Valores y vectores propios. Diagonalización

1. Halla los autovalores reales y los autovectores de $\mathbb{R}^n$ de las siguientes matrices:

$$i)\ \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, \qquad ii)\ \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad iii)\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$iv)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad v)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad vi)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$vii)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad viii)\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad ix)\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Estudia cuándo son diagonalizables sobre $\mathbb{R}$ las siguientes matrices y, en caso afirmativo, exprésalas como CDC^{-1} con D diagonal.

$$i)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad ii)\ \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \quad iii)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$iv)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad v)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad vi)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Dada $A = \begin{pmatrix} 5/2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, calcula $\lim_{n\to\infty} A^n$.

4. Encuentra para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ las siguientes matrices son diagonalizable sobre $\mathbb{R}$:

$$i)\ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad ii)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Busca una demostración o un contraejemplo para decidir la veracidad de las siguientes afirmaciones:
   - *a*) Toda matriz invertible es diagonalizable.
   - *b*) Si A es diagonalizable, entonces A^n es diagonalizable para $n \in \mathbb{N}$.
   - *c*) Si A y B son diagonalizables, entonces $A + B$ y AB son diagonalizables.