

Plazo y modo de entrega: Hasta las 23:59 del 30 de mayo. Se debe subir a Moodle un solo fichero PDF de a lo más tres páginas y 3MB¹.

Calificación: Este problema tiene un nivel de dificultad mayor que los ordinarios y contribuye a los extras hasta un 60%. Se puntuará sobre 100 y conseguir toda la calificación requiere no solo resolverlo sino también que la redacción sea elegante y original.

1) Consideramos la función holomorfa $\mathcal{E} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por la serie

$$\mathcal{E}(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_\theta} \frac{\overline{v(\gamma)}}{j_\gamma^5(z)} \quad \text{con} \quad v \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{cases} i(-1)^{(c+1)/2} & \text{if } 2 \nmid c, \\ (-1)^{(d-1)/2} & \text{if } 2 \mid c. \end{cases}$$

Es una forma modular $\mathcal{E} \in \mathcal{M}_5(\Gamma_\theta, v)$ y, por tanto, admite un desarrollo $\mathcal{E}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\pi i n z}$. Si p es primo y $4 \mid p-1$, halla una fórmula explícita y sencilla para a_p/a_1 .

Comentarios e indicaciones. La notación es como en clase, v es el sistema de multiplicadores de θ^2 y Γ_∞ son los elementos de Γ_θ que dejan fijo a ∞ , esto es, $\Gamma_\infty = \{\pm T^{2n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$. No hay que probar que $\mathcal{E} \in \mathcal{M}_5(\Gamma_\theta, v)$, que se sigue de las últimas clases. Quizá extrañe que aparezca $e^{\pi i n z}$ en el desarrollo en vez de $e^{2\pi i n z}$. Se debe a que no se ha compuesto con la matriz de escala y refleja que las formas modulares para Γ_θ son 2-periódicas y no 1-periódicas en general. Existe una fórmula explícita complicada para todos los a_n , que estará en la versión final futura de los apuntes, pero el objetivo aquí es encontrar un atajo aprovechándonos de que p es primo y de que consideramos el cociente a_p/a_1 . Puede resultar útil comenzar multiplicando \mathcal{E} por $1^{-5} - 3^{-5} + 5^{-5} - 7^{-5} + 9^{-5} - 11^{-5} + \dots$ que es constante y, por tanto, no afecta al valor de a_p/a_1 . A pesar de que el lenguaje empleado es de la parte final del curso, el problema está más cerca de temas vistos en el segundo capítulo.

¹Si tienes problemas con el tamaño del fichero o para pasar tu documento a PDF, usa por ejemplo la aplicación gratuita *online* <https://www.ilovepdf.com/>.