Espacios vectoriales. Aplicaciones lineales

Observaciones: Por razones tipográficas en esta hoja los vectores están escritos en fila, aunque en álgebra lineal siempre deberían escribirse en columna. La notación $\mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\})$ significa el subespacio generado por $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$, esto es, todas las combinaciones lineales de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$.

1) Estudia si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$.

i) $A = \{(3x_2, x_2, x_4 + x_2, x_4) \,:\, x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$.

ii) $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,:\, x_1 \cdot x_2 = 0\}$.

iii) $C = \{(x_1, x_2, x_1, x_2) \,:\, x_1 = 1\}$.

iv) $D = \{(x_1, x_1, x_1, x_1) \,:\, x_1 \in \mathbb{R}\}$.

v) $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,:\, x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

2) i) En $\mathbb{R}^3$, ¿pertenecen $(1, 2, 3), (1, 1, 1)$ a $\mathcal{L}(S)$ con $S = \{(1, 0, 1), (0, 2, 2)\}$?

ii) En $\mathbb{R}^4$, calcula x e y, si es posible, para que el vector $(1, 2, x, y)$ sea combinación lineal de los vectores $(1, 2, 0, 2)$ y $(1, 1, 2, 3)$.

3) Estudia si los siguientes conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes:

i) $\{(1, 2, 1), (1, 0, 1), (2, 3, 2)\}$.

ii) $\{(1, 0, 0), (2, 1, 1), (0, 1, 1), (1, -1, -1)\}$.

4) Decide si el vector $(1, 0, 1, 0)$ pertenece a $\mathcal{L}\big(\{(1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 0, 0, -1)\}\big)$.

5) Sea $\mathbb{S} = \mathcal{L}\big(\{(1, 2, 5, 2), (1, 0, 1, 0), (2, 3, 8, 3)\}\big)$. Expresa a $\mathbb{S}$ como el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo.

6) Halla las coordenadas de $(1, 2, 3)$ y de $(1, 1, 0)$ respecto de la base $\mathbb{B} = \{(1, -1, 2), (0, 1, 1), (1, 0, 4)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

7) Halla una base de los siguientes subespacios vectoriales:

i) $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^4$ generado por $\{(1, -1, 0, 0), (2, 0, -1, -1), (1, 0, 0, -1), (1, -1, 1, -1)\}$.

ii) $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3$ generado por $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (2, -1, -1), (-1, -1, 2)\}$.

8) Sean $U = \mathcal{L}\big(\{(1, 1, -1, 2),\ (-1, 2, 3, 3)\}\big)$ y $V = \mathcal{L}\big(\{(1, 7, 3, 12),\ (-4, 5, 1, 1)\}\big)$.

i) Escribe U y V como conjuntos de soluciones de un sistema homogéneo y prueba que existe un vector no nulo que está en ambos subespacios (no hace falta calcularlo).

ii) Halla $\vec{u} \in U$ y $\vec{v} \in V$ tales que $(27, 0, 27, 57) = \vec{u} + \vec{v}$. ¿Puedes conseguir que la última coordenada de $\vec{v}$ sea 4?

9) Halla una base y la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$.

i) $$\mathbb{S}_1 : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_4 = 0. \end{cases}$$

ii) $$\mathbb{S}_2 : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

10) Recuerda de cursos anteriores las definiciones de los productos escalar y vectorial en $\mathbb{R}^3$, indicados con $\cdot$ y $\times$, respectivamente. Halla la matriz de las aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definidas por $f(\vec{x}) = \vec{v} \cdot \vec{x}$ y $g(\vec{x}) = \vec{v} \times \vec{x}$ con $\vec{v} = (1, 2, 3)$.

11) Decide en cada caso si existe o no una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con las propiedades que se indican, hallando su matriz en caso afirmativo.

i) $T(\vec{\alpha}_i) = \vec{\beta}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ con $\vec{\alpha}_1 = (1, -1)$, $\vec{\alpha}_2 = (2, -1)$, $\vec{\alpha}_3 = (-3, 2)$, $\vec{\beta}_1 = (1, 0)$, $\vec{\beta}_2 = (0, 1)$ y $\vec{\beta}_3 = (1, 2)$.

ii) Lo mismo, cambiando $\vec{\beta}_3$ por $\vec{\beta}_3' = (-1, -1)$.

12) Se consideran las aplicaciones lineales $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_3)$ y $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_3)$.

i) Siendo $V = \mathcal{L}\big(\{(1, -1, 0), (1, 1, 1)\}\big)$ calcula $f(V)$ y $g(V)$. Calcula también las imágenes inversas de $\{\vec{0}\}$, esto es, $f^{-1}\big(\{(0, 0, 0)\}\big)$ y $g^{-1}\big(\{(0, 0)\}\big)$.

ii) Calcula $f^{-1}(W)$, siendo $W = \{(x_1, x_2, x_3)\colon x_1 = 3\lambda,\ x_2 = 2\lambda,\ x_3 = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

13) Las siguientes matrices determinan aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ para ciertos n y m. Para cada una de ellas, halla las dimensiones del núcleo y de la imagen. Escribe una base de la imagen cuando esta no sea todo $\mathbb{R}^m$.

$$\text{i)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}; \qquad \text{ii)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \text{iii)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \text{iv)}\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{v)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{vi)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \qquad \text{vii)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \text{viii)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

14) Para cada una de las aplicaciones lineales del ejercicio anterior, halla una base del núcleo y las ecuaciones de la imagen (esto es, un sistema homogéneo cuyo conjunto de soluciones coincida con la imagen).