Apellidos y nombre: ....

.... DNI (o pasaporte): ....

- Solo hay que entregar esta hoja con las respuestas.
- A las 11:00 todos los exámenes deben estar entregados.

1) [3.5 puntos] Decide si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n - 2}{n! + 2}$ converge.

Definiendo $a_n = \frac{6^n-2}{n!+2}$ y $b_n = \frac{6^n}{n!}$ se tiene

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{6^n - 2}{6^n} \cdot \frac{n!}{n! + 2} = \lim \frac{1 - 2/6^n}{1} \cdot \frac{1}{1 + 2/n!} = 1.$$

Por el criterio de comparación, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter. Aplicando el criterio del cociente a esta última:

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{6^{n+1}/(n+1)!}{6^n/n!} = \lim 6 \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{6}{n+1} = 0 < 1.$$

Por tanto converge.

2) [3.5 puntos] Halla todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $\left|\dfrac{2x-5}{x+15}\right| < \dfrac{1}{3}$.

Para $x = -15$ el primer miembro no tiene sentido y para el resto, la desigualdad equivale a $6|s_1| < |s_2|$ con $s_1 = x - 5/2$ y $s_2 = x + 15$. Para $x \neq -15$ distinguimos tres casos:

a) $\boxed{x < -15}$. Se cumple $s_1, s_2 < 0$ y $6|s_1| < |s_2| \Leftrightarrow 6(5/2 - x) < -x - 15 \Leftrightarrow 3 \cdot 5 + 15 < 5x$ que contradice $x < -15$.

b) $\boxed{-15 < x \leq 5/2}$. Se cumple $s_1 \leq 0$, $s_2 > 0$ y $6|s_1| < |s_2| \Leftrightarrow 6(5/2 - x) < x + 15 \Leftrightarrow 3 \cdot 5 - 15 < 7x \Leftrightarrow x > 0$ y se obtiene $(0, 5/2]$.

c) $\boxed{x > 5/2}$. Se cumple $s_1, s_2 \geq 0$ y $6|s_1| < |s_2| \Leftrightarrow 6(x - 5/2) < x + 15 \Leftrightarrow 5x < 3 \cdot 5 + 15 \Leftrightarrow x < 6$ y se obtiene $(5/2, 6)$.

En total:

$$\left(0, \frac{5}{2}\right] \cup \left(\frac{5}{2}, 6\right) = (0, 6).$$

3) [1.5 puntos por acierto, -1 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ■ F. ☐ Existe alguna a_n divergente tal que $a_n < 2$ y $\sup\{a_n\} = 2$.

Por ejemplo, $a_n = 2(-1)^n - \frac{1}{n}$. Claramente, $a_n \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$. Se tiene $\sup\{a_n\} = 2$ porque $a_{2n} = 2 - \frac{1}{2n} \to 2$. No converge porque alterna valores negativos y positivos que se aproximan a -2 y 2.

V. ■ F. ☐ El número $\dfrac{(1+i)^{14}}{2^7} + \dfrac{11+7i}{3+i}$ es entero.

El primer sumando es $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{14} = \left(e^{i\pi/4}\right)^{14} = e^{7i\pi/2} = e^{4\pi i - i\pi/2} = e^{-i\pi/2} = -i$ y el segundo es $\frac{11+7i}{3+i} = \frac{(11+7i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{33-11i+21i+7}{10} = \frac{40+10i}{10} = 4 + i$. La suma resulta 4.

Apellidos y nombre: ....

.... DNI (o pasaporte): ....

- Solo hay que entregar esta hoja con las respuestas.
- A las 11:00 todos los exámenes deben estar entregados.

1) [3.5 puntos] Halla todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $\left|\dfrac{2x-3}{x+16}\right| < \dfrac{1}{3}$.

Para $x = -16$ el primer miembro no tiene sentido y para el resto, la desigualdad equivale a $6|s_1| < |s_2|$ con $s_1 = x - 3/2$ y $s_2 = x + 16$. Para $x \neq -16$ distinguimos tres casos:

a) $\boxed{x < -16}$. Se cumple $s_1, s_2 < 0$ y $6|s_1| < |s_2| \Leftrightarrow 6(3/2 - x) < -x - 16 \Leftrightarrow 3 \cdot 3 + 16 < 5x$ que contradice $x < -16$.

b) $\boxed{-16 < x \le 3/2}$. Se cumple $s_1 \le 0$, $s_2 > 0$ y $6|s_1| < |s_2| \Leftrightarrow 6(3/2 - x) < x + 16 \Leftrightarrow 3 \cdot 3 - 16 < 7x \Leftrightarrow x > -1$ y se obtiene $(-1, 3/2]$.

c) $\boxed{x > 3/2}$. Se cumple $s_1, s_2 \ge 0$ y $6|s_1| < |s_2| \Leftrightarrow 6(x - 3/2) < x + 16 \Leftrightarrow 5x < 3 \cdot 3 + 16 \Leftrightarrow x < 5$ y se obtiene $(3/2, 5)$.

En total:

$$\Big(-1, \frac{3}{2}\Big] \cup \Big(\frac{3}{2}, 5\Big) = (-1, 5).$$

2) [3.5 puntos] Decide si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n - 3}{n! + 3}$ converge.

Definiendo $a_n = \frac{6^n-3}{n!+3}$ y $b_n = \frac{6^n}{n!}$ se tiene

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{6^n - 3}{6^n} \cdot \frac{n!}{n!+3} = \lim \frac{1 - 3/6^n}{1} \cdot \frac{1}{1 + 3/n!} = 1.$$

Por el criterio de comparación, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter. Aplicando el criterio del cociente a esta última:

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{6^{n+1}/(n+1)!}{6^n/n!} = \lim 6 \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{6}{n+1} = 0 < 1.$$

Por tanto converge.

3) [1.5 puntos por acierto, -1 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ■ F. □ Existe alguna a_n divergente tal que $a_n < 2$ y $\sup\{a_n\} = 2$.

Por ejemplo, $a_n = 2(-1)^n - \frac{1}{n}$. Claramente, $a_n \le 2 - \frac{1}{n} < 2$. Se tiene $\sup\{a_n\} = 2$ porque $a_{2n} = 2 - \frac{1}{2n} \to 2$. No converge porque alterna valores negativos y positivos que se aproximan a -2 y 2.

V. ■ F. □ El número $\frac{(1+i)^{14}}{2^7} + \frac{11+7i}{3+i}$ es entero.

El primer sumando es $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{14} = \left(e^{i\pi/4}\right)^{14} = e^{7i\pi/2} = e^{4\pi i - i\pi/2} = e^{-i\pi/2} = -i$ y el segundo es $\frac{11+7i}{3+i} = \frac{(11+7i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{33-11i+21i+7}{10} = \frac{40+10i}{10} = 4 + i$. La suma resulta 4.

Apellidos y nombre: ....

.... DNI (o pasaporte): ....

- Solo hay que entregar esta hoja con las respuestas.
- A las 11:00 todos los exámenes deben estar entregados.

1) [3.5 puntos] Decide si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n - 5}{n! + 5}$ converge.

Definiendo $a_n = \frac{6^n-5}{n!+5}$ y $b_n = \frac{6^n}{n!}$ se tiene

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{6^n - 5}{6^n} \cdot \frac{n!}{n! + 5} = \lim \frac{1 - 5/6^n}{1} \cdot \frac{1}{1 + 5/n!} = 1.$$

Por el criterio de comparación, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter. Aplicando el criterio del cociente a esta última:

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{6^{n+1}/(n+1)!}{6^n/n!} = \lim 6\frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{6}{n+1} = 0 < 1.$$

Por tanto converge.

2) [3.5 puntos] Halla todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $\left|\dfrac{2x-7}{x+14}\right| < \dfrac{1}{3}$.

Para $x = -14$ el primer miembro no tiene sentido y para el resto, la desigualdad equivale a $6|s_1| < |s_2|$ con $s_1 = x - 7/2$ y $s_2 = x + 14$. Para $x \neq -14$ distinguimos tres casos:

a) $\boxed{x < -14}$. Se cumple $s_1, s_2 < 0$ y $6|s_1| < |s_2| \Leftrightarrow 6(7/2 - x) < -x - 14 \Leftrightarrow 3\cdot 7 + 14 < 5x$ que contradice $x < -14$.

b) $\boxed{-14 < x \le 7/2}$. Se cumple $s_1 \le 0$, $s_2 > 0$ y $6|s_1| < |s_2| \Leftrightarrow 6(7/2 - x) < x + 14 \Leftrightarrow 3\cdot 7 - 14 < 7x \Leftrightarrow x > 1$ y se obtiene $(1, 7/2]$.

c) $\boxed{x > 7/2}$. Se cumple $s_1, s_2 \ge 0$ y $6|s_1| < |s_2| \Leftrightarrow 6(x - 7/2) < x + 14 \Leftrightarrow 5x < 3\cdot 7 + 14 \Leftrightarrow x < 7$ y se obtiene $(7/2, 7)$.

En total:

$$\left(1, \frac{7}{2}\right] \cup \left(\frac{7}{2}, 7\right) = (1, 7).$$

3) [1.5 puntos por acierto, -1 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ■ F. □ Existe alguna a_n divergente tal que $a_n < 2$ y $\sup\{a_n\} = 2$.

Por ejemplo, $a_n = 2(-1)^n - \frac{1}{n}$. Claramente, $a_n \le 2 - \frac{1}{n} < 2$. Se tiene $\sup\{a_n\} = 2$ porque $a_{2n} = 2 - \frac{1}{2n} \to 2$. No converge porque alterna valores negativos y positivos que se aproximan a -2 y 2.

V. ■ F. □ El número $\dfrac{(1+i)^{14}}{2^7} + \dfrac{11+7i}{3+i}$ es entero.

El primer sumando es $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{14} = \left(e^{i\pi/4}\right)^{14} = e^{7i\pi/2} = e^{4\pi i - i\pi/2} = e^{-i\pi/2} = -i$ y el segundo es $\frac{11+7i}{3+i} = \frac{(11+7i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{33-11i+21i+7}{10} = \frac{40+10i}{10} = 4 + i$. La suma resulta 4.

Apellidos y nombre: ....

.... DNI (o pasaporte): ....

- Solo hay que entregar esta hoja con las respuestas.
- A las 11:00 todos los exámenes deben estar entregados.

1) [3.5 puntos] Halla todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $\left|\dfrac{2x-1}{x+17}\right| < \dfrac{1}{3}$.

Para $x = -17$ el primer miembro no tiene sentido y para el resto, la desigualdad equivale a $6|s_1| < |s_2|$ con $s_1 = x - 1/2$ y $s_2 = x + 17$. Para $x \neq -17$ distinguimos tres casos:

a) $\boxed{x < -17}$. Se cumple $s_1, s_2 < 0$ y $6|s_1| < |s_2| \Leftrightarrow 6(1/2 - x) < -x - 17 \Leftrightarrow 3 \cdot 1 + 17 < 5x$ que contradice $x < -17$.

b) $\boxed{-17 < x \leq 1/2}$. Se cumple $s_1 \leq 0$, $s_2 > 0$ y $6|s_1| < |s_2| \Leftrightarrow 6(1/2 - x) < x + 17 \Leftrightarrow 3 \cdot 1 - 17 < 7x \Leftrightarrow x > -2$ y se obtiene $(-2, 1/2]$.

c) $\boxed{x > 1/2}$. Se cumple $s_1, s_2 \geq 0$ y $6|s_1| < |s_2| \Leftrightarrow 6(x - 1/2) < x + 17 \Leftrightarrow 5x < 3 \cdot 1 + 17 \Leftrightarrow x < 4$ y se obtiene $(1/2, 4)$.

En total:

$$\Big(-2, \frac{1}{2}\Big] \cup \Big(\frac{1}{2}, 4\Big) = (-2, 4).$$

2) [3.5 puntos] Decide si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n - 4}{n! + 4}$ converge.

Definiendo $a_n = \frac{6^n-4}{n!+4}$ y $b_n = \frac{6^n}{n!}$ se tiene

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{6^n - 4}{6^n} \cdot \frac{n!}{n! + 4} = \lim \frac{1 - 4/6^n}{1} \cdot \frac{1}{1 + 4/n!} = 1.$$

Por el criterio de comparación, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter. Aplicando el criterio del cociente a esta última:

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{6^{n+1}/(n+1)!}{6^n/n!} = \lim 6\frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{6}{n+1} = 0 < 1.$$

Por tanto converge.

3) [1.5 puntos por acierto, -1 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ■ F. □ Existe alguna a_n divergente tal que $a_n < 2$ y $\sup\{a_n\} = 2$.

Por ejemplo, $a_n = 2(-1)^n - \frac{1}{n}$. Claramente, $a_n \le 2 - \frac{1}{n} < 2$. Se tiene $\sup\{a_n\} = 2$ porque $a_{2n} = 2 - \frac{1}{2n} \to 2$. No converge porque alterna valores negativos y positivos que se aproximan a -2 y 2.

V. ■ F. □ El número $\frac{(1+i)^{14}}{2^7} + \frac{11+7i}{3+i}$ es entero.

El primer sumando es $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{14} = \left(e^{i\pi/4}\right)^{14} = e^{7i\pi/2} = e^{4\pi i - i\pi/2} = e^{-i\pi/2} = -i$ y el segundo es $\frac{11+7i}{3+i} = \frac{(11+7i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{33-11i+21i+7}{10} = \frac{40+10i}{10} = 4 + i$. La suma resulta 4.
