

APELLIDOS: \_\_\_\_\_

NOMBRE: \_\_\_\_\_

GRUPO

11\_

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>FINAL</b>
10	10	10	10	10	10	10	70

Razonar debidamente las respuestas

Escribe cada ejercicio en una página/hoja

1. Se considera la función

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 0, \\ x^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

- a) Calcula  $f([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ .
- b) Calcula  $f^{-1}((0, \frac{1}{2}])$ .
- c) Halla  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f \circ g = \text{id}$ .

2. Sea  $P = \{2, 3, 5, \dots\}$  el conjunto de números primos y se considera la relación en  $\mathcal{R}$  en  $P \times P$ :

$$(n_1, n_2) \mathcal{R} (m_1, m_2) \iff n_1 n_2 = m_1 m_2.$$

- a) Demuestra que  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia.
- b) Describe por extensión la clase de equivalencia  $[(a, a)]$  para  $a \in P$ .
- c) Describe por extensión la clase de equivalencia  $[(a, b)]$  para  $a, b \in P$  con  $a \neq b$ .

3. Decide razonadamente si es cierta la siguiente afirmación. Si  $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  cumplen  $\text{mcd}(a, b) = 1$  y  $\text{mcd}(b, c) = 1$  entonces  $\text{mcd}(a, c) = 1$ .

4. Calcula las soluciones enteras de la ecuación  $33x + 20y = 3$  con  $-33 < y < -1$ .

5. Decide razonadamente si es cierta la siguiente afirmación. Si  $U$  y  $V$  son subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^3$  de dimensión 2 entonces  $U \cap V \neq \{(0, 0, 0)\}$ .

(continúa en la siguiente página)

---

6. Se considera la aplicación

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = (y - x, 0, 0) + x(1, 1, 1) - y(0, 0, 1),$$

a) Demuestra que  $f$  es una aplicación lineal.

b) Calcula la matriz de  $f$  con respecto a las bases canónicas de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ .

c) Calcula una base de  $\text{Im}(f)$ .

d) Sea  $U = \langle (1, 1, 0), (2, 1, -1) \rangle$ . Describe  $U + \text{Im}(f)$  como el conjunto de soluciones de un sistema lineal de ecuaciones, con el menor número de ecuaciones posible.

---

7. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

calcula una matriz diagonal  $D$  y una matriz invertible  $P$  tal que  $A = PDP^{-1}$ .

---