Inicial primer apellido

Álgebra, examen parcial 3.

1º del Grado en Ingeniería Informática, curso 2025-2026 — 12 de diciembre de 2025

Apellidos y Nombre ______________________ D.N.I. ____________

Instrucciones: Justifica todas las respuestas. La duración es de 1h 30m.

Problema 1. [3.5 puntos] Resuelve el sistema

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4 &= 0,\\ 2x_1+4x_2+x_3+5x_4 &= 0,\\ x_1+2x_2+3x_3-5x_4 &= 0 \end{cases}$$

y escribe el conjunto de soluciones en la forma $\{\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}:\lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$ con $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^4$.

Soluciones: Aplicamos Gauss-Jordan a la matriz asociada al sistema:

$$\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&4&1&5\\1&2&3&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1}\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&0&-1&3\\0&0&2&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3+2F_2}\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&0&-1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-F_2}\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&0&1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{F_1-F_2}\begin{pmatrix}1&2&0&4\\0&0&1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Esto corresponde al sistema

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_4 &= 0,\\ x_3-3x_4 &= 0 \end{cases}$$

Denotando $x_2=\lambda$, $x_4=\mu$, tenemos que

$$\begin{cases} x_1 &= -2\lambda-4\mu,\\ x_3 &= 3\mu \end{cases}$$

y todas las soluciones son de la forma $(-2\lambda-4\mu,\lambda,3\mu,\mu)$, esto es,

$$\lambda(-2,1,0,0)+\mu(-4,0,3,1),\qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Problema 2. [3.5 puntos] Calcula números reales α y β tales que

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}\alpha+1\\\alpha-1\\2\alpha+\beta\\-\beta\end{pmatrix}\in\mathcal{L}\big(\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4\}\big)\quad\text{con}\quad \vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\1\end{pmatrix},\quad \vec{v}_2=\begin{pmatrix}3\\4\\10\\6\end{pmatrix},\quad \vec{v}_3=\begin{pmatrix}1\\5\\7\\13\end{pmatrix},\quad \vec{v}_4=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Esto es, tales que $\vec{u}$ sea combinación lineal de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ y $\vec{v}_4$.

Solución: Escribimos la matriz formada por los vectores $\vec{v}_1...,\vec{v}_4$ y el vector $\vec{u}$, y escalonamos:

$$\begin{pmatrix}1&3&1&0&\alpha+1\\1&4&5&1&\alpha-1\\3&10&7&1&2\alpha+\beta\\1&6&13&3&-\beta\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3-3F_1,F_4-F_1]{F_2-F_1}\begin{pmatrix}1&3&1&0&\alpha+1\\0&1&4&1&-2\\0&1&4&1&-\alpha+\beta-3\\0&3&12&3&-\beta-\alpha-1\end{pmatrix}\xrightarrow[F_4-3F_2]{F_3-F_1}\begin{pmatrix}1&3&1&0&\alpha+1\\0&1&4&1&-2\\0&0&0&0&-\alpha+\beta-1\\0&0&0&0&-\beta-\alpha+5\end{pmatrix}$$

Para que este sistema sea compatible, necesitamos que

$$-\alpha+\beta=1,\quad -\beta-\alpha=-5,$$

cuya única solución es $\alpha=2$, $\beta=3$.

Problema 3. Decide razonadamente si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos donde $\mathcal{M}_n$ indica el conjunto de matrices reales $n\times n$:

- [1 punto] Para $A, B \in \mathcal{M}_2$ cualesquiera $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$.

  Solución: Es falso. $(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2$; para que esto fuera igual a $A^2 - B^2$, necesitaríamos que $AB = BA$, lo que no suele ser verdad. Buscamos un contraejemplo entre tales pares de matrices. Por ejemplo, para

  $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

  tenemos que

  $$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

  mientras que

  $$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- [1 punto] Para $A, B \in \mathcal{M}_{2025}$ cualesquiera se tiene $|A-B| + |B-A| = 0$.

  Solución: Es verdad. Para demostrarlo, observamos que $A - B = -(B-A)$, así que

  $$|A-B| = |-(B-A)| = (-1)^{2025}|B-A| = -|B-A|.$$

- [1 punto] Existe $A \in \mathcal{M}_2$ distinta de la matriz nula tal que $(I-A)^{-1} = I + A$.

  Solución: Es cierto. $(I-A)^{-1} = I + A$ si y solo si

  $$I = (I-A)(I-A)^{-1} = (I-A)(I+A) = I - A^2.$$

  Pero para

  $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

  así que esa A vale como ejemplo.
