Enunciados y soluciones

1) [2 puntos] Demuestra la igualdad

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \qquad \text{con} \quad \Re(s) > 1$$

donde $\Lambda(n)$ es la función de von Mangoldt que vale $\log p$ si $n = p^k$ con p primo y $k \in \mathbb{Z}^+$ y es nula en el resto de los casos. No es obligatorio discutir la convergencia, basta probarla como una identidad formal.

El producto de Euler de la función ζ es $\zeta(s) = \prod_p \big(1 - p^{-s}\big)^{-1}$. Tomando logaritmos y empleando la serie de Taylor $\log(1 - z) = -\frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots$ (válida para $|z| < 1$),

$$\log \zeta(s) = -\sum_p \log\big(1 - p^{-s}\big) = \sum_p \Big(\frac{p^{-s}}{1} + \frac{p^{-2s}}{2} + \frac{p^{-3s}}{3} + \dots\Big).$$

Derivando término a término se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_p \Big(-\frac{p^{-s}\log p}{1} - \frac{2p^{-2s}\log p}{2} - \frac{3p^{-3s}\log p}{3} - \dots\Big)\\ &= \sum_p \Big(\frac{\Lambda(p)}{p^s} + \frac{\Lambda(p^2)}{p^{2s}} + \frac{\Lambda(p^3)}{p^{3s}} + \dots\Big) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.\end{aligned}$$

Cambiando el signo se obtiene la fórmula del enunciado.

---

2) [2 puntos] Calcula la fracción continua de $\sqrt{n^2 + n + \frac{1}{2}}$ para $n \in \mathbb{Z}^+$ arbitrario.

Sea α la expresión del enunciado. Se verifica $n^2 < \alpha^2 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ por tanto $\lfloor \alpha \rfloor = n$, esto es, $a_0 = n$. Con la notación habitual,

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - n} = \frac{\alpha + n}{\alpha^2 - n^2} = \frac{\alpha + n}{n + 1/2} \overset{n<\alpha<n+1}{\Longrightarrow} 1 < \frac{2n}{n + 1/2} < \alpha_1 < \frac{2n+1}{n + 1/2} = 2 \;\Rightarrow\; a_1 = 1.$$

El siguiente paso es

$$\alpha_2 = \frac{1}{(\alpha + n)/(n + 1/2) - 1} = \frac{n + 1/2}{\alpha - 1/2} = \frac{(n + 1/2)(\alpha + 1/2)}{(n + 1/2)^2} = \frac{\alpha + 1/2}{n + 1/2}.$$

De nuevo, $n < \alpha < n+1$ implica $1 < \alpha_2 < (n+3/2)/(n+1/2) < 2$ y $a_2 = 1$. Finalmente,

$$\alpha_3 = \frac{1}{(\alpha+1/2)/(n+1/2)-1} = \frac{n+1/2}{\alpha-n} = \alpha+n,$$

con lo que hemos probado $\alpha = [n,1,1,n+\alpha]$. De aquí, $\alpha = [n,1,1,2n,1,1,n+\alpha]$ e inductivamente $\alpha = [n,\ \overline{1,1,2n}\,]$.

---

3) [2 puntos] Sea $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que la fracción continua de $\sqrt{N}$ es $[n+2,\ \overline{1,1,1,2n+4}\,]$ para cierto $n \in \mathbb{Z}^+$. Demuestra que n es múltiplo de 3.

Sea $\alpha = n+2+\sqrt{D}$. Se tiene $\alpha = [\,\overline{2n+4,1,1,1}\,] = [2n+4,1,1,1,\alpha]$. Entonces

$$\begin{array}{cc|ccccc} & & 2n+4 & 1 & 1 & 1 & \alpha \\ \hline 0 & 1 & 2n+4 & 2n+5 & 4n+9 & 6n+14 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \frac{(6n+14)\alpha+4n+9}{3\alpha+2}.$$

Operando se sigue $3\alpha^2 - 6(n+2)\alpha - 4n - 9 = 0$ y completando cuadrados, $3\big(\alpha-(n+2)\big)^2 - 3(n+2)^2 - 4n - 9 = 0$. Como $\big(\alpha-(n+2)\big)^2 = D$ es entero, se deduce que $4n$ es múltiplo de 3.

---

4) [1.5 puntos] Halla el menor entero positivo k que verifica $n^k \equiv 1\ (140)$ para todo entero n tal que n y 140 sean coprimos.

Consideremos $M = \{2^2, 5, 7\}$ cuyo producto da la factorización de 140. El mínimo común múltiplo de $\varphi(m)$ con $m \in M$ es $K = \text{mcm}(2,4,6) = 12$. La congruencia de Euler-Fermat implica $m \mid n^K - 1$ para $m \in M$ si n y m son coprimos, por tanto $n^K \equiv 1\ (140)$ si n y 140 son coprimos.

Veamos que no es posible elegir en el enunciado un k menor que K. El teorema chino del resto asegura que existe n_0 tal que $n_0 \equiv g_m\ (m)$ para todo $m \in M$ donde g_m es una raíz primitiva módulo m (cuya existencia se vio en clase). Por la definición de raíz primitiva, $n_0^k \equiv 1\ (m)$ implica $\varphi(m) \mid k$, por consiguiente $K \mid k$, en particular $k \geq K$.

---

5) [1.5 puntos] Demuestra que $\alpha = 0{,}13579111315171921\ldots$ no es un decimal periódico (ni puro ni mixto) y por tanto $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Supongamos que α tiene periodo N, entonces para cualquier $a \in \mathbb{Z}^+$ suficientemente grande $\operatorname{Frac}(10^a\alpha)$ y $\operatorname{Frac}(10^{Nb+a\alpha})$ coinciden para todo $b \in \mathbb{Z}^+$ (aquí Frac indica la parte fraccionaria). Escojamos a tal que $\operatorname{Frac}(10^a\alpha)$ sea de la forma

$$0, |2k+1|2k+3|2k+5|2k+7|\dots$$

Es decir, que la parte decimal de $10^a\alpha$ esté al inicio de uno de los números impares $2k+1$ que conforman α. Haciendo crecer a podemos suponer que $2k+1$ es suficientemente grande y que tiene Nb cifras. Entonces $\operatorname{Frac}(10^{Nb+a}\alpha)$ será de la forma

$$0, |2k+3|2k+5|2k+7|2k+9|\dots$$

y se llega a una contradicción.

---

6) [1 punto] Encuentra una fórmula que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ produzca una solución $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ de la ecuación

$$25x^2 + 14xy + 2y^2 = 2023^{2n} + 9.$$

Indicación: Busca una forma cuadrática lo más sencilla posible equivalente a la del primer miembro.

Aplicando el algoritmo de reducción con $a = 25$, $b = 14$ y $c = 2$, se tiene $\langle b/(2c)\rangle = \langle 14/4\rangle = 4$ y el cambio asociado es $x \mapsto -y$, $y \mapsto x + 4y$ que lleva la forma a

$$25(-y)^2 + 14(-y)(x+4y) + 2(x+4y)^2 = 2x^2 + 2xy + y^2.$$

Una nueva aplicación del algoritmo usando $\langle b/(2c)\rangle = \langle 2/2\rangle = 1$ da lugar a $x \mapsto -y$, $y \mapsto x+y$ que lleva a

$$2(-y)^2 + 2(-y)(x+y) + (x+y)^2 = x^2 + y^2.$$

Combinando ambos cambios se obtiene $Q(-x-y, 4x+3y) = x^2 + y^2$ donde $Q(x, y)$ es la forma cuadrática del enunciado. Tomando $x = 2023^n$, $y = 3$ se sigue que una solución de la ecuación es $(-2023^n - 3, 4 \cdot 2023^n + 9)$.
