Enunciados y soluciones

1) Determina razonadamente todas las matrices enteras 2×2 de determinante 3 tales que su primera fila sea $(13,8)$ y ~~todos~~ sus elementos [de la segunda fila] tengan valor absoluto menor que 12.

La ecuación $\begin{vmatrix} 13 & 8 \\ y & x \end{vmatrix} = 3$ lleva a resolver $13x-8y=3$. Es fácil obtener una solución particular, de todas formas, para proceder de una manera sistemática buscamos una solución de $13x-8y=1$, que es lo mismo que $-13(-x)+8(-y)=1$, mediante el algoritmo de Euclides y el de la fracción continua:

$$\begin{array}{rcl} -13 &=& (-2)\cdot 8+3 \\ 8 &=& 2\cdot 3+2 \\ 3 &=& 1\cdot 2+1 \\ 2 &=& 2\cdot 1+0 \end{array}$$

		-2	2	1	2
0	1	-2	-3	$\mathbf{-5}$	-13
1	0	1	2	$\mathbf{3}$	8

que lleva a $-x=3$, $-y=5$. Así pues, una solución particular de $13x-8y=3$ es $(x_0,y_0)=(-3\cdot 3,-5\cdot 3)$ y la solución general resulta $(x,y)=(-9+8t,-15+13t)$ con $t\in\mathbb{Z}$. Claramente, $y>-12$ requiere $t>0$ y $x<12$ requiere $t<3$, lo que deja las posibilidades $t=1,2$ y conduce a las soluciones

$$\begin{pmatrix} 13 & 8 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}.$$

---

2) Halla el menor $n\in\mathbb{Z}^+$ tal que $x^n\equiv 1\ (91)$ para todo x coprimo con 91.

Sabemos por el pequeño teorema de Fermat que para $\gcd(x,91)=1$ se tiene $x^6\equiv 1\ (7)$, que implica $x^{12}\equiv 1\ (7)$, y $x^{12}\equiv 1\ (13)$. Por el teorema chino del resto, estas dos últimas congruencias equivalen a $x^{12}\equiv 1\ (91)$, por tanto $n\le 12$. Por otro lado, una raíz primitiva g módulo 13 tiene orden 12, en particular $g^n\not\equiv 1\ (13)$ para $1\le n<12$ y, con mayor razón, también ocurrirá módulo $91=13\cdot 7$, de donde $n\ge 12$. En conclusión, $n=12$.

---

3) Sea n un entero impar. Demuestra que todos los primos que dividen a $n^2-6n+10$ son de la forma $4k+1$.

Sea p un divisor primo de $n^2-6n+10$. Si n es impar, $n^2-6n+10=n^2-2(-3n+5)$ también lo es, por tanto $p\ne 2$. Por otro lado, $n^2-6n+10=(n-3)^2+1$ implica que $x=n-3$ es solución de $x^2+1\equiv 0\ (p)$, así pues $\left(\frac{-1}{p}\right)=1$ y la primera ley suplementaria implica que $(p-1)/2$ es par o, equivalentemente, $p=4k+1$.

4) Demuestra (para $\Re(s) > 1$) la identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)n^{s-1}} = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{\varphi(n)n^s}.$$

Sean las funciones aritméticas $f(n) = |\mu(n)|/\varphi(n)$ y $g(n) = n/\varphi(n)$. Ambas son multiplicativas por ser cociente de multiplicativas. Con esta notación, la identidad es $D_g(s) = D_{\mathbf{1}}(s)D_f(s)$. Según la teoría, esto tiene sentido en $\Re(s) > 1$ ya que $\zeta(s) = D_{\mathbf{1}}(s)$ y $D_f(s)$ convergen absolutamente (la segunda porque $|n^{-s}| \ge |n^{-s}\mu(n)|/\varphi(n)$) y, además, equivale a $g = \mathbf{1} * f$. Por ser funciones multiplicativas, esta identidad se sigue de $g(p^\alpha) = (\mathbf{1} * f)(p^\alpha)$ con p primo y $\alpha \in \mathbb{Z}^+$, lo cual se reduce a

$$g(p^\alpha) = \frac{p^\alpha}{p^\alpha(1-1/p)} = \frac{p}{p-1} \quad \text{y} \quad (\mathbf{1} * f)(p^\alpha) = \sum_{d|p^\alpha} f(d) = f(1) + f(p) = 1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1}.$$

Criterios de corrección

Es imposible ser totalmente exhaustivo con todos los casos que aparecen en los exámenes, además ocasionalmente relajo o endurezco ligerísimamente los criterios dependiendo del aspecto general del examen. Solo se indican las bonificaciones y penalizaciones genéricas.

1) Los errores más comunes han sido olvidarse de un signo o de una solución o añadir alguna. Cada uno de estos errores aislados penaliza 0,25. Resolver solo $13x+8y=1$ y no llegar a la solución cuenta a lo más 1. Errores en el algoritmo de Euclides penalizan al menos 1.

2) Algunos probáis $n \le 72$ o $n \mid 72$ y de ello deducís erróneamente $n = 72$. Típicamente esto cuenta 1 o menos dependiendo de la naturaleza del error. No he penalizado no mencionar que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ es cíclico, si lo usáis, pero deberíais hacerlo, por ejemplo apelando a la existencia de raíces primitivas. Cuando hay errores en la congruencia de Euler-Fermat, se obtiene a lo más 0,75.

3) Muchos olvidáis usar la hipótesis $2 \nmid n$ que se necesita para descartar $p = 2$ (para $n = 2$ no sería cierto). Esto penaliza 0,25.

4) Los errores más típicos han aparecido cuando se ha utilizado la comparación de los factores $D_{f,p}$ de ambos miembros y suelen ser que no se termina el razonamiento o que hay un error en alguna suma de series. Cada uno de ellos penaliza al menos 0,5. Si a eso se une un error en algún producto de Euler, a lo más se consigue 1,25.