 *multiplica el determinante por el número que se ha multiplicado la fila.*

c) T3 *cambia el signo del determinante.*

Antes de ver ejemplos numéricos, extraigamos una consecuencia teórica. Sabemos que una matriz cuadrada $n \times n$ es invertible si y solo si el rango es n, lo que equivale a que los pivotes de la forma escalonada aparezcan en la diagonal. Según a), b) y c) las transformaciones elementales no cambian la anulación o no del determinante. Recordando el uso de la reducción de Gauss-Jordan para el cálculo de la inversa, se tiene que para $A \in \mathcal{M}_n$

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n \Leftrightarrow A \text{ invertible}.$$

Por tanto, el determinante está relacionado con problemas que hemos abordado antes. Una consecuencia más simple de c) es que una matriz cuadrada con dos filas iguales tiene determinante nulo, en particular, no es invertible.

Ejemplo. Calcular el determinante de la siguiente matriz usando las transformaciones elementales:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -1 & 4 & 22 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Una posible manera de proceder es:

$$|A| \underset{f_1 \mapsto f_1/2}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 22 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{f_2 \mapsto f_2 + f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 - f_1}}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 24 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} \underset{f_3 \mapsto f_3 + f_2/7}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 24 \\ 0 & 0 & 3/7 \end{vmatrix} = 6.$$

Si hubiéramos comenzado intercambiando la primera y la tercera fila para tener un 1 como pivote, otra posibilidad sería:

$$|A| \underset{f_1\leftrightarrow f_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 22 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} \underset{\substack{f_2\mapsto f_2+f_1 \\ f_3\mapsto f_3-2f_1}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 21 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} \underset{f_3\mapsto f_3-f_2/3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 21 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6.$$

Los resultados coinciden aunque las cuentas intermedias sean distintas.

Comentario. Las propiedades b) y c) se siguen por inducción tomando como caso inicial $n = 1$ y $n = 2$, respectivamente. Estos casos iniciales son triviales. El paso de inducción es fácil en b). Digamos que es la primera fila la que multiplicamos por un número λ. La hipótesis de inducción asegura que todos los d_i excepto d_1 se multiplican por λ, así pues, la matriz tras T2 tiene determinante $(\lambda a_{11})d_1 + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i-1}a_{i1}(\lambda d_i) = \lambda|A|$, donde los paréntesis son innecesarios, solo indican el orden de las operaciones.

Para c) el paso de inducción es ligeramente más complicado. Consideremos, por ejemplo, que hemos intercambiado las filas 1 y 2. La hipótesis de inducción asegura que d_3, d_4,..., d_4 cambian de signo. Por otro lado, d_1 y d_2 se intercambian. Entonces el determinante de la nueva matriz es $a_{21}d_1 - a_{11}d_1 + \sum_{i=3}^{n}(-1)^{i-1}a_{i1}(-d_i) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}a_{i1}d_i = -|A|$. Un argumento similar muestra que lo mismo ocurre si intercambiamos cualquier otro par de filas.

Finalmente, para probar a) cuando se aplica T1 a la primera fila, es conveniente considerar un resultado más general que afirma que si $A, B, C \in \mathcal{M}_n$ solo difieren en la primera fila, de modo que la primera fila de C es la suma de las de A y B, entonces $|A|+|B| = |C|$. Esto es trivial para $n = 1$ y el paso de inducción es bastante sencillo. Ahora, aplicar T1 a $A \in \mathcal{M}_n$ sumando a la primera fila la segunda multiplicada por λ es como pasar de A a C tomando B con las dos primeras filas proporcionales, lo que por b) y c), que ya hemos probado, implica $|B| = \lambda|B| = -\lambda|B|$ y esto solo puede darse si $|B| = 0$. Por tanto, $|A| = |C|$, esto es, el determinante queda invariante como afirma a). De nuevo, si en vez de la primera y la segunda filas elegimos otras, el argumento es similar.

Además de esta suerte de invariancia por eliminación de Gauss expresada por a), b) y c), los determinantes tienen dos propiedades que son bastante sorprendentes con nuestra definición. Si $A, B \in \mathcal{M}_n$ entonces siempre se cumple

$$|A| = |A^t| \qquad \text{y} \qquad |AB| = |A||B|.$$

Si pensamos en eliminación de Gauss, parece milagroso que A y A^t tengan el mismo determinante, porque las cuentas no se parecen en nada. Una consecuencia inmediata es que *todo lo que hemos dicho relativo a determinantes con filas, se puede decir con columnas.* También es llamativo que exista una relación tan limpia para el determinante de un producto. No entraremos aquí en las pruebas, que no son fáciles. Si te inquieta esta omisión matemática, hay un alivio de urgencia más adelante.

La propiedad del producto asegura que por mucho que multipliquemos por sí misma una matriz de determinante 1 el determinante seguirá siendo 1, aunque los elementos se hagan gigantescos. Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B = A^2 = \begin{pmatrix} 104 & 75 \\ 165 & 119 \end{pmatrix}, \qquad AB = A^3 = \begin{pmatrix} 1553 & 1120 \\ 2464 & 1777 \end{pmatrix}.$$

Como $|A| = 1$, sin hacer las cuentas $|B| = |AB| = 1$.

En la práctica, en el cálculo a mano de determinantes un poco grandes se suele emplear combinaciones de eliminación de Gauss con el desarrollo por la primera fila o columna (u otra fila o columna que imaginemos llevada al primer lugar).

Para ilustrarlo, calculemos (hay muchas formas de proceder):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{f_2 \mapsto f_2 - 2f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 - 3f_1 \\ f_4 \mapsto f_4 - 4f_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & -8 & -10 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{des. } c_1 \\ f_2 \mapsto -f_2/2 \\ f_3 \mapsto -f_3/5}}{=} (-2)(-5) \begin{vmatrix} -3 & -4 & -5 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix},$$

donde "des. c_1" indica el desarrollo por la primera columna,

$$(-2)(-5) \begin{vmatrix} -3 & -4 & -5 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{f_1 \mapsto f_1 + f_2}{=} 10 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{\text{des. } f_1}{=} -10 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -20.$$

Obviamente, "des. f_1" indica el desarrollo por la primera fila.

Comentario. Con un poco de esfuerzo se puede ver que cualquiera de las transformaciones T1, T2 y T3 actuando sobre A se puede interpretar con la multiplicación EA con E una matriz sencilla, se dice que es una *matriz elemental* cuyo determinante es 1 para T1, el número por el que se multiplica para T2 y -1 para T3. Esto prueba $|EA| = |E||A|$ para cualquier matriz elemental, por a), b) y c).

Si $|A| \neq 0$ la eliminación de Gauss acaba en la matriz escalonada I y tenemos matrices elementales E_j con $E_1 E_2 \cdots E_m A = I$. Por tanto, $|E_1| \cdots |E_m||A| = 1$. Usando esto se tiene la cadena de igualdades $|E_1| \cdots |E_m||A||B| = |IB| = |E_1 \cdots E_m AB| = |E_1| \cdots |E_m||AB|$. Cancelando los $|E_j|$ se deduce la propiedad $|AB| = |A||B|$. Las matrices elementales cumplen $|E| = |E^t|$, por tanto, al igualar $I = E_1 \cdots E_m A$ con su traspuesta y tomar determinantes se sigue $|E_1| \cdots |E_m||A| = |A^t||E_m^t| \cdots |E_1^t| = |A^t||E_m| \cdots |E_1|$, por consiguiente, $|A|$ coincide con $|A^t|$.

Con ello hemos probado las propiedades bajo la hipótesis $|A| \neq 0$. Una manera rara, pero rápida, de tratar el caso $|A| = 0$ es considerar $A_\varepsilon = \varepsilon I + A$. No es difícil ver que $|A_\varepsilon|$ es un polinomio de grado la dimensión de A. En particular, no es idénticamente nulo y, entonces, para $\varepsilon \neq 0$ arbitrariamente pequeño $|A_\varepsilon| \neq 0$. Tomando límites en $|A_\varepsilon| = |A_\varepsilon^t|$ y $|A_\varepsilon B| = |A_\varepsilon||B|$ se deduce $|A^t| = |AB| = 0$, lo que corrobora las propiedades para $|A| = 0$.

En relación con lo visto hasta ahora sobre matrices, vamos a enunciar dos aplicaciones de los determinantes que seguramente conoces. Para ello, es necesario definir dos conceptos previos. El *adjunto* o *cofactor* del elemento a_{ij} de una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ es $A_{ij} = (-1)^{i+j} d_{ij}$

donde d_{ij} es el determinante de la matriz A cuando se elimina la fila i-ésima y la columna j-ésima. Nótese que la definición inicial de determinante se puede escribir en términos de los adjuntos A_{i1}.

Ejemplo. Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ calcular los cofactores A_{11}, A_{12} y A_{31}.

Según la definición,

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -20, \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Por otro lado, llamaremos *menor* de tamaño k de una matriz A al determinante de una submatriz cuadrada de A formada por los elementos que están simultáneamente en k filas y k columnas de nuestra elección. Por ejemplo, los números d_{ij} que aparecen en la definición de los adjuntos son menores de tamaño $k-1$. Con cierto abuso de notación se dice que un menor contiene a otro si viene de una submatriz que contiene a la del segundo.

Las dos aplicaciones de los determinantes vienen dadas por los siguientes resultados:

> **Cálculo de la matriz inversa.** *Sea $A \in \mathcal{M}_n$ con $|A| \neq 0$. Su matriz inversa es la traspuesta de la matriz formada por los adjuntos dividida por $|A|$.*
>
> **Cálculo del rango.** *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Se cumple $\mathrm{rg}(A) = k$ si y solo si existe un menor de tamaño k no nulo y todos los menores de dimensión mayor que lo contienen (si existen) son nulos.*

Ejemplo. Calcular la inversa de la matriz del último ejemplo utilizando determinantes.

Si calculamos el resto de los adjuntos, $A_{13} = -1$, $A_{21} = -7$, $A_{22} = 13$, $A_{23} = 1$, $A_{32} = 1$, $A_{33} = -1$ y añadimos el cálculo adicional $|A| = -7$, el resultado anterior implica

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & -20 & -1 \\ -7 & 13 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{t} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -7 & 7 & 0 \\ 20 & -13 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para detectar posibles errores en tanta cuenta es conveniente calcular el producto AA^{-1}, aunque sea parcialmente, y compararlo con la matriz identidad.

El caso $n = 2$ lleva rápido a la fórmula que conocíamos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

En general, el proceso anterior requiere hallar n^2 determinantes de tamaño $n-1$ y uno de tamaño n, lo cual se vuelve bastante gravoso en cálculos a mano ya en los casos típicos con $n=4$.

Ejemplo. Calcular el rango de las siguientes las matrices utilizando determinantes:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&2&4&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&1&1\\2&1&3\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}.$$

En A el determinante de la submatriz formada por la segunda y cuarta columna y las dos filas es no nulo. Como no hay posibilidad de menores de tamaño mayor, $\text{rg}(A)=2$. En B está claro que $\det\big((b_{ij})_{i,j=1}^2\big)=1\neq 0$ y $|B|=0$ implica $\text{rg}(B)=2$. Está claro a simple vista que $\text{rg}(C)=1$ porque todas las columnas (o las filas) son proporcionales unas a otras. Para proceder con determinantes habría que considerar por ejemplo $c_{11}\neq 0$ y hallar todos los menores de tamaño 2 que lo contienen, cuatro en total, comprobando que se anulan.

Una consecuencia de este procedimiento para calcular el rango y de $\det(M)=\det(M^t)$ es

$$\text{rg}(A)=\text{rg}(A^t)\qquad\text{para cualquier } A\in\mathcal{M}_{m\times n}.$$

Nótese que las formas escalonadas de A y A^t se obtienen con cálculos muy distintos y, en principio, no hay nada que sugiera que deben compartir el mismo número de escalones. La prueba habitual involucra material de secciones siguientes. Por otro lado, la fórmula para el cálculo de la matriz inversa es asequible. El siguiente ejemplo esboza las líneas principales.

Ejemplo (Teórico). Sea C la matriz formada por los adjuntos de $A\in\mathcal{M}_n$, demostrar que la primera columna de C^tA y la de $|A|I$ coinciden.

Según la regla para multiplicar matrices, si $B=C^tA$ entonces $b_{11}=\sum_{i=1}^n A_{i1}a_{i1}$. Recordando la definición de adjunto y de determinante, se sigue $b_{11}=|A|$. Un argumento similar muestra que para $k>1$ se tiene que $b_{k1}=\sum_{i=1}^n A_{ik}a_{i1}$ es, salvo un signo, el determinante de la matriz obtenida al copiar la primera columna en la columna k. De $|A|=|A^t|$ y de c) se deduce que una matriz con dos columnas iguales tiene determinante cero, por tanto, $b_{k1}=0$ para $k>1$.

Con un argumento similar se demuestra que $b_{kl}=\sum_{i=1}^n A_{ik}a_{il}$ es $|A|$ si $k=l$ y se anula si $k\neq l$. En definitiva, $B=|A|I$ y se concluye $A^{-1}=|A|^{-1}C^t$.

Comentario. Los temas anteriores han estado esencialmente autocontenidos, mientras que en este nos hemos tenido que creer sin demostración algunos resultados u omitir detalles. Parte de esta diferencia radica en una ordenación del temario que no respeta ni el orden histórico ni el orden deductivo. Los primeros determinantes aparecieron a finales del siglo XVII (aunque su teoría se desarrolló en el XIX) a partir de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, que es también la motivación de la eliminación de Gauss. En breve, los determinantes son los objetos algebraicos que aparecen al escribir soluciones de sistemas genéricos y la eliminación de Gauss es un método computacionalmente efectivo para hallar las soluciones en ejemplos numéricos concretos.