

1) Demuestra que el logaritmo decimal de un número racional positivo es o bien entero o bien irracional. Indicación: Intenta adaptar la prueba habitual de que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2) Demuestra que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-1} 2023^{-n!}$ es irracional.

3) Explica por qué $0,1234567891011\dots$ no es un número decimal periódico (ni puro ni mixto) y concluye que es irracional. Aplica la misma estrategia para probar la irracionalidad de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-b_n}$ si a_n y b_n son sucesiones de enteros positivos con a_n acotada y $b_{n+1} - b_n \rightarrow +\infty$.

4) Repite la primera parte del ejercicio anterior con $0,235711131719\dots$ formado concatenando los primos. Indicación: ¿Por qué el teorema de los números primos asegura que para N grande hay números primos con exactamente N cifras?

5) Sea $N \in \mathbb{Z}_{\geq 4}$ y sea \mathcal{R}_N el conjunto de fracciones irreducibles a/q con $1 \leq q \leq \sqrt{N}$. Prueba que $\bigcup_{a/q \in \mathcal{R}_N} \{x : |x - a/q| < (qN)^{-1}\}$ es una unión disjunta.

6) Considera la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $a_n = (1 + \frac{3}{4}\sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \frac{3}{4}\sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^n$. Demuestra que $a_n \in \mathbb{Z}^+$ y $|\sqrt{2} - 1 - a_n/a_{n+1}| < a_{n+1}^{-2}$. Indicación: Para deducir $a_n \in \mathbb{Z}^+$, establece una fórmula de recurrencia para a_n o utiliza que $(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n$ es un múltiplo par de $\sqrt{2}$. Para la desigualdad, muestra que el valor absoluto es $(5\sqrt{2} - 7)(\sqrt{2} - 1)^n/a_{n+1}$.

7) Prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} 2022^{-n^n}$ es trascendente.

8) Justifica la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-5} \operatorname{cosec}(2\pi n \sqrt[3]{3})$, que se escapa de los criterios que has estudiado en las asignaturas de análisis. Indicación: Prueba primero $|\operatorname{sen}(\pi x)| \geq |x|$ para $|x| \leq 1/2$ y utiliza que $2\sqrt[3]{3}$ es algebraico de grado 3.

9) Demuestra que la parte fraccionaria de $n!e$ no está uniformemente distribuida.

10) Demuestra que la parte fraccionaria de $\log n$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ no está uniformemente distribuida. Indicación: Aproxima cuántas veces la parte fraccionaria de $\log n$ es menor que $1/2$ para $n < e^N$.

11) El código ASCII asigna a cada entero en $[0, 256)$ un carácter alfanumérico (o de control). De este modo, podemos “leer” cada $0 < x < 1$ escribiéndolo en base 256. Así, el número $0,282950185472145\dots = \frac{72}{256} + \frac{111}{256^2} + \frac{108}{256^3} + \frac{97}{256^4} + \dots$ es **Hola**... porque $72 \rightarrow \text{H}$, $111 \rightarrow \text{o}$, $108 \rightarrow \text{l}$, $97 \rightarrow \text{a}$. Demuestra que existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que la parte fraccionaria de $n\pi$ comienza con el texto completo de “El Quijote”.

12) Si en el primer examen saco un $8|\operatorname{sen} 3|$, en el segundo un $8|\operatorname{sen} 6|$, en el tercero un $8|\operatorname{sen} 9|$ y así sucesivamente, ¿aprobaré si el número de exámenes es suficientemente grande?

13) Expresa con radicales las fracciones continuas $[\overline{2}, \overline{3}]$ y $[1, 1, \overline{1}, \overline{4}]$.

14) Halla la fracción continua de $(n + \sqrt{n^2 + 4})/2$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.

15) Demuestra $\sqrt{n^2 + 1} = [n, \overline{2n}]$ y $\sqrt{n^2 + n} = [n, \overline{2, 2n}]$.

16) Calcula la probabilidad de que un número real de $(0, 1)$ tengan el cociente parcial a_1 de tres cifras.

17) Si p_n/q_n son las convergentes de un número irracional, prueba que para todo n se cumple $p_n/q_n = a_0 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (q_{k-1}q_k)^{-1}$. Indicación: Intenta reorganizar el sumatorio para obtener una suma telescópica.

18) Demuestra $p_nq_{n-2} - p_{n-2}q_n = (-1)^n a_n$ para $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Considera el caso $\alpha = [\overline{3}]$ y deduce de ello que cumple $\sum_{k=1}^{\infty} (q_{2k+1}q_{2k-1})^{-1} = (10 - 3\alpha)/9$. Indicación: Divide la igualdad con $a_n = 3$ entre q_nq_{n-2} y toma $n = 2k + 1$.

19) Si p_n/q_n son las convergentes de $\sqrt{2}$, demuestra por inducción usando las relaciones de recurrencia para p_n y q_n y la identidad del ejercicio anterior que $(x, y) = (p_n, q_n)$ es solución de $x^2 - 2y^2 = (-1)^{n+1}$.

20) Comprueba que si $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es solución de $x^2 - Dy^2 = -1$ (con $D \in \mathbb{Z}^+$ no cuadrado) entonces $x' = x^2 + Dy^2$, $y' = 2xy$ lo es de $x^2 - Dy^2 = 1$. Halla una solución no trivial de la ecuación de Pell $x^2 - 97y^2 = 1$ sabiendo $\sqrt{97} = [9, \overline{1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 18}]$. Indicación: Usa una calculadora porque salen números grandes. Cambiando 97 por 2011 la menor solución tendría más de 40 cifras.

21) Arquímedes aproximó π por $22/7$. Halla la fracción con denominador mínimo que mejora la aproximación de Arquímedes en valor absoluto.

22) Halla la fracción irreducible a/q con $q < 1000$ que minimiza $|qe^2 - a|$.

23) Un año solar dura $365,24223379 \dots$ días, pero el calendario oficial le asigna 365 días añadiendo 97 nuevos días cada 400 años, correspondientes a los bisiestos (uno cada cuatro años excepto en el año que precede a un siglo no múltiplo de 4). Mejora esta aproximación usando fracciones continuas.

24) Demuestra que si $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es una solución de $x^3 - dy^3 = 1$ con $d \geq 5$ que no sea un cubo perfecto entonces x/y es una convergente de $\sqrt[3]{d}$ y utiliza este hecho para hallar una solución no trivial de $x^3 - 635y^3 = 1$. Indicación: En $\mathbb{R}[x]$ se tiene $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$.