Enunciados y soluciones

1) [3.5 puntos] Calcula la fracción continua de $\frac{1}{2}\big(3+\sqrt{1+2/n}\,\big)$ para $n\in\mathbb{Z}^+$ arbitrario.

Abreviemos $R=\sqrt{1+2/n}$. La parte entera de $\alpha_0=\alpha=\frac{1}{2}\big(3+R\big)$ es siempre 2 porque $\sqrt{1}<R\le\sqrt{3}$. Por tanto,

$$\alpha_1=\frac{1}{\alpha_0-2}=\frac{2}{R-1}=n\big(R+1\big)=n+\sqrt{n^2+2n}.$$

Se cumple $n\le\sqrt{n^2+2n}<\sqrt{n^2+2n+1}=n+1$ de donde $\lfloor\alpha_1\rfloor=2n$ y

$$\alpha_2=\frac{1}{\alpha_1-2n}=\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}-n}=\frac{1/n}{R-1}=\frac{R+1}{2}.$$

Esto coincide con α_0-1 y entonces su parte entera es 1. Finalmente,

$$\alpha_3=\frac{1}{\alpha_2-1}=\frac{2}{R-1}=n\big(R+1\big)=\alpha_1.$$

En definitiva, $\alpha=[2,\ \overline{2n,1}\,]$.

---

2) [3 puntos] Explica la igualdad

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{|\operatorname{sen}n|}{2+\cos n}=\frac{\log 3}{\pi}.$$

Indicación: $g(x)=g(\lambda\lambda^{-1}x)=g\big(\lambda\lfloor\lambda^{-1}x\rfloor+\lambda\,\mathrm{Frac}(\lambda^{-1}x)\big)$ para $\lambda\neq 0$.

Sea $g(x)=|\operatorname{sen}x|/(2+\cos x)$ y $f(x)=g(2\pi x)$. La función f es continua (cociente de continuas con denominador que no se anula). Por la 2π-periodicidad de g, la indicación con $\lambda=2\pi$ muestra $g(x)=f\big(\mathrm{Frac}(x/2\pi)\big)$. El resultado visto en clase asegura que $a_n=\mathrm{Frac}(n/2\pi)$ está uniformemente distribuida en $[0,1]$, porque $1/2\pi\notin\mathbb{Q}$, y se tiene

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}g(a_n)=\int_0^1 f=\int_{-1/2}^{1/2}f=2\int_0^{1/2}f=\int_0^{1/2}\frac{2\operatorname{sen}(2\pi x)}{2+\cos(2\pi x)}\,dx.$$

La segunda igualdad viene de que f es 1-periódica y la tercera de que es par. La integral es inmediata y resulta $-\pi^{-1}\log\big(2+\cos(2\pi x)\big)\Big|_0^{1/2}=\pi^{-1}\log 3$.

---

3) [2.5 puntos] Sea $D \in \mathbb{Z}^+$ tal que la fracción continua de $\sqrt{D}$ es de la forma $[n, \overline{1, 1, 1, 2n}]$. Demuestra que $n \equiv -1$ (3).

$\boxed{\text{Sol. 1}}$. Sea $\alpha = n + \sqrt{D}$. Se tiene $\alpha = [\overline{2n, 1, 1, 1}] = [2n, 1, 1, 1, \alpha]$. Entonces

$$\begin{array}{cccccc} & 2n & 1 & 1 & 1 & \alpha \\ \hline 0 & 1 & 2n & 2n+1 & 4n+1 & 6n+2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \frac{(6n+2)\alpha + 4n + 1}{3\alpha + 2}.$$

Operando y usando $\alpha > 0$,

$$3\alpha^2 - 6n\alpha - 4n - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{6n + \sqrt{36n^2 + 48n + 12}}{6} = n + \sqrt{n^2 + n + (n+1)/3}$$

y para que esto sea $n + \sqrt{D}$ debe cumplirse $3 \mid n + 1$.

$\boxed{\text{Sol. 2}}$. El algoritmo de la fracción continua aplicado a $\sqrt{D}$ da

$$\begin{array}{cccccc} & n & 1 & 1 & 1 & \\ \hline 0 & 1 & n & n+1 & 2n+1 & 3n+2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad p_3 = 3n+2,\ q_3 = 3.$$

Como 3 es impar y el periodo de $\sqrt{D}$ divide a $3+1$, se tiene que (p_3, q_3) es solución de la ecuación de Pell $x^2 - Dy^2 = 1$. Es decir, $(3n+2)^2 - 9D = 1$. Despejando, $D = n^2 + n + (n+1)/3$ y debe cumplirse $3 \mid n + 1$.

---

4) [1 punto] Comprueba que $Q_1 = 4x^2 - 2xy + y^2$ y $Q_2 = 4x^2 + 2xy + y^2$ son formas cuadráticas equivalentes. ¿Qué matriz de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ las relaciona?

Renombremos $Q_1 = Q_-$ y $Q_2 = Q_+$. El algoritmo para reducir $|b|$ es

$$\begin{aligned} x &\mapsto -y \\ y &\mapsto x + \langle \tfrac{\mp 2}{2} \rangle y = x \mp y \end{aligned} \qquad \text{que corresponde a} \quad M_{\mp} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \mp 1 \end{pmatrix}.$$

Se cumple $Q_-(M_-\vec{x}) = Q_-(-y, x-y) = x^2 + 3y^2 = Q_+(-y, x+y) = Q_+(M_+\vec{x})$, por tanto ambas formas son equivalentes a $x^2 + 3y^2$ y, en particular, equivalentes entre sí con $Q_-(M_- M_+^{-1}\vec{x}) = Q_+(\vec{x})$, lo cual da la matriz

$$M = M_- M_+^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Criterios de corrección

Es imposible ser totalmente exhaustivo con todos los casos que aparecen en los exámenes, además ocasionalmente relajo o endurezco ligerísimamente los criterios dependiendo del aspecto global del examen. Solo se indican las bonificaciones y penalizaciones genéricas.

1) El error típico consiste en diferentes afirmaciones del tipo "$n \le \alpha_1 < 3n$ implica $\lfloor \alpha_1 \rfloor = 2n$". Esto no es concluyente. Por ejemplo, si $n = 4$, no se excluye la posibilidad $\lfloor \alpha_1 \rfloor = 9$. Penaliza 0.5 puntos. La mayor parte de las veces aparece en la forma "$1 \le \sqrt{1 + 2/n} < 2$ implica que la parte entera de $n + n\sqrt{1 + 2/n}$ es $2n$". Eso necesita una mínima justificación.

2) Una función que no es 1-periódica, en general no cumple $f(a_n) = f\big(\mathrm{Frac}(a_n)\big)$. Algunos consideráis funciones 2-periódicas. Penaliza 0.5. La misma penalización se aplica a olvidar el valor absoluto o a no deshacer el cambio al resolver la integral (el resultado no cuadra numéricamente). Los errores de cálculo descuentan 0.25 y no realizar la integral 0.75.

3) A casi todos los que han usado la relación con la ecuación de Pell haciendo un argumento coherente les he contado al menos 1,75, incluso si no han llegado a la solución.

4) Esperaba un argumento sistemático, más allá de adivinar la matriz, como ha hecho alguno. De todas formas, no lo he penalizado. Cada una de las partes del ejercicio (decidir sin son equivalentes y hallar la matriz) cuenta 0,5, aunque la segunda implica la primera. La sustitución $(x, y) \mapsto (-x, y)$ obviamente pasa Q_1 a Q_2 pero no es válida porque no pertenece a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. No cuenta nada.