1) He comprado bolígrafos a 101 céntimos cada uno y rotuladores a 140 céntimos. Si me he gastado en total 29,93 euros, ¿cuántos he comprado de cada?

2) Demuestra que cualquier par de elementos de la sucesión 2^1+1, 2^2+1, 2^4+1, 2^8+1,... son coprimos (los exponentes son potencias de dos). Indicación: Una forma de proceder es calcular el producto de los k primeros elementos.

3) Prueba que si $n, m \in \mathbb{Z}^+$ con m impar, se tiene $2^n+1 \mid 2^{nm}+1$. Deduce de ello que cualquier número primo de la forma 2^N+1, $N \in \mathbb{Z}^+$, cumple que $N = 2^k$ con $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

4) Expresa $-64/91$ en forma de fracción continua y averigua qué fracción irreducible es la fracción continua $[0, 2, 2, 1, 5, 1, 3]$.

5) Expresa en términos de los generadores habituales T y S de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ los siguientes elementos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 56 & -23 \\ 39 & -16 \end{pmatrix}.$$

6) Si contamos con los dedos comenzando con el índice y acabando en el pulgar, ¿en qué dedo terminará la cuenta hasta 7^{7^7}?

7) Supongamos que p y $p+2$ son primos y sea n la suma de las cifras de $p(p+2)$. Demuestra que $n+1$ es divisible por 9. Indicación: ¿Por que un número y la suma de sus cifras son congruentes módulo 9?

8) Halla razonadamente el orden máximo que puede tener un elemento en $(\mathbb{Z}/221\mathbb{Z})^*$. No hace falta que halles un elemento que lo tenga.

9) Dado $n \in \mathbb{Z}^+$, sea p un factor primo de $4n^2+1$ y g una raíz primitiva módulo p. Muestra que si $g^k \equiv 2n\ (p)$ entonces $4k/(p-1)$ es impar. Deduce de ello que todos los factores primos de $4n^2+1$ cumplen $p \equiv 1\ (4)$. Comentario: El resultado es casi inmediato usando residuos cuadráticos, pero aquí nos forzamos a utilizar solo raíces primitivas.

10) Si $p > 2$ es primo y g es una raíz primitiva módulo p, demuestra que g es raíz primitiva módulo p^2 si y solo si $g^{p-1} \not\equiv 1\ (p^2)$. Deduce de ello que o bien g o bien $g+p$ es raíz primitiva módulo p^2 (no se excluye que lo sean ambas). Indicación: Para deducir la segunda parte, quizá quieras demostrar que $(n+p)^{p-1} - n^{p-1}$ no es divisible por p^2 si $p \nmid n$.

11) Sea p un primo de la forma 2^n+1. Muestra que las raíces primitivas módulo p son exactamente los no residuos cuadráticos.

12) Prueba que $x^2+1=0$ tiene exactamente cuatro raíces (sin hallarlas explícitamente) en $\mathbb{Z}/65\mathbb{Z}$. Explica cómo es posible si tiene grado 2.

13) Caracteriza todos los primos para los que $x^2-2x+6 \equiv 0\ (p)$ tiene solución.

14) Caracteriza todos los primos para los que $3x^2 - 1 \equiv 0\ (p)$ tiene solución.

15) Estudia si la suma de tres cuadrados consecutivos puede dar un múltiplo de 109.

16) Calcula los símbolos de Legendre $(\frac{175}{257})$ y $(\frac{136}{137})$.

17) Demuestra por inducción $a^{\varphi(p^n)/2} \equiv (\frac{a}{p})\ (p^n)$ para $n \in \mathbb{Z}^+$ y $p > 2$ primo.

18) Calcula los símbolos de Jacobi $(\frac{403}{803})$ y $(\frac{133}{169})$.