Una Solución

(1) $U = \langle \{ \underbrace{(1,-1,1)}_{\vec{u}_1}, \underbrace{(1,1,0)}_{\vec{u}_2} \} \rangle$

$V = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 0 \}$

(a) Tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ que tiene rango } 2$$

$\Longrightarrow \vec{u}_1, \vec{u}_2$ son L.I $\Longrightarrow \dim U = 2$

Ahora V:

$$2x - y - z = 0 \rightarrow \begin{array}{l} z = 2x - y \\ x = x \\ y = y \end{array}$$

Por lo tanto:

$$V = \{ \underbrace{(x, y, 2x-y)}_{= x\underbrace{(1,0,2)}_{=\vec{V}_1} + y \underbrace{(0,1,-1)}_{=\vec{V}_2}} \mid x, y \in \mathbb{R}^2 \}$$

Se tiene que $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ L.I. ya que

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Por lo tanto $\dim V = 2$

<u>Otra forma</u>: $V = \mathrm{Ker}((2\ -1\ -1))$

$$\Longrightarrow \dim V = 3 - \underbrace{\text{rango}(2\ -1\ -1)}_{=1} = 2$$

(b) $(x,y,z) \in U \iff \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, (x,y,z)\}$ L.D

$$\iff \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix} = \dim U = 2$$

transpuesta → ||

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & y+x \\ 0 & -1 & z-x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & z-x \\ 0 & 0 & y-x+2z \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad y-x+2z=0$$

Por lo tanto:

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y-x+2z=0\}$$

(c) $U \cap V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 2x-y-z=0 \\ -x+y+2z=0 \end{array} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y+3z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} x=-z \\ y=-3z \\ z=z \end{array}$$

$$\Longrightarrow U \cap V = \{(-z,-3z,z) \mid z \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= \langle \{(1,3,-1)\} \rangle$$

$\Longrightarrow \{(1,3,-1)\}$ base de $U \cap V$

(d) La fórmula de Grassmann nos dice:

$$\underbrace{\dim U}_{\overset{(a)}{=}\,2} + \underbrace{\dim V}_{\overset{(a)}{=}\,2} = \underbrace{\dim(U\cap V)}_{\overset{(c)}{=}\,1} + \dim(U+V)$$

$$\Rightarrow \dim(U+V) = 3 \underset{U+V\subset\mathbb{R}^3}{\Rightarrow} U+V=\mathbb{R}^3$$

Así tenemos que

$$(2,1,1)\in U+V$$

$$(2,1,1)\in U \iff (2,1,1) = a\vec{u_1} + b\vec{u_2} + c\vec{v_1} + d\vec{v_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2 & 1 & 1\end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -3 & 1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -5 & 3 & 1\end{pmatrix} \sim$$

$$\dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/5 & 3/5\\ 0 & 1 & 0 & 4/5 & 8/5\\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & -1/5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 3/5 + d/5\\ b = 8/5 - 4d/5\\ c = -1/5 + 3d/5\end{array}$$

$$d=0 \Rightarrow (2,1,1) = \underbrace{\frac{3}{5}(1,-1,1) + \frac{8}{5}(1,1,0)}_{\in U} + \underbrace{\frac{-1}{5}(1,0,-2)}_{\in V}$$

$$d=1 \Rightarrow (2,1,1) = \overbrace{\frac{4}{5}(1,-1,1) + \frac{4}{5}(1,1,0)}^{\in U} + \overbrace{\frac{2}{5}(1,0,-2) + (0,1,1)}^{\in V}$$

Otra forma:

Observar que el sistema de ecuaciones lineales

$$a\vec{u_1} + b\vec{u_2} + c\vec{v_1} + d\vec{v_2} = (2,1,1)$$

tiene 4 incognitas y la matriz del sistema $\left(\vec{u_1} \vdots \vec{u_2} \vdots \vec{u_3} \vdots \vec{u_4} \vdots \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right)$

tiene rango 3, tambien la ampliada.

$\Longrightarrow$ Sistema Compatible indeterminado con $4-3=1$ grado de libertad

$\Longrightarrow$ Hay infinitas soluciones en a, b, c, d.

En particular 2.

② $f = f_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x+z,\ 2x+y+z)$$

ⓐ $f(1,1,1) = (2,4)$

ⓑ $f^{-1}(1,0) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{f(x,y,z) = (1,0)}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} x = 1-z \\ y = -2+z \\ z = z \end{array}$$

Entonces:

$$f^{-1}(1,0) = \{(1-z, -2+z, z) : z \in \mathbb{R}\} = (1,-2,0) + \langle\{(-1,1,1)\}\rangle$$

ⓒ $\mathrm{Im}(f) = \langle\{f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\}\rangle$

$$= \langle\{(1,2), (0,1), (1,1)\}\rangle$$

$\mathrm{Im}(f)$ está generado por la imagen de una base de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$$

ⓓ $\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{f(x,y,z) = (0,0)}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}\}$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \\ z = z \end{cases}$$

$$\mathrm{Ker}(f) = \langle \underbrace{\{(-1,1,1)\}}_{\text{Base de } \mathrm{Ker}(f)} \rangle$$

OBS: T^ma dimensión:

$$\begin{array}{ccccc} \dim \mathbb{R}^3 & = & \dim \mathrm{Im}(f) & + & \dim \mathrm{Ker}(f) \\ \| & & \| & & \| \\ 3 & & 2 & & 1 \end{array}$$

③ $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

ⓐ $p_A(x) = |A - xI_2| = \begin{vmatrix} 3-x & -1 \\ 4 & -1-x \end{vmatrix} = (3-x)(-1-x)+4$

$= x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

ⓑ autovalores de A = Raices de $p_A(x) = \{1, 1\}$

$\Rightarrow$ multiplicidad algebraica $\alpha_1 = 2$

ⓒ ¿A diagonalizable?

Tenemos $\alpha_1 = 2 =$ nº de filas de A

Nos falta ver la multiplicidad geométrica de 1,

$d_1 = \dim \mathrm{Ker}(A - I_2) = 2 - \mathrm{rango}(A - I_2)$

$A - I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rango}(A - I_2) = 1$

$\Rightarrow d_1 = 2 - 1 = 1 \neq 2 = \alpha_1$

Por lo tanto

A <u>no</u> diagonalizable.

Escaneado con CamScanner

4 $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (5x-3y,\ 10x-6y)$

(a) $\mathcal{B}_C = \{ \underbrace{(1,0)}_{\vec{e_1}}, \underbrace{(0,1)}_{\vec{e_2}} \}$

$f(\vec{e_1}) = f(1,0) = (5,10) = (5,10)_{\mathcal{B}_C}$

$f(\vec{e_2}) = f(0,1) = (-3,-6) = (-3,-6)_{\mathcal{B}_C}$

$$\Longrightarrow \quad M_{\mathcal{B}_C}(f) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 10 & -6 \end{pmatrix} = A$$

(b) En primer lugar calculamos el polinomio característico de f:

$$p_f(x) = p_A(x) = |A - xI_2| = \left| \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 10 & -6 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} 5-x & -3 \\ 10 & -6-x \end{vmatrix} = (5-x)(-6-x) + 30 = x^2 + x = x(x+1)$$

Autovalores de $f = \{0, -1\}$

Como tenemos 2 raíces simples y $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

$\Longrightarrow$ f diagonalizable.

(c) Vamos a calcular una base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovectores de f:

$\boxed{\lambda=0}$

$$V_0 = Ker(A-0I_2) = Ker(A) = \{(x, \tfrac{5}{3}x) : x \in \mathbb{R}\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 10 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 5x = 3y$$

$\Rightarrow \boxed{\vec{u_1} = (3,5)}$ es autovector de f de autovalor 0

$\{\vec{u_1}\}$ es base de V_0

$\boxed{\lambda=-1}$

$$V_{-1} = Ker(A+1\cdot I_2) = \{(x,2x) : x \in \mathbb{R}\}$$

$$A-I_2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 6x = 3y \Rightarrow y = 2x$$

$\Rightarrow \boxed{\vec{u_2} = (1,2)}$ es autovector de f de autovalor -1

$\{\vec{u_2}\}$ es base de V_{-1}

Por lo tanto:

$$\mathcal{B} = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$$

es una base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovectores de f

tal que

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$