Apellidos y nombre: ..................................................................

........................................ DNI (o pasaporte): ..........................

- Solo hay que entregar las dos hojas con las respuestas.
- A las 12:00 acaba el examen (se puede dar una pequeña extensión).

---

**1)** [2 puntos] Decide si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! + 2024}{(n!)^2}$ converge.

Las sucesiones $a_n = \frac{(2n)!+2024}{(n!)^2}$ y $b_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}$ satisfacen

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{(2n)! + 2024}{(2n)!} = \lim \Big(1 + \frac{2024}{(2n)!}\Big) = 1 + 0 = 1.$$

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter (criterio de comparación). Se cumple $b_n \ge 1$ porque $b_n$ es un número combinatorio, entonces $\lim b_n$ no es nulo y la serie diverge.

[También se puede aplicar el criterio del cociente comprobando $\lim(b_{n+1}/b_n) = 4 > 1$.]

---

**2)** [2 puntos] Calcula el valor exacto de $\displaystyle\frac{10}{1+3i} + \frac{8i+1}{2+3i} + \frac{1}{16}(1+i)^{10}$.

Calculemos cada sumando. El primero y el segundo son divisiones de números complejos que se efectúan convirtiendo su denominador en real multiplicando por el conjugado:

$$\frac{10}{1+3i} = \frac{10(1-3i)}{1^2+3^2} = 1 - 3i \quad \text{y} \quad \frac{8i+1}{2+3i} = \frac{(8i+1)(2-3i)}{2^2+3^2} = \frac{16i + 24 + 2 - 3i}{13} = 2 + i.$$

En el último sumando empleamos $1+i = re^{i\alpha}$ con $r = |1+i| = \sqrt{2}$ y $\alpha = \pi/4$ para obtener

$$\frac{1}{16}(1+i)^{10} = \frac{2^5 e^{5i\pi/2}}{16} = 2\, e^{2\pi i + \pi i/2} = 2\, e^{\pi i/2} = 2i.$$

Sumando los tres resultados, se concluye que la solución es $(1-3i) + (2+i) + 2i = 3$.

**3)** [0.5 puntos por acierto, -0.25 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ☐ F. ■ Si $a_n$ converge y $\sup\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 1$ entonces $\lim a_n = 1$.

No se cumple en general. Por ejemplo, $a_n = 1/n$ satisface $\sup\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 1$ (porque $a_1 = 1$ y es decreciente) y $\lim a_n = 0$.

V. ☐ F. ■ Toda sucesión acotada es convergente.

No se cumple en general. Por ejemplo, $a_n = (-1)^n$ está acotada ($-1 \le a_n \le 1$) y no converge porque oscila entre dos valores.

---

**4)** [2 puntos] Considera $f(x) = \dfrac{e^{-4/x}\cos x - e^{-1/x}}{e^{-4/x}+1}$. Estudia si la función definida por $g(x) = \big(2f(x)-1\big)^2$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 1$ es continua en $x = 0$.

---

Se cumple $\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} = \lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$ porque $-1/x \to -\infty$ si $x \to 0^+$ y $1/x \to -\infty$ si $x \to 0^-$. Con ello se calculan los límites laterales de $f$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\big(e^{-1/x}\big)^4 \cos x - e^{-1/x}}{\big(e^{-1/x}\big)^4 + 1} = \frac{0^4\cdot 1 - 0}{0^4+1} = 0$$

y, multiplicando numerador y denominador por $e^{4/x}$,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x - e^{3/x}}{1+e^{4/x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x - \big(e^{1/x}\big)^3}{1+\big(e^{1/x}\big)^4} = \frac{1-0^3}{1+0^4} = 1.$$

De aquí se deduce $\lim_{x\to 0^+} g(x) = (2\cdot 0 - 1)^2 = 1$ y $\lim_{x\to 0^-} g(x) = (2\cdot 1 - 1)^2 = 1$. Entonces $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$ y como este valor coincide con $g(0)$, es continua en $x = 0$.

---

**5)** [2 puntos] Calcula la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^{1+\operatorname{sen}(x-1)}$ en $x = 1$.

---

La fórmula para la recta tangente asegura que la recta buscada es

$$y = f'(1)(x-1) + f(1).$$

Obviamente, $f(1) = 1^1 = 1$. Por otro lado, $f(x) = e^{\left(1+\operatorname{sen}(x-1)\right)\log x}$, porque $e^{\log x} = x$, y la derivada es, usando la regla de la cadena y la derivada de un producto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\left(1+\operatorname{sen}(x-1)\right)\log x}\big(\log x + \operatorname{sen}(x-1)\log x\big)' \\ &= x^{1+\operatorname{sen}(x-1)}\Big(\frac{1}{x} + \cos(x-1)\log x + \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x}\Big). \end{aligned}$$

Utilizando $\log 1 = \operatorname{sen} 0 = 0$ se obtiene $f'(1) = 1^1(1+0) = 1$. Sustituyendo en la fórmula se sigue finalmente que la ecuación de la recta tangente es $y = x$.

---

**6)** [0.5 puntos por acierto, -0.25 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ☐ F. ■ Se cumple $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^2} \int_2^x \frac{t}{\log t}\,dt = 2$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_2^x \frac{t}{\log t}\,dt}{x^2/\log x} \underset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x/\log x}{(2x\log x - x)/(\log x)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{2\log x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2 - 1/\log x} = \frac{1}{2}.$$

V. ☐ F. ■ El valor de la integral $\displaystyle\int_0^1 x\,e^x\,dx$ es $e-1$.

Tomando como partes $u = x$ y $dv = e^x\,dx$ con $v = e^x$, se obtiene que la integral del enunciado es igual a $xe^x\big|_0^1 - \displaystyle\int_0^1 e^x\,dx = (xe^x - e^x)\big|_0^1 = 0 - (-1) = 1$.

---