Solución del problema especial de teoría

Un cálculo prueba $(f\circ g)(x) = \frac{(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}-1}{(1-\sqrt{3})x+\sqrt{3}+1} = (g\circ f)(x)$. Por tanto, siempre podemos ordenar las composiciones de manera que la f esté antes que la g. Definiendo $f^{[n]} = f\circ \overset{n\text{ veces}}{\cdots\cdots} \circ f$ y $f^{[0]}(x) = x$, la función identidad que no tiene efecto al componer, se concluye que todas las composiciones sucesivas se pueden escribir como $f^{[n]}\circ g^{[m]}$ con $n, m\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$. Se tiene,

$$(*)\qquad \begin{cases} f^{[0]}(x) = x, \quad f^{[1]} = f, \quad f^{[2]}(x) = -\frac{1}{x}, \quad f^{[3]}(x) = -\frac{x+1}{x-1} \quad \text{y} \quad f^{[4]} = f^{[0]}; \\ \\ g^{[0]}(x) = x, \quad g^{[1]} = g, \quad g^{[2]}(x) = \frac{x-\sqrt{3}}{x\sqrt{3}+1} \quad \text{y} \quad g^{[3]} = g^{[0]}. \end{cases}$$

Es decir, $f^{[n+4]} = f^{[n]}$ y $g^{[n+3]} = g^{[n]}$ para $n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$. De hecho, esto también es válido para $n\in\mathbb{Z}$ interpretando $f^{[-n]}$ como la función inversa de $f^{[n]}$. Por ejemplo, $f^{[3]} = f^{[-1]}$ porque $f^{[3]}\circ f^{[1]} = f^{[1]}\circ f^{[3]} = f^{[4]} = f^{[0]}$.

Tras estas consideraciones, basta considerar $f^{[n]}\circ g^{[m]}$ con $0\le n<4$ y $0\le m<3$, que dan $4\times 3 = 12$ posibles resultados. Solo resta comprobar que son todos distintos. Notemos que $f^{[n_1]}\circ g^{[m_1]} = f^{[n_2]}\circ g^{[m_2]}$ implica $f^{[n_1-n_2]} = g^{[m_2-m_1]}$ (componiendo a la izquierda con $f^{[-n_2]}$ y a la derecha con $g^{[-m_1]}$) y como las funciones de ambas líneas de (*) son distintas salvo $f^{[0]} = g^{[0]}$, se sigue $n_1 = n_2$ y $m_1 = m_2$.