
Plazo y modo de entrega: Hasta las 23:59 del 24 de abril. Se debe subir a Moodle un solo fichero PDF de a lo más ocho páginas y 6MB¹.

Calificación: A pesar de que los ejercicios tienen diferente dificultad y extensión, cada uno se puntuará sobre 20, de modo que la calificación máxima es 100. Se valorará la elegancia y la concisión de las soluciones.

1) Muestra con razonamientos teóricos (los cálculos numéricos deben ser factibles con una calculadora científica) que la diferencia entre $E_4\left(\frac{22+4i}{25}\right)$ y $(3+4i)^4$ tiene módulo menor que $2 \cdot 10^{-6}$. Indicación: Comienza llevando $\frac{22+4i}{25}$ al dominio fundamental estándar \mathcal{F} .

2) Explica por qué j' (la derivada de j) es una forma débilmente modular de peso 2, pero no es una forma modular. Sabiendo que $n(j-1728, i) = 2$ y $n(j, e^{2\pi i/3}) = 3$, demuestra la fórmula

$$\Delta(z) = -\frac{(j'(z))^6}{64\pi^6(j(z))^4(j(z)-1728)^3}.$$

3) Sea $f = 7E_4^3 + 5E_6^2$. Demuestra que existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tales que $E_{12} = \lambda_1 f + \lambda_2 \Delta$. Sabiendo que f tiene en su desarrollo de Fourier $a_1 = 0$ y que $B_{12} = -691/2730$, calcula λ_1 y λ_2 y deduce que para cualquier p primo $p^{11} + 1 - \tau(p)$ es divisible por 691, un resultado de Ramanujan.

4) Usando un razonamiento que no involucre formas modulares (solo teoría elemental de números), muestra que para $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ par el número de soluciones enteras no negativas de $4x + 6y = k$ es $\lfloor k/12 \rfloor$ si 12 divide a $k-2$ y $\lfloor k/12 \rfloor + 1$ si no lo divide.

5) Codificamos un mensaje $(m_0, m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{F}_5^4$ como el vector de \mathbb{F}_5^6 dado por los coeficientes de $\sum_{j=0}^3 m_j x^j (x-2)(x-4) \in \mathbb{F}_5[x]$ escritos de menor a mayor grado. Si recibimos $(3, 3, 3, 4, 4, 1)$, explica por qué es seguro que hay al menos un error. Sabiendo que solo hay uno, corrígelo.

¹Si tienes problemas con el tamaño del fichero o para pasar tu documento a PDF, usa por ejemplo la aplicación gratuita online <https://www.ilovepdf.com/>.